ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Стовби Віктора Олександровича
«Субградієнтний метод з кроком Поляка у перетвореному просторі»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 113 Прикладна математика

Актуальність теми. Існує багато практичних і суто математичних задач, які приводять до необхідності розв'язання задач оптимізації функції, що не є диференційованими. До таких задач можна віднести задачі керування, або оцінювання та ідентифікації, які розглядаються в межах гарантованого чи мінімаксного підходів. В рамках цих підходів передбачається, що невизначені величини, до яких відносяться завади вимірювань, неконтрольовані збурення, невідомі параметри, початкові значення вектору стану динамічних систем, задаються тільки множинами їх можливих значень. Стохастичні характеристики цих величин невідомі. За таких умов задачі керування чи оцінювання цілком природно приводяться до задач оптимізації недиференційованих функцій. Одним із найбільш поширеним методом оптимізації недиференційованих функцій є субградієнтний метод. Розвиток субградієнтних методів мінімізації опуклих функцій є важливим напрямком дослідження сучасної оптимізації. Зусилля вчених при цьому направлені на підвищення ефективності цих методів, перш за все їх швидкості збіжності та точності. Субградієнтний метод з кроком Поляка у вихідному просторі змінних, який було запропоновано Б.Т. Поляком та розвинуто І.І. Єрьоміним, а згодом у перетвореному просторі – Н.З. Шором, М.Г. Журбенком та П.І. Стецюком є одним із ефективних методів розв'язання задач мінімізації недиференційованих функцій. Але, як і градієнтному методі мінімізації, йому притаманна невелика швидкість збіжності. Збільшення цієї характеристики метода є одним із основних і важливих завдань розвинення цього методу.

В дисертаційної роботі В.О. Стовби запропонована модифікація субградієнтного методу з кроком Поляка, яка полягає у збільшенні цього кроку на скалярний множник $m \geq 1$ для збільшення швидкості збіжності. Проведено дослідження властивостей цього методу, у тому числі обґрунтовано застосування запропонованого методу у перетвореному просторі змінних для довільних опуклих функцій та опуклих функцій з гострим мінімумом. Отже тема дисертаційної роботи В.О. Стовби є, безумовно, актуальною.

Основні наукові результати роботи. Дисертаційна робота В.О. Стовби складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і п'яти додатків. Також вона містить анотації українською та англійською мовами.

У вступі обґрунтовується актуальність теми дослідження, наукова новизна та теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Також висвітлено особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

У першому розділі наведено огляд літератури за темою дисертації, а також вказано основні напрямки досліджень.

У другому розділі досліджено субградієнтний метод з кроком Поляка та його модифікацію скалярним параметром $m>1$

$$x_{k+1}=x_k-h_k\frac{g_f(x_k)}{\|g_f(x_k)\|},\quad h_k=\frac{m\left(f(x_k)-f^*\right)}{\|g_f(x_k)\|} \tag{1}$$

для знаходження точки мінімуму яружної опуклої функції $f(x), x\in R^n$, з відомим мінімальним значенням $f^*=f(x^*)$. Доведено, що швидкість збіжності методу (1) рівна $O\left(1/\sqrt{k}\right)$ (де k –кількість ітерацій), у випадку мінімізації довільної опуклої функції та швидкості геометричної прогресії зі знаменником $q=1-\left(\frac{m\alpha}{C}\right)^2$, де C – константа, що обмежує норму субградієнта $g_f(x)$ функції $f(x)$.Проведено низку обчислювальних експериментів з використанням запропонованої модифікації, які демонструють ефективність її роботи порівняно з класичним методом Поляка.

Основними результатами другого розділу є теорема 2.5 про швидкість збіжності запропонованого методу у випадку довільної опуклої функції та теорема 2.6 про швидкість збіжності цього методу у випадку опуклої функції з гострим мінімумом.

У третьому розділі отримано результати, аналогічні до наведених у теоремах 2.5 та 2.6 для субградієнтного методу з кроком Поляка у перетвореному просторі змінних (теореми 3.2 і 3.3) та параметром $m>1$ (теореми 3.5 та 3.6). Також обґрунтовано монотонне зменшення відстані до точки мінімуму в запропонованих модифікаціях цього методу (теореми 3.1 і 3.4). Проведено обчислювальні експерименти для порівняння роботи всіх запропонованих модифікацій з класичним методом Поляка для набору гладких та негладких опуклих функцій, в тому числі функцій, що залежать від великої кількості вхідних змінних.

У четвертому розділі досліджено задачу розв'язання систем лінійних рівнянь різного типу та задачу знаходження параметрів лінійної регресії. Останню задачу можна сформулювати як задачу мінімізації негладкої функції, що являє собою L_p-норму нев'язки системи лінійних рівнянь. Для цієї задачі розроблено алгоритм методу еліпсоїдів, який дозволяє розв'язувати її для довільних (в тому числі великих) значень параметра $p \geq 1$. Запропоновано алгоритм та основі методу еліпсоїдів Юдіна-Неміровського для знаходження L_p-розв'язку систем лінійних рівнянь з двосторонніми обмеженнями на змінні.

