

Ужгородський національний університет  
Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України  
Leeds University Business School, University of Leeds, UK  
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

# ПОКРАЩЕННЯ ЕВРИСТИЧНОГО АЛГОРИТМУ ПАКУВАННЯ НЕРІВНИХ КРУГІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ $r$ - АЛГОРИТМУ ШОРА

студент 4-го курсу Задорожний Б. О.,  
доктор технічних наук, професор Романова Т. Є.,  
доктор фізико-математичних наук, професор Стецюк П. І.

# КОНКУРС “ЩІЛЬНА УПАКОВКА КРУГІВ”



**GLUSHKOV CYBER**  
CONTEST THROUGH RESEARCH

Запрошуємо до участі в онлайн конкурсі з 01.11-21.12.2022 року!

**ЩІЛЬНА УПАКОВКА  
КРУГІВ В КРУГ  
МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСУ**

**1 Місце - 25 000 грн**  
**2 Місце - 15 000 грн**  
**3 Місце - 10 000 грн**

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова  
Ужгородський національний університет  
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного  
Технічний університет Дрездена

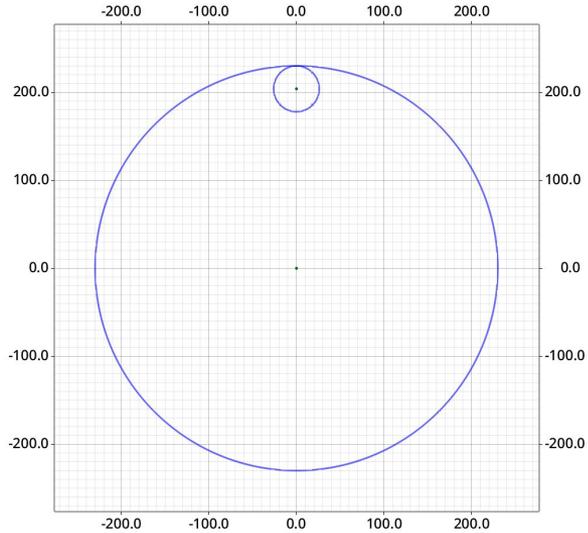
# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Задано набір  $N$  кругів з радіусами  $r_i, i = 1, 2, \dots, N$ .

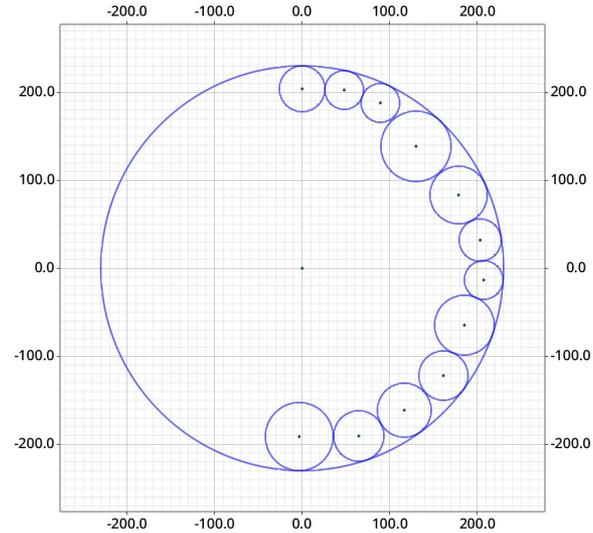
Потрібно знайти центри  $(x_i; y_i) i=1, 2, \dots, N$  цих кругів і радіус  $R$  головного (зовнішнього) круга з центром  $(0; 0)$  такі, що:

- кожний з кругів  $i = 1, 2, \dots, N$  має повністю знаходитись всередині головного круга (круги можуть торкатися межі головного круга);
- для будь-якої пари  $(i; j)$ , де  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  та  $i < j$ , круги  $i, j$  не перетинаються (їм дозволено торкатися один одного);
- радіус  $R$  головного круга має бути якомога меншим.

