

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію **Стовби Віктора Олександровича «Субградієнтний метод з кроком Поляка у перетвореному просторі»**, подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю **113 Прикладна математика**

Актуальність теми дисертації. Мінімізація негладких яружних функцій є складною задачею для багатьох методів. Наприклад, класичний субградієнтний метод з кроком Поляка для знаходження наближення до точки мінімуму функції, що залежить від десятків тисяч змінних та не є яружною потребує лише декількох десятків ітерацій. Якщо ж здійснити розтяг поверхонь рівня функції, що залежить від двох-трьох змінних, за декількома напрямками кількість ітерацій методу значно зросте. Отже, актуальною задачею є розробка методів, що використовують перетворення простору для покращення властивостей функції.

Дисертаційна робота **Стовби Віктора Олександровича «Субградієнтний метод з кроком Поляка у перетвореному просторі»** присвячена дослідженню субградієнтного методу з кроком Поляка та його модифікацій для знаходження наближення до точки мінімуму яружної опуклої функції. Одержані в ній результати розвивають теорію субградієнтних методів, розширюють та доповнюють відомі результати, отримані **Б. Т. Поляком, М. Г. Журбенком, І. І. Єрьоміним, Н. З. Шором, П. І. Стецюком** та іншими. Зокрема, **М. Г. Журбенком** та **П. І. Стецюком** досліджувались методи мінімізації негладких функцій з використанням операції перетворення простору, яка розвивалась в роботах **Н.З. Шора**. В субградієнтному методі з кроком Поляка, що використовує одноразове перетворення простору на кожній ітерації, оцінка швидкості збіжності методу залишалась недостатньо дослідженою. Дисертантом обґрунтовано оцінки збіжності модифікацій класичного субградієнтного методу з кроком Поляка, побудованих з використанням операції перетворення простору та скалярного параметра $m \geq 1$ у випадку довільної опуклої функції та опуклої функції з гострим мінімумом.

Наукова новизна дисертації. До винесених на захист результатів, що мають наукову новизну, варто віднести:

1. теореми про збіжність субградієнтного методу з кроком Поляка у початковому та перетвореному просторах змінних і скалярним параметром $m \geq 1$ для різних класів опуклих функцій;
2. алгоритм методу еліпсоїдів для розв'язання задачі лінійної регресії при довільному значенні параметра $p \geq 1$ в нормі L_p ;
3. алгоритм на основі метода еліпсоїдів Юдіна-Неміровського для знаходження L_p -розв'язків систем лінійних рівнянь з двосторонніми обмеженнями на змінні.

Аналіз змісту дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 131 найменування, та п'яти додатків, які містять програмний код та лістинг тестових прикладів, проведених з використанням запропонованих модифікацій методу, а також перелік наукових публікацій за темою роботи і відомості про апробацію результатів. Повний обсяг роботи складає 186 сторінок друкованого тексту.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, висвітлено наукову новизну, теоретичне та практичне значення, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

У першому розділі дисертації наведено огляд літератури, в якому згадано досить велику кількість робіт, присвячених широкому колу питань, пов'язаних з розвитком методів негладкої та опуклої оптимізації, в тому числі методів з перетворенням простору. Це вказує на обізнаність автора в тематиці, якій присвячена дисертація.

Основні результати роботи подано в другому, третьому і четвертому розділах.

У другому розділі досліджено субградієнтний метод з кроком Поляка та його модифікацію скалярним параметром $m > 1$ для знаходження точки мінімуму яружної опуклої функції з відомим мінімальним значенням. Доведено, що швидкість збіжності запропонованого методу рівна $O(1/\sqrt{k})$ (де k – кількість ітерацій), у випадку мінімізації довільної опуклої функції та швидкості геометричної прогресії зі знаменником $q = 1 - \left(\frac{m\alpha}{C}\right)^2$, де C – константа, що обмежує норму субградієнта. Результати проведених обчислювальних експериментів з використанням запропонованої модифікації у випадку гладких

та негладких яружних опуклих функцій демонструють ефективність її роботи як порівняти з класичним субградієнтним методом з кроком Поляка.

Основними результатами другого розділу є теорема 2.5 про швидкість збіжності запропонованого методу у випадку довільної опуклої функції та теорема 2.6 про швидкість збіжності цього методу у випадку опуклої функції з гострим мінімумом.

У третьому розділі дисертації досліджено модифікацію класичного субградієнтного методу з кроком Поляка, яка використовує одноразове перетворення простору. Обґрунтовано швидкість збіжності цієї модифікації методу (теореми 3.2 і 3.3) для випадків довільної опуклої функції та опуклої функції з гострим мінімумом, які є аналогами теорем 2.5 і 2.6 розділу 2. Вивчено також застосування операції перетворення простору в комбінації з параметром $m > 1$; для такої модифікації доведено аналогічні теореми щодо швидкості збіжності (теореми 3.5 і 3.6). Обґрунтовано монотонне зменшення відстані до точки мінімуму в усіх запропонованих модифікаціях (теореми 3.1 і 3.4). Розроблено програмну реалізацію досліджених методів мовою C++. Проведено обчислювальні експерименти для низки гладких та негладких яружних опуклих функцій, в тому числі функцій, що залежать від великої кількості вхідних змінних, з використанням усіх модифікацій. Отримані результати експериментів показують значне скорочення кількості ітерацій цих методів порівняно з класичним методом Поляка.