У п'ятому розділі розроблено програмну реалізацію класичного та модифікованого перетворенням простору та параметром $m \geq 1$ субградієнтного методу з кроком Поляка мовою С++. Наведено також програмний код і детальний опис усіх допоміжних функцій та процедур для запуску та регулювання вхідних параметрів запропонованих методів.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації В.О. Стовби вперше одержано такі результати:

- обґрунтовано швидкість збіжності субградієнтного методу з кроком Поляка та параметром $m > 1$ для довільних опуклих функцій ($O\left(1/\sqrt{k}\right)$, k – кількість ітерацій) та опуклих функцій з гострим мінімумом (геометрична прогресія зі знаменником $q_1 = 1 - \left(\frac{m\alpha}{C_1}\right)^2$, де $C_1 \geq \left\|g_f(x)\right\|$, $\alpha \leq \left(f(x) - f^*\right) / \left\|x - x^*\right\|$);
- обґрунтовано монотонне зменшення відстані до точки мінімуму для субградієнтного методу з кроком Поляка у перетвореному просторі змінних та параметром $m > 1$;
- обґрунтовано швидкість збіжності субградієнтного методу з кроком Поляка у перетвореному просторі змінних та параметром $m > 1$ для довільних опуклих функцій ($O\left(1/\sqrt{k}\right)$) та опуклих функцій з гострим мінімумом

(геометрична прогресія зі знаменником $q_2 = 1 - \left(\frac{m\alpha}{C_2}\right)^2$, де $C_2 \ge \|g_\varphi(y)\|$, $\alpha \le \left(\varphi(y) - \varphi^*\right) / \|y - y^*\|$, $\varphi(y) = f(Bx)$, $x = By$);

- побудовано алгоритм типу методу еліпсоїдів для розв'язання задачі визначення параметрів лінійної регресії шляхом мінімізації L_p-норму нев'язки з заданою точністю при довільному значенні параметра $p \ge 1$;
- побудовано алгоритм на основі методу еліпсоїдів Юдіна-Неміровського для знаходження L_p-розв'язків систем лінійних рівнянь з двосторонніми обмеженнями на змінні.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний та практичний характер. Її результати можуть бути використані для розв'язання задач обробки великих об'ємів даних, розробки методів машинного навчання, технологій штучного інтелекту тощо.

Усі результати, що виносяться на захист, є новими, математично обґрунтованими. Висновки відповідають змісту дисертації.

Результати дисертаційної роботи В.О. Стовби з достатньою повнотою викладено в 12 публікаціях, з яких: 2 наукові статті опубліковано у виданнях, що входять до переліку фахових видань за спеціальністю 113 Прикладна математика, 1 статтю англійською мовою в зарубіжному виданні, яке індексується в наукометричній базі Scopus, 1 роботу опубліковано як розділ колективної монографії, та 5 тезах наукових конференцій. Дисертація відповідає встановленим вимогам щодо кількості публікацій за темою дисертації у фахових виданнях, а також щодо об'єму та оформлення дисертаційних робіт.

Критичні зауваження та побажання.

1. На с. 62-66 так і не прозвучало явно, навіщо нам переходити в перетворений простір, що нам дає ця мінімізація в перетвореному просторі, які переваги – більш висока швидкість збіжності, точність? Це потребує обґрунтування та пояснення.
2. Варто було б вказати механізм побудови чи підбору матриці перетворення простору залежно від типу функції, що мінімізується.
3. На с. 79-81 розглядається приклад 3.4, в якому наведено результати мінімізації функції від 1000 змінних. У таблиці 3.4 можна бачити, що

збіжність до мінімуму з високою точністю відбувається за 2-5 ітерацій. Незрозуміло, як можна пояснити такий гарний результат?

4. У теоремі 4.3, а також в теоремі 4.2 мова йде про прагнення до нуля об'ємів еліпсоїдів. Як цей факт пов'язано зі збіжністю послідовності наближень до точки мінімуму або зі збіжністю значень функцій на цій послідовності до мінімального значення функції, що мінімізується?
5. Доволі дивна логіка викладання матеріалу досліджень – задача про розв'язання системи лінійних рівнянь, яку було сформульовано в підрозділі 4.1, розглядається тільки в підрозділі 4.4.
6. На с. 38 не дуже вдало згадуються вчені, які зробили значний внесок в розвиток методів оцінювання параметрів. Краще було б розташувати їх прізвища у такому порядку: «Б.Т. Поляк, О.Г. Наконечний, В.В. Волосов та інші.». Доречно було б додати більше прізвищ у цей список, у тому числі закордонних вчених.

Висновок. Зазначені зауваження не мають принципового характеру і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації. За актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень, новизною і науковою цінністю отриманих результатів дисертаційна робота Стовби Віктора Олександровича «Субградієнтний метод з кроком Поляка у перетвореному просторі» задовольняє вимогам Постанови КМУ від 06.03.2019 р. №167 «Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії» зі змінами, внесеними згідно з Постановою КМУ №979 від 21.10.2020 р., а її автор – Стовба Віктор Олександрович – заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Офіційний опонент:
провідний науковий співробітник
відділу «Керування динамічними системами»
Інституту космічних