# ЕВРИСТИЧНИЙ АЛГОРИТМ (СЛАЙД 1)

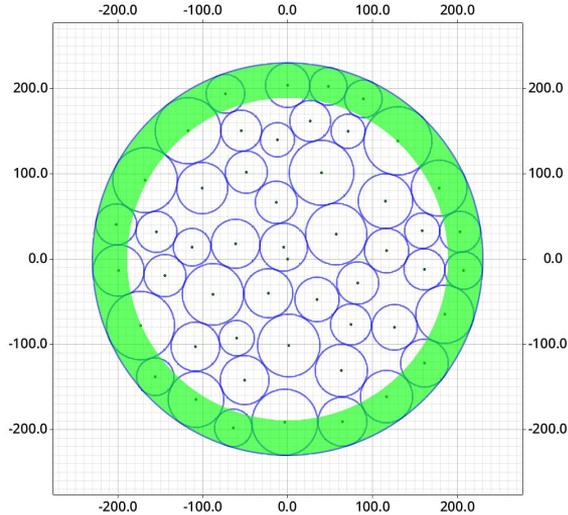


встановлення першого круга

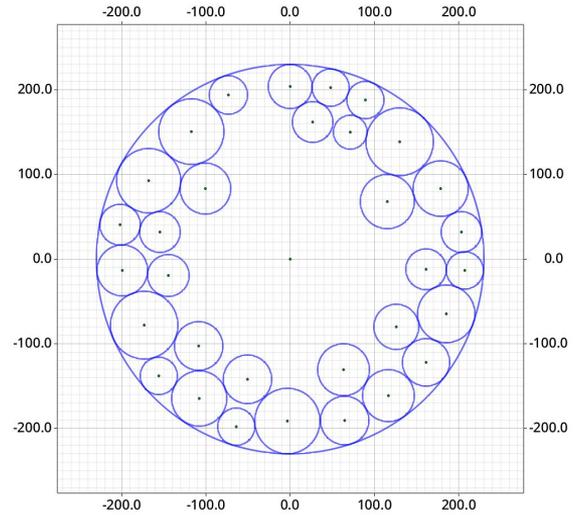


розміщення кругів впритул  
до внутрішньої межі

# ЕВРИСТИЧНИЙ АЛГОРИТМ (СЛАЙД 2)



область, де можуть бути  
розміщені круги

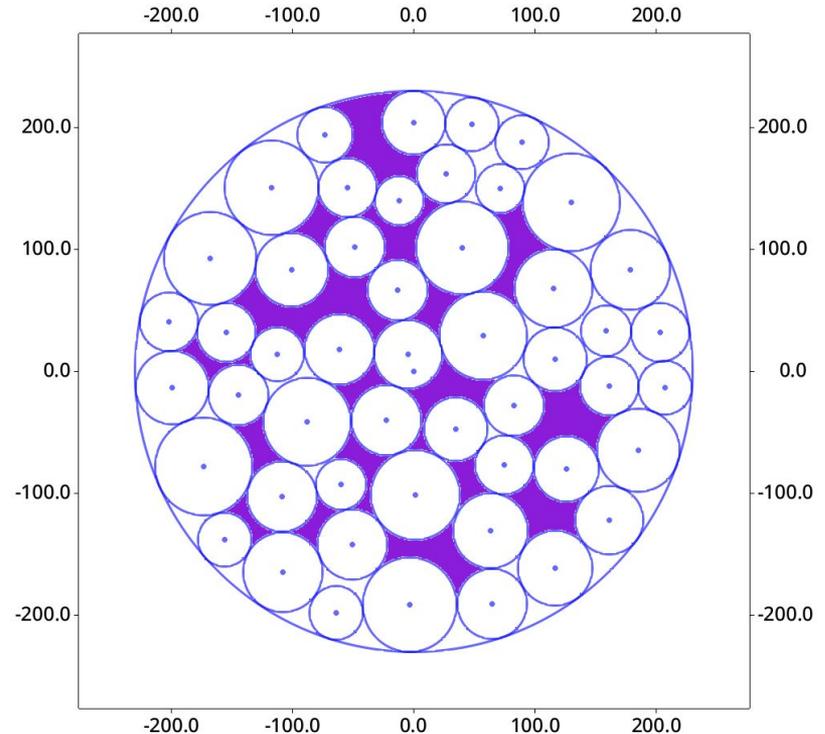


розміщення кругів у заглибленнях  
суміжних або через один круг

# ПРО ПОКРАЩЕННЯ ЕВРИСТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

З рисунку видно, що після “упакування” залишаються великі пустоти (фіолетовим), але їх можна зменшити, якщо упакувати круги щільніше.

Використовуючи точку знайдену евристичним алгоритмом як стартову та вирішуючи задачу оптимізації за допомогою  $r$ -алгоритму з дихотомією кроку можна щільніше розмістити круги.



## В-ФОРМА R-АЛГОРИТМУ

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k), k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$\beta = \frac{1}{\alpha_k} < 1, \eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|},$$

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h B_k \xi_k)$$

де

$$r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k)$$

# ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Має наступний вигляд:

$$R^* = \min_{R,x,y} R \quad (1)$$

за обмежень

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (R - r_i)^2, i = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, 1 \leq i < j \leq N \quad (3)$$

$$R \geq R_{low} \quad (4)$$

де  $R_{low}$  – максимальний із радіусів для набору кругів.

# ЗАДАЧА БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ НЕГЛАДКОЇ ШТРАФНОЇ ФУНКЦІЇ

$$\min_{R,x,y} \{f(R, x, y) = R + \Phi_p(R, x, y)\} \quad (5)$$

де негладка штрафна функція  $\Phi_p(R, x, y)$  має наступний вигляд:

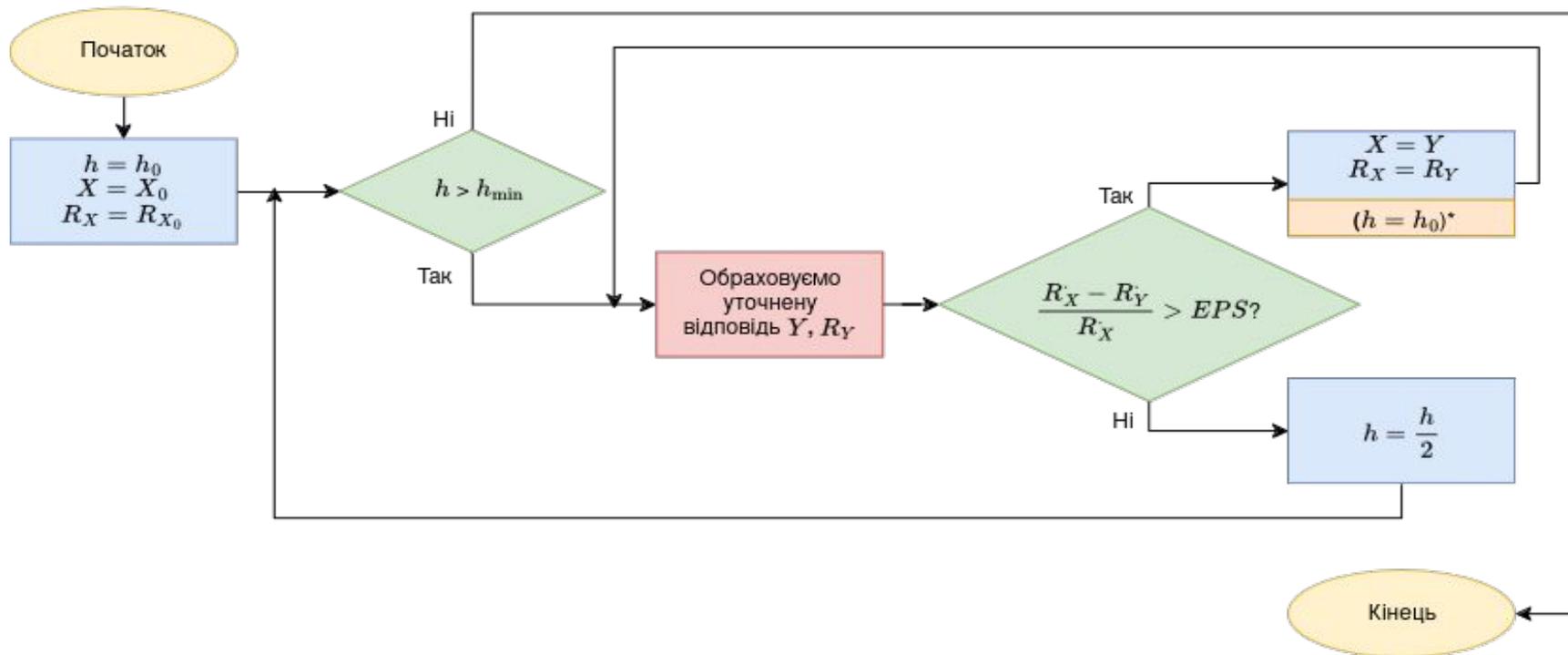
$$\Phi_p(R, x, y) = P_1 \cdot F_1(R, x, y) + P_2 \cdot F_2(x, y) + P_3 \cdot \max\{0, -R + R_{low}\} \quad (6)$$

$P_1, P_2, P_3$  – додатні штрафні коефіцієнти та функції  $F_1(R, x, y)$  та  $F_2(x, y)$  мають вигляд:

$$F_1(R, x, y) = \sum_{i=1}^N \max\{0, x_i^2 + y_i^2 - (R - r_i)^2\} \quad (7)$$

$$F_2(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \max\{0, -(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (r_i + r_j)^2\} \quad (8)$$

# УТОЧНЕННЯ ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ (ВАРІАНТ 1 і 2)



де  $EPS$  – відсоток відносного покращення величини радіуса головного круга

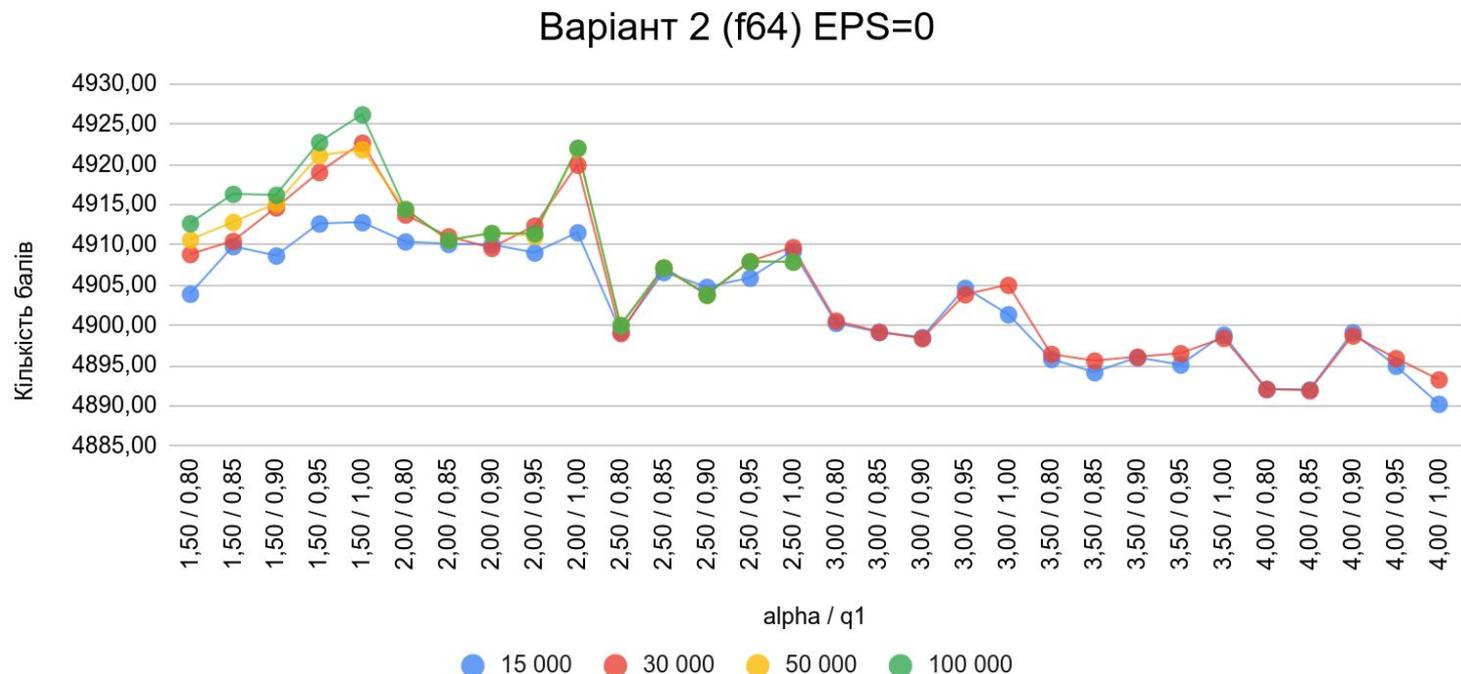
\*додаткове правило, що використовується у варіанті 2

## ПОРІВНЯННЯ ВАРІАНТІВ 1 ТА 2

Варіант	1	2	1	2	1	2	1	2
EPS	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	0	0
Кількість балів	4 901,46	4 901,29	4 905,47	<b>4 908,10</b>	4 906,02	<b>4 907,86</b>	<b>4 906,75</b>	<b>4 912,64</b>
Середня кількість ітерацій	12 041,70	12 129,99	11 543,00	12 006,31	11 759,53	12 199,83	11 225,86	11 923,91
Покращення в балах	69,43	69,26	73,43	<b>76,07</b>	73,98	<b>75,83</b>	<b>74,71</b>	<b>80,60</b>

Кількість балів, яка отримана евристичним алгоритмом – **4832,04** балів.

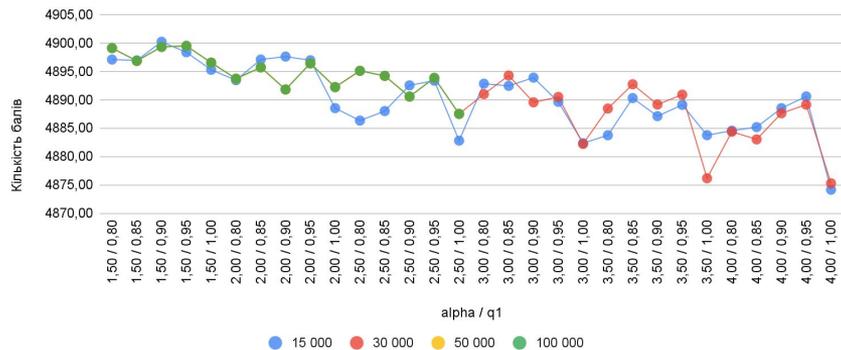
# РЕЗУЛЬТАТИ R-АЛГОРИТМУ ДЛЯ РІЗНИХ ALPHA ТА Q1



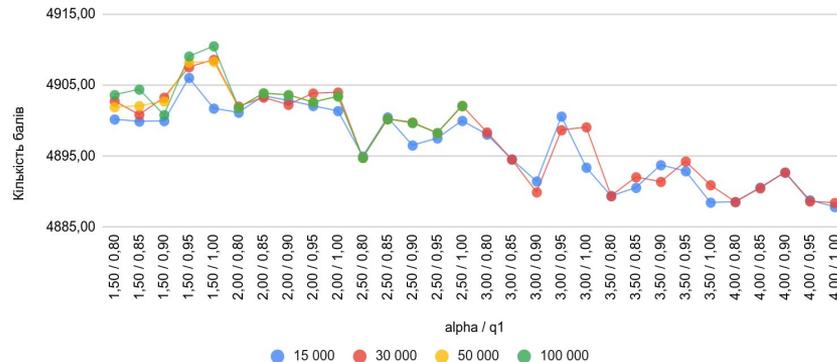
 – максимальні кількості ітерацій r-алгоритму