Четвертий розділ присвячений розробці нових алгоритмів на основі методу еліпсоїдів Шора та Юдіна-Неміровського для розв'язання задач різного типу, які можна сформулювати як задачі мінімізації. Зокрема, досліджено задачу визначення параметрів лінійної регресії, яку можна сформулювати як задачу мінімізації негладкої функції, що являє собою L_p -норму нев'язки системи лінійних рівнянь. Для цієї задачі дисертантом розроблено алгоритм методу еліпсоїдів, який дозволяє розв'язувати її для довільних (в тому числі великих) значень параметра $p \geq 1$. Також для задачі знаходження L_p -розв'язку систем лінійних рівнянь з двосторонніми обмеженнями на змінні запропоновано алгоритм та основі методу еліпсоїдів Юдіна-Неміровського.

Основні результати, що виносяться на захист, є новими і змістовними. Сформульовані висновки дисертації відповідають змісту роботи.

Обґрунтованість та достовірність положень, висновків та рекомендацій. Дисертація виконана на високому науковому рівні з

використанням методів лінійної алгебри, математичного та функціонального аналізу. Достовірність та обґрунтованість результатів дисертаційної роботи забезпечується строгими доведеннями основних тверджень, які з достатньою повнотою наведені в дисертації. Теоретичне обґрунтування розроблених методів підтверджується обчислювальними експериментами.

Повнота викладу в опублікованих працях. Результати дисертації достатньо повно викладено в 7 публікаціях, з яких 2 наукові статті опубліковано у фахових виданнях. Одну статтю англійською мовою опубліковано в зарубіжному виданні, яке входить до наукометричної бази Scopus (Q3), тому, згідно з вимогами МОН, зараховується за дві. Одна робота опублікована як розділ колективної монографії і зараховується як стаття у науковому фаховому виданні з категорією Б (згідно з вимогами МОН). Робота повністю відповідає вимогам щодо кількості публікацій за темою дисертації, а також об'єму та оформлення дисертаційних робіт. Дисертація пройшла апробацію на 9 наукових конференціях та семінарах.

Мова та стиль дисертації. Дисертація написана грамотною літературною державною мовою, матеріал викладений у доступному для фахівців вигляді. Робота добре структурована, повнота аргументації дають змогу все зрозуміти. Текст дисертації оформлено згідно чинних вимог МОН України.

Теоретичне та практичне значення результатів. Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, що має теоретичний та практичний характер. Її результати є внеском в розвиток теорії субградієнтних методів і можуть бути використані для розробки методів машинного навчання, розв'язання задач обробки великих об'ємів даних тощо.

Критичні зауваження та побажання. За змістом роботи можна зробити такі зауваження:

1. В огляді феєрівських методів слід було навести означення феєрівської властивості.
2. В доведенні теореми 2.5 присутні описки. В одному місці замість збіжності слід говорити про збіжність до нуля. Не вказано, що числова послідовність $(f(x_k) - f^*)$ збіжна до нуля через збіжність ряду $\sum_k (f(x_k) - f^*)^2$. А без цього в доведенні асимптотики $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} (f(x_k) - f^*) = 0$ та оцінки $O(1/\sqrt{k})$ є прогалина.
3. В доведенні теореми 3.2 ситуація подібна до описаної в зауваженні 2.

4. В ситуації теорем 2.5 та 3.2 автор не вказав, що породжена методом послідовність є збіжною до розв'язку. Це впливає з феєрівської властивості.
5. Для задач регресії корисно було б провести дослідження модифікацій алгоритмів з використанням «міні-батчів» замість обчислення повних субградієнтів.

Зроблені зауваження не зменшують загальної позитивної оцінки дисертаційної роботи.

Загальний висновок. Зважаючи на зазначене, вважаю, що дисертаційна робота «Субградієнтний метод з кроком Поляка у перетвореному просторі» за науковим рівнем досліджень, її актуальністю, науковою новизною відповідає вимогам пунктів 9, 10, 11, 12 Постанови Кабінету Міністрів України №167 «Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії» від 6 березня 2019 року зі змінами, внесеними згідно з Постановою Кабінету Міністрів України №979 від 21 жовтня 2020 року, а її автор Стовба Віктор Олександрович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Офіційний опонент,
професор кафедри обчислювальної математики
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
доктор фізико-математичних наук, професор



В. В. Семенов

Підпис засвідчує
ВЧЕНН СЕКРЕТАР НАЧ
КАРАУЛЬНА Н.В.
27.04.2021р.



Надійшов 27.04.2021р.