Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

ННК «Інститут прикладного системного аналізу»
НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»

Київський національний університет ім. Т. Шевченка

IT Dnipro Community

XX ювілейна міжнародна науково-практична конференція

МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ (МПЗІС-2022)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

MATHEMATICAL SUPPORT AND SOFTWARE FOR INTELLIGENT SYSTEMS (MSSIS-2022)

ABSTRACTS

23-25 листопада 2022 року
Дніпро, Україна

ЯК ЗНАЙТИ ВСІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА?

Задорожний[1] Б.О., Корчинський[1] О.О., Стецюк[1,2] П.І., Швець[3] А.В.
ddphyk@gmail.com
[1]*Ужгородський національний університет*
[2]*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України*
[3]*Національний авіаційний університет*

Задача комівояжера полягає в знаходженні найкоротшого маршруту (гамільтонового циклу), який проходить через n міст (вершин), відстань між якими $d_{ij} > 0$, $i, j = 1,...,n$, $i \neq j$. Вона може бути сформульована як задача цілочислового лінійного програмування такого вигляду [1]: знайти

$$d^* = \min_{x_{ij} \in \{0,1\}, u_i \in \{1,2,...,n-1\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \qquad (1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,n, \qquad (2)$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n-2, \quad i, j = 1,...,n, \quad i \neq s,\ j \neq s, i \neq j. \qquad (3)$$

Тут булева змінна x_{ij} дорівнює одиниці, якщо цикл містить дугу ij, та дорівнює нулю в протилежному випадку. Значення цілочислових змінних u_i відповідають номеру кроку, на якому відвідується вершина i, окрім вершини s, з якої починається і в якій закінчується гамільтонів цикл.

Мінімізація цільової лінійної функції (1) відповідає пошуку гамільтонового циклу мінімальної довжини d^* (маршрут комівояжера). Обмеження (2) описують одноразовий вхід та одноразовий вихід для кожної із вершин. Обмеження (3) забезпечують зв'язність гамільтонового циклу [1].

Задача (1)–(3) містить $N = n^2 - 1$ змінних, з яких $n(n-1)$ є булеві, а $(n-1)$ – цілочислові, та $M = n^2 - 3n + 2$ обмежень, з яких $2n$ – лінійні рівності, а $(n-1)(n-2)$ – лінійні нерівності. Якщо $n = 25$, то маємо 624 змінних та 602 обмеження. Для таких розмірів задачу (1)–(3) можна успішно розв'язувати за декілька секунд сучасними програмами Gurobi

9.1.2 та CPLEX 20.1.0.0 з NEOS-сервера [2], про що свідчать результати для 25-вершинного графа.

s	t_{CPLEX}	s	t_{CPLEX}	s	t_{CPLEX}	s	t_{CPLEX}	s	t_{CPLEX}
01	12.23	06	6.90	11	7.17	16	7.70	21	5.98
02	6.32	07	1.47	12	2.22	17	3.69	22	1.91
03	7.38	08	22.51	13	10.18	18	4.33	23	6.16
04	37.34	09	6.69	14	5.82	19	1.75	24	3.30
05	6.56	10	38.39	15	2.05	20	2.06	25	2.51

Нехай d_{ij} є цілими числами. Розглянемо спосіб для знаходження усіх маршрутів комівояжера, який за кожний послідовний запуск Gurobi/CPLEX буде або знаходити новий маршрут довжиною d^*, або закінчувати роботу, якщо усі маршрути довжиною d^* уже вибрані. Він полягає у наступному.

Нехай знайдено m маршрутів $X_k^*,\ k=1,\dots,m,$ серед яких немає співпадаючих. Щоб знайти новий маршрут, додамо до задачі (1)–(3) обмеження:

$$\sum_{(i,j):x_{ijk}^*=1} d_{ij}x_{ij} \le d^* - 1/2, \quad k=1,...,m. \tag{4}$$

Лінійні нерівності (4) відсікають уже знайдені маршрути $X_k^*,\ k=1,\dots,m,$ тому розв'язком задачі (1)–(4) буде новий маршрут комівояжера x_{m+1}^*. Якщо його довжина дорівнює d^*, то x_{m+1}^* буде новим маршрутом коміваояжера, і його можна додати до списку маршрутів $X_k^*,\ k=1,\dots,m$. Якщо довжина маршруту x_{m+1}^* менша ніж d^*, то це значить, що список маршрутів $X_k^*,\ k=1,\dots,m,$ містить усі можливі маршрути комівояжера.

У доповіді будуть представлені результати розрахунків з використанням вказаних солверів та мови моделювання AMPL, наведені 32 розв’язки задачі (1)–(4) для графу st70.tsp з відомої бібліотеки TSPLIB.

Список літератури

1. Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. Integer programming formulation of travelling salesman problem. – J. ACM, 1960, 3, P. 326-329.
2. NEOS Solvers [Electronic resource]: https://neos-server.org/neos/solvers/