# РЕЗУЛЬТАТИ R-АЛГОРИТМУ ДЛЯ РІЗНИХ ALPHA ТА Q1

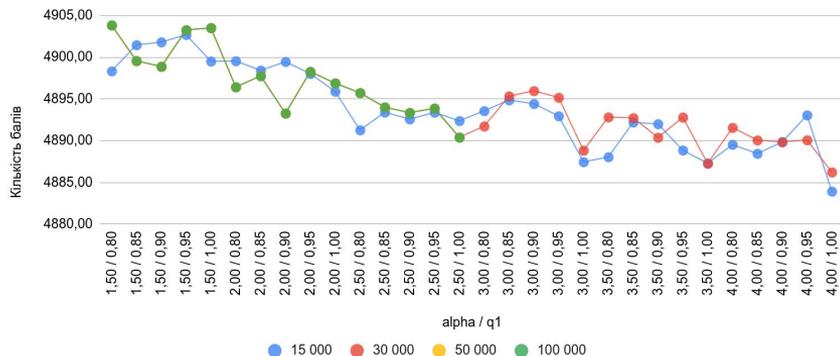
Варіант 1 (f32) EPS=10<sup>-5</sup>



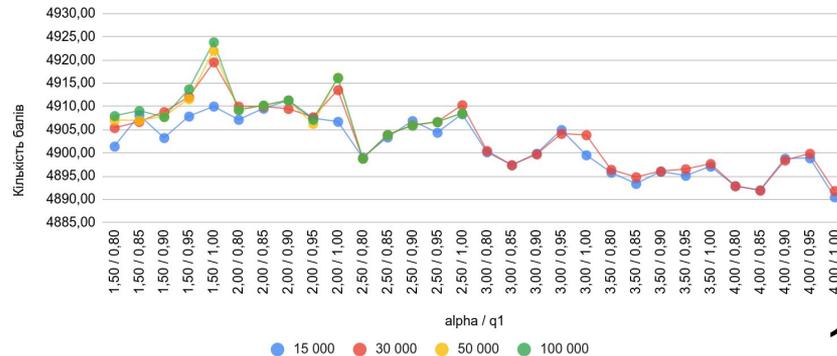
Варіант 1 (f64) EPS=10<sup>-5</sup>



Варіант 2 (f32) EPS=10<sup>-5</sup>

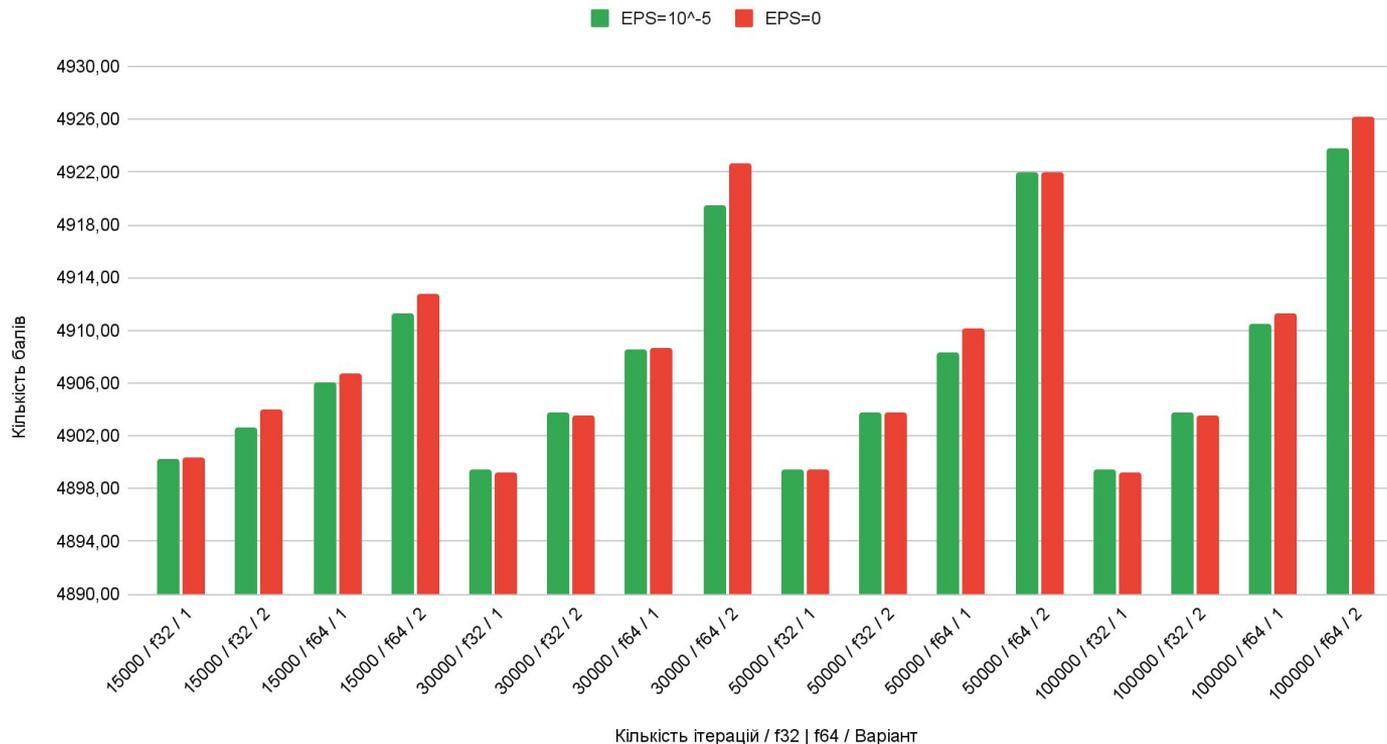


Варіант 2 (f64) EPS=10<sup>-5</sup>

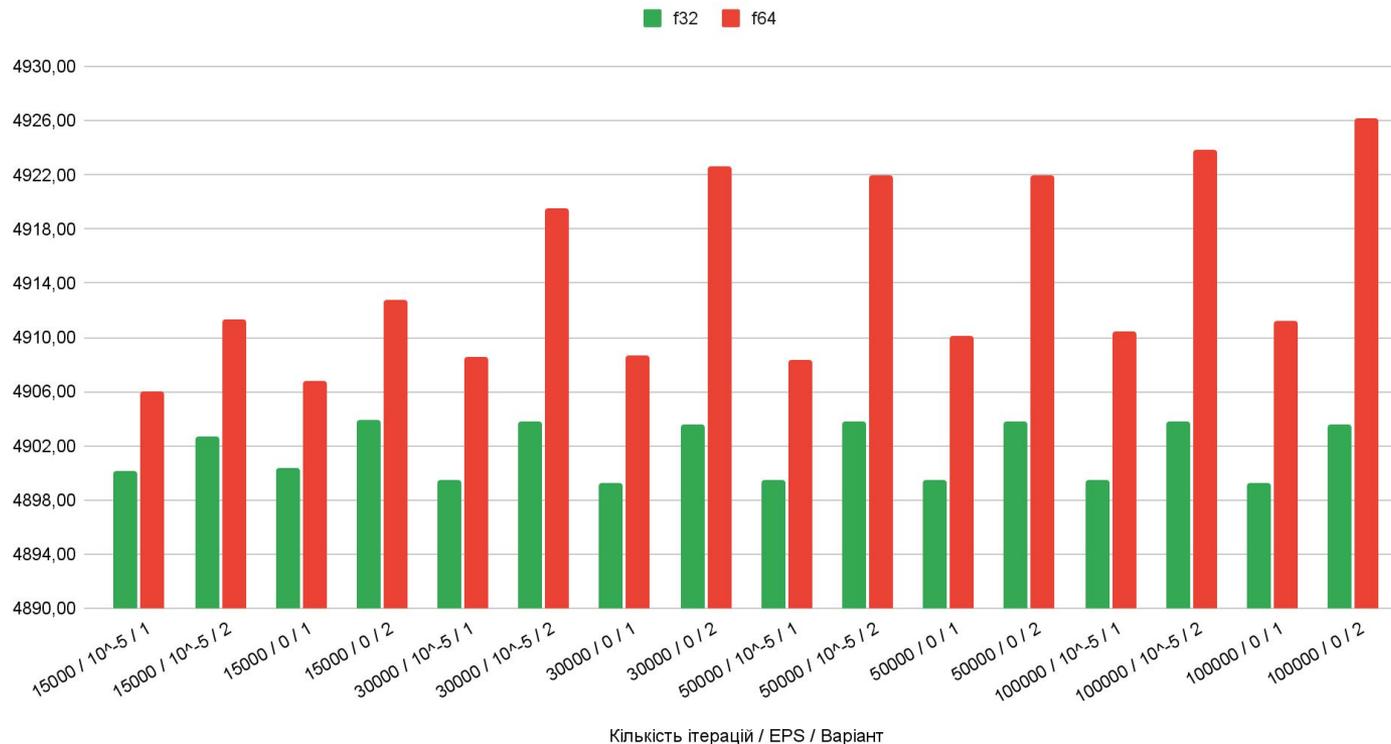




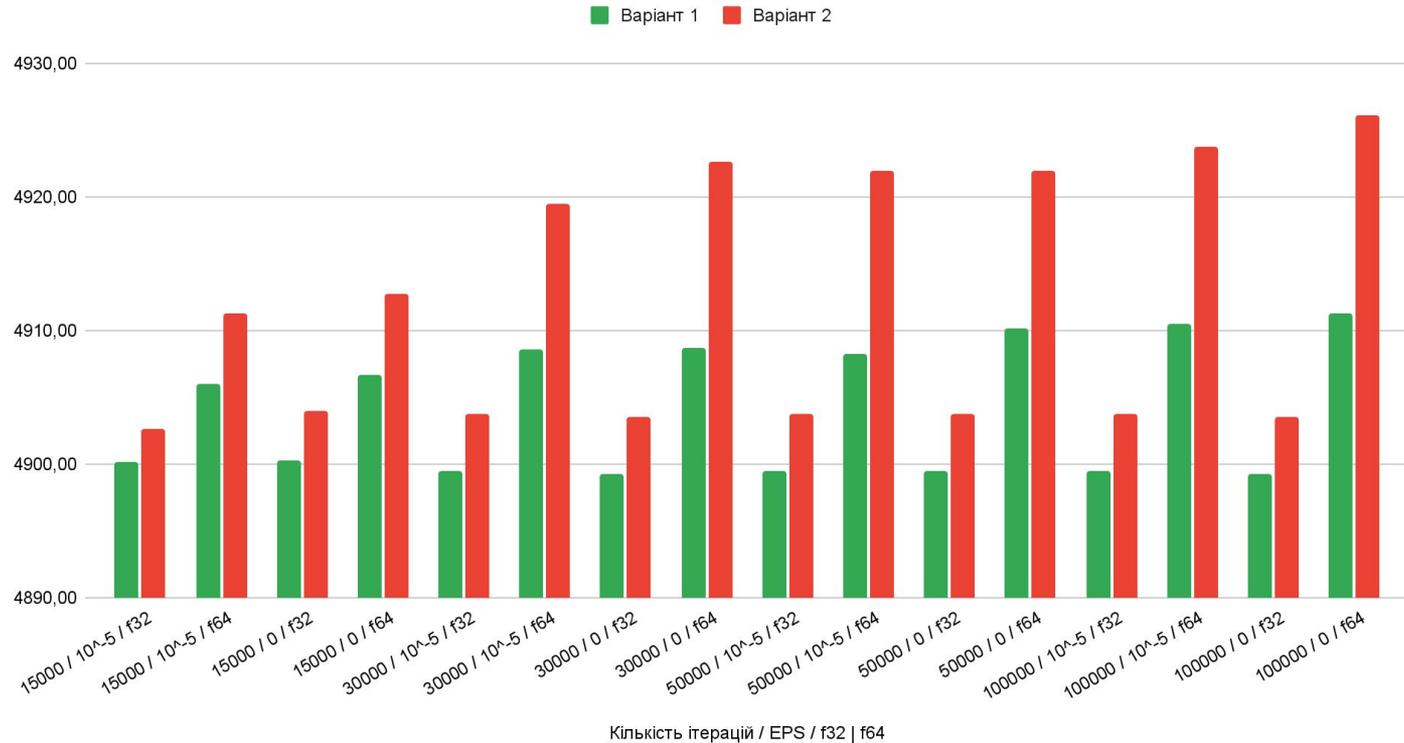
# ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЗА EPS



# ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЗА ТИПОМ ДАНИХ

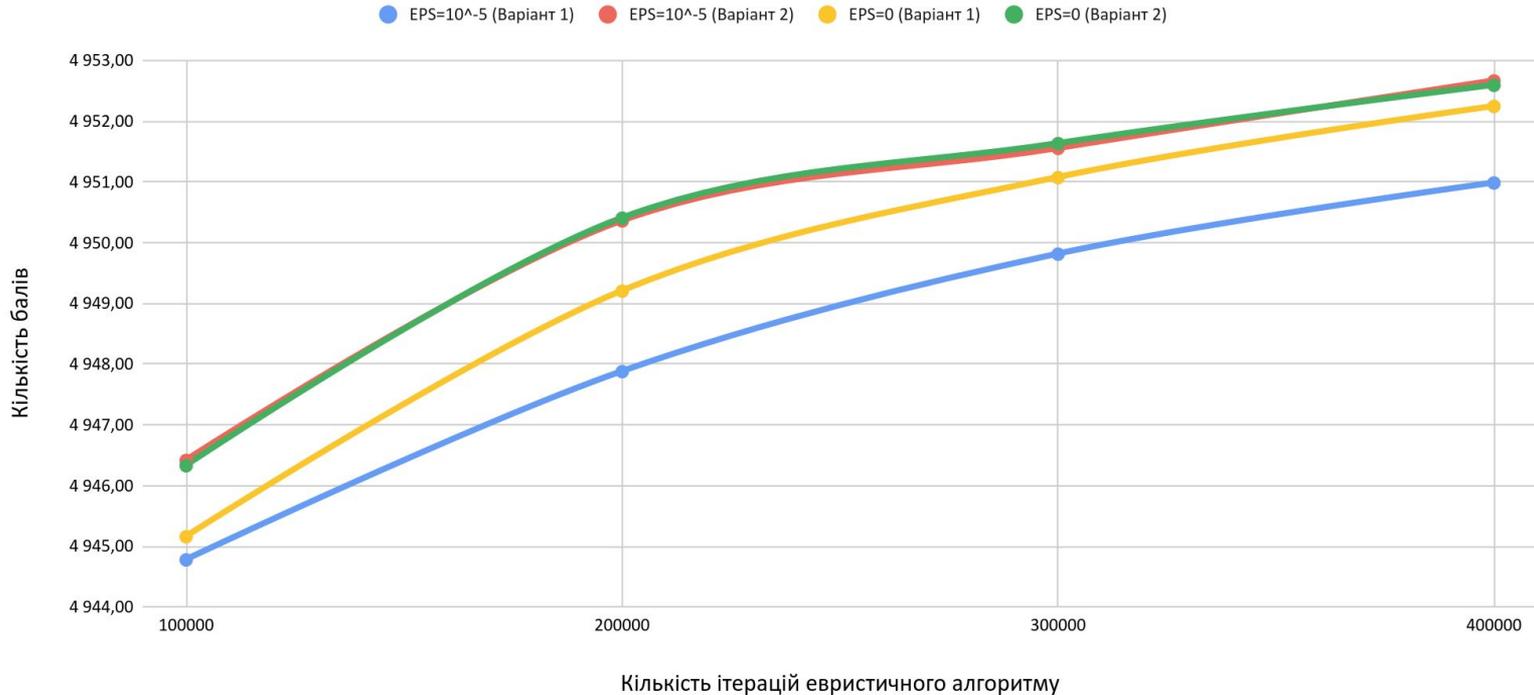


# ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЗА ВАРІАНТАМИ



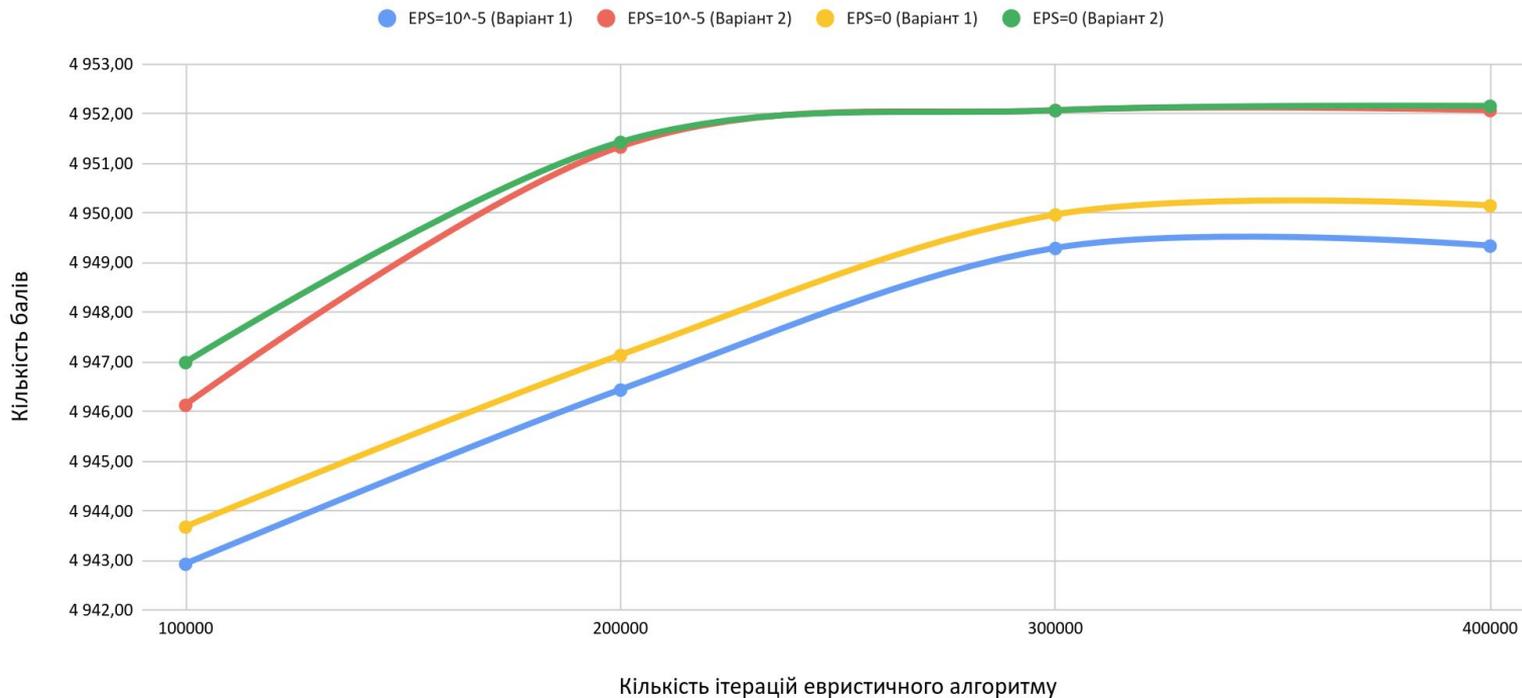
# НАЙКРАЩІ ПАРАМЕТРИ: ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Порівняння евристичного алгоритму з уточненням при  $\alpha=1,5$  та  $q_1=0,95$



# НАЙКРАЩІ ПАРАМЕТРИ: ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

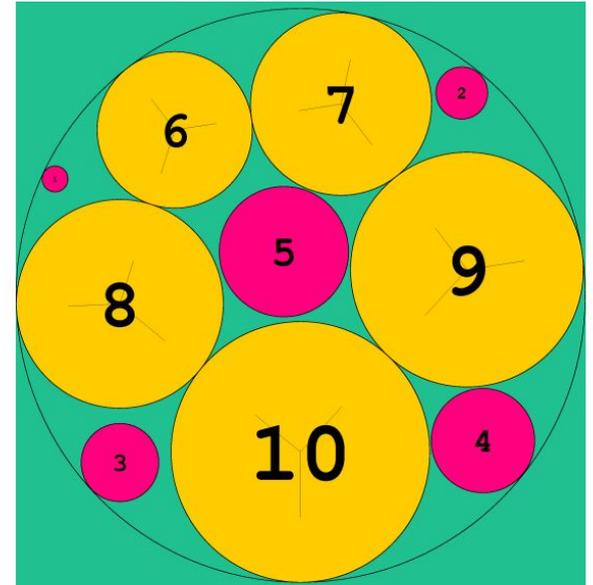
Порівняння евристичного алгоритму з уточненням при  $\alpha=1,5$  та  $q_1=1$



# ТЕСТИ З САЙТУ РАСКОМАНІА

Кількість цифр після коми, що співпадає з результатами раскоманія

Тест	f32		f64	
	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 1	Варіант 2
5	5	5	10	10
6	5	5	10	10
7	5	5	10	12
8	4	4	9	9
9	0	0	0	1
10	0	0	0	1



# ДЖЕРЕЛА

1. Конкурс. URL: <https://packing-circles.eolymp.io>
2. Задорожний Б.О., Міца О.В., Стецюк П.І. Про покращення евристичного алгоритму упаковки кругів в круг мінімального радіусу. Cybernetics and Computer Technologies. 2023. 2. С. 32–45. <https://doi.org/10.34229/2707-451X.23.2.4>
3. Задорожний Б.О., Стецюк П.І. Покращення локального екстремуму для задачі упаковки кругів в круг мінімального радіусу. Тези доповідей XXI міжнародної науково-практичної конференції “Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2023)”, Дніпро, 22-24 листопада 2023 р. Дніпро: ДНУ, 2023. С. 128–129.  
<http://mpzis.dnu.dp.ua/wp-content/uploads/2023/11/mpzis-2023.pdf>
4. The best known packings of unequal circles with integer radii in a circle (complete up to  $N = 200$ ): <http://www.packomania.com>

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

[bohzador@gmail.com](mailto:bohzador@gmail.com)