

ПОКРАЩЕННЯ ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДЛЯ ЗАДАЧІ УПАКОВКИ КРУГІВ В КРУГ МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСУ

Б.О. Задорожний¹, П.І. Стецюк^{1,2}

¹Ужгородський національний університет

²Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

XXI науково-практична конференція

"Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023)"

22-24 листопада 2023 року, м. Дніпро

Зміст

1. Вступ
2. Задача упаковки кругів у круг мінімального радіусу
3. Математична модель задачі
4. Покращення локального екстремуму (2 варіанти)
5. Обчислювальні експерименти
6. Висновок

Вступ

З 1 листопада до 21 грудня 2022 року проводився конкурс-змагання з розв'язання задачі «Щільної упаковки кругів в круг мінімального радіусу» [1]. Організатори - ІК НАНУ, УжНУ, ІПМаш НАНУ та TUD (Germany).

Друге місце здобув студент третього курсу Богдан Задорожний, програма якого використовувала розроблений ним евристичний алгоритм. Програма показала результат в 4904 бали (максимум 5000), для чого знадобилося 84 запуски зі 100.

Отже залишок часу можна використати на покращення розв'язку, знайденого евристичним алгоритмом. Для цього проведено дослідження, як за допомогою g -алгоритму Шора можна покращити ефективність роботи розробленого евристичного алгоритму.

Вступ

У доповіді розглянемо способи покращення розв'язків конкурсних задач «Щільної упаковки кругів в круг мінімального радіусу» [1], отриманих за допомогою евристичного алгоритму, що був описаний у статі [2].

1. Конкурс. URL: <https://packing-circles.eolymp.io/>
2. Задорожний Б.О., Міца О.В., Стецюк П.І. Про покращення евристичного алгоритму упаковки кругів в круг мінімального радіусу. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2023. 2. С. 32–45.
<https://doi.org/10.34229/2707-451X.23.2.4>

Конкурсна задача упаковки кругів

Задано набір кругів з радіусами r_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Потрібно знайти центри $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ цих кругів і радіус R зовнішнього круга з центром $(0; 0)$ такі, що:

- **кожний з кругів** $i = 1, 2, \dots, N$ має повністю знаходитись всередині зовнішнього круга (круги можуть торкатися межі зовнішнього круга);
- **для будь-якої пари** $(i; j)$, де $i, j \in \{1, \dots, N\}$ та $i < j$, круги не перетинаються (їм до-зволено торкатися один одного);
- радіус R зовнішнього круга має бути **якомога меншим**.

Математична модель задачі упаковки

Задача нелінійного програмування має наступний вигляд:

$$R^* = \min_{R,x,y} R \quad (1)$$

за обмежень

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (R - r_i)^2, i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$(x_i^2 - x_j^2) + (y_i^2 - y_j^2) \leq (r_i^2 + r_j^2), 1 \leq i \leq j \leq N, \quad (3)$$

$$R \geq R_{low}, \quad (4)$$

де R_{low} - максимальний із радіусів для набору кругів.

Задача безумовної мінімізації негладкої штрафної функції

$$\min_{R,x,y} \{f(R, x, y) = R + \Phi_p(R, x, y)\}, \quad (5)$$

де негладка штрафна функція $\Phi_p(R, x, y)$ має наступний вигляд:

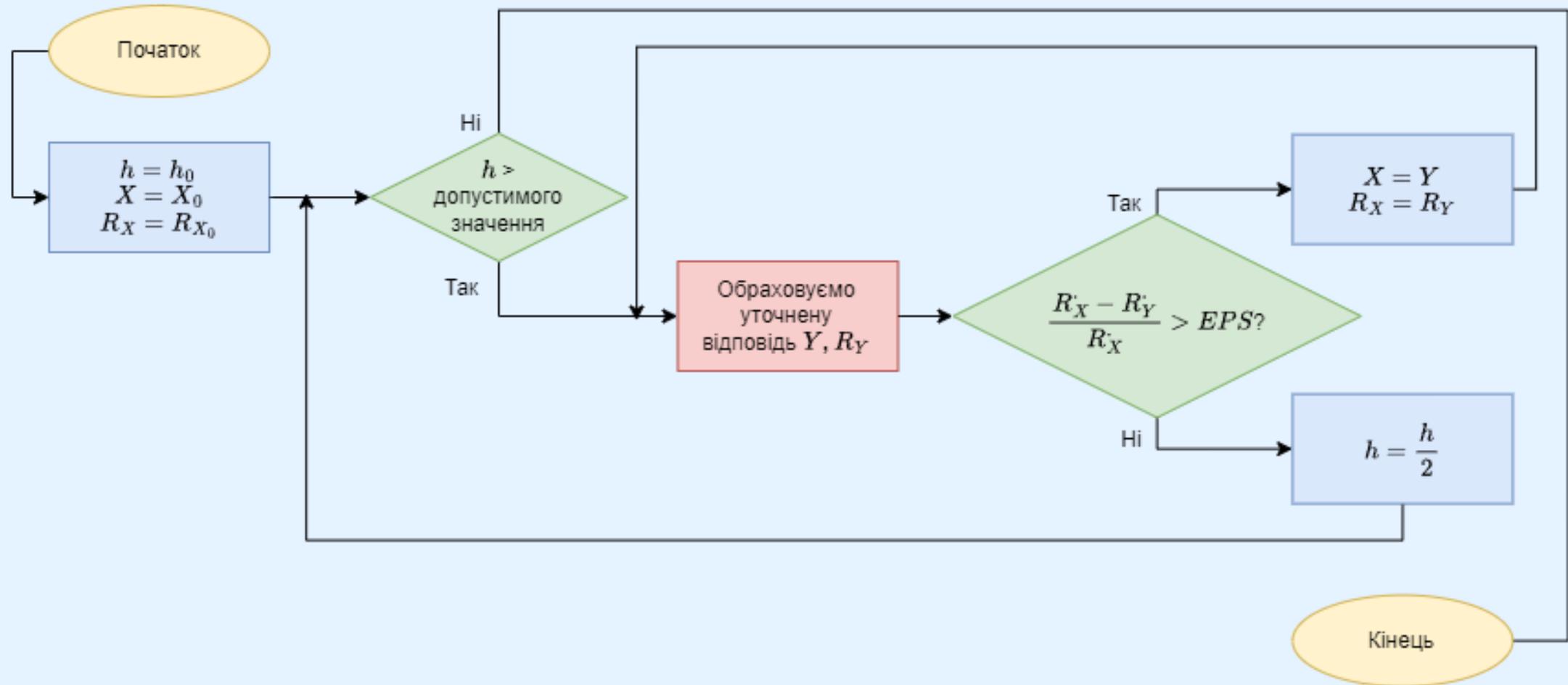
$$\Phi_p(R, x, y) = P_1 \cdot F_1(R, x, y) + P_2 \cdot F_2(x, y) + P_3 \cdot \max\{0, -R + R_{low}\} \quad (6)$$

P_1 , P_2 та P_3 – додатні штрафні коефіцієнти та функції $F_1(R, x, y)$ та $F_2(x, y)$ мають вигляд:

$$F_1(R, x, y) = \sum_{i=1}^N \max\{0, x_i^2 + y_i^2 - (R - r_i)^2\} \quad (7)$$

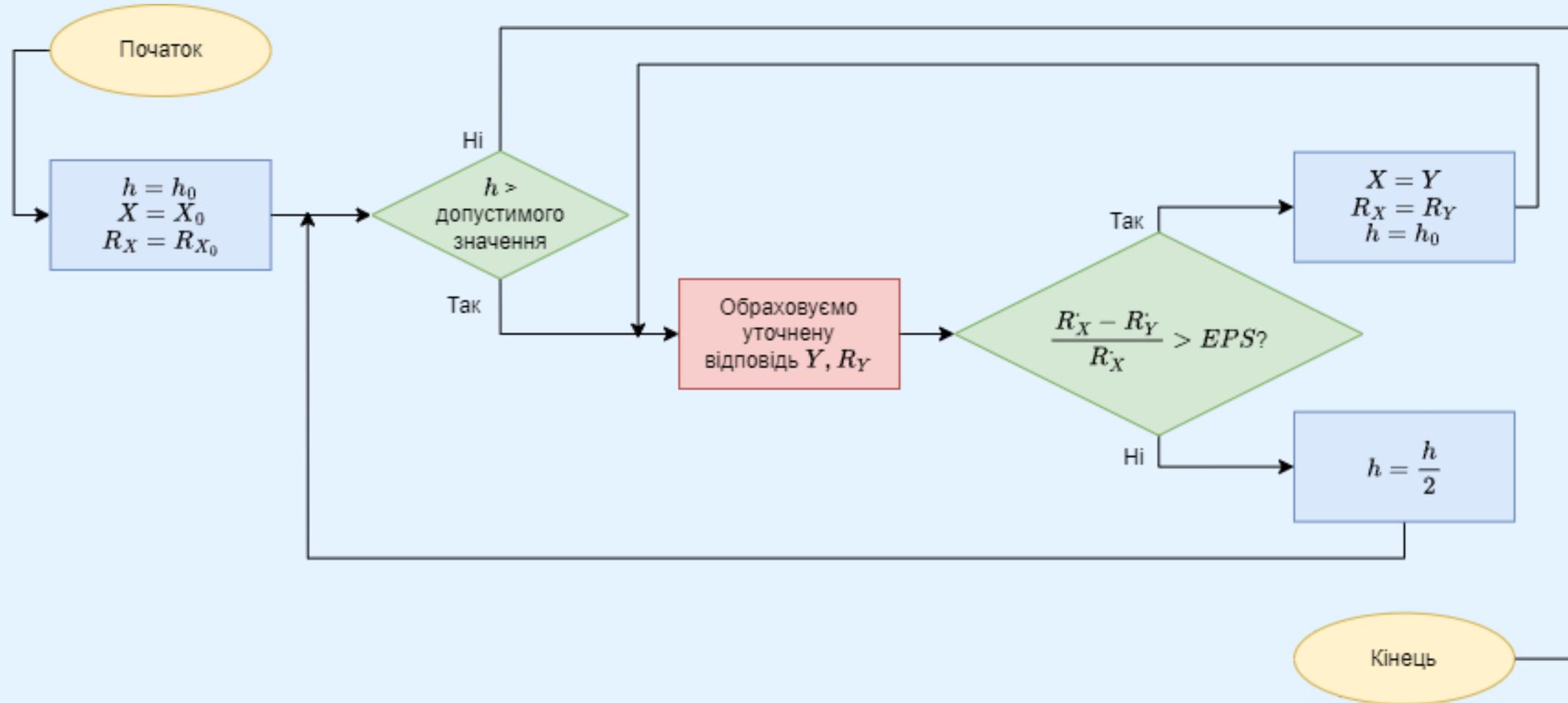
$$F_2(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \max\{0, -(x_i^2 - x_j^2) - (y_i^2 - y_j^2) + (r_i^2 + r_j^2)\} \quad (8)$$

Уточнення локального екстремуму (варіант 1, зі статті)



де EPS - відсоток відносного покращення

Уточнення локального екстремуму (варіант 2, новий)



де EPS - відсоток відносного покращення

Порівняння двох варіантів покращення

Варіант	1	2	1	2	1	2	1	2
<i>EPS</i>	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	0	0
Кількість балів	4876	4882	4888	4894	4891	4895	4890	4895
Час (секунди)	48	84	67	151	78	219	84	261
Покращення (в балах)	44	50	56	62	59	63	58	63

Без покращень - 4832 бали (7 секунд)

Висновки

Отримані результати свідчать про **ефективність обох варіантів покращення результатів** за допомогою **r-алгоритму Шора** для задачі упаковки кругів. Другий варіант показує кращі результати, але за довший час. Зменшення EPS приводить до суттєвих покращень результатів, проте теж вимагає більше часу. Обираючи відповідне значення EPS можна отримати бажане покращення відповідно до часових обмежень.

Джерела

1. Конкурс. URL: <https://packing-circles.eolymp.io/>
2. Задорожний Б.О., Міца О.В., Стецюк П.І. Про покращення евристичного алгоритму упаковки кругів в круг мінімального радіусу. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2023. 2. С. 32–45.
<https://doi.org/10.34229/2707-451X.23.2.4>

Дослідження підтримано грантом
Volkswagen Foundation № 97775

ДЯКУЄМО ЗА УВАГУ!

email: bohzador@gmail.com, stetsyukp@gmail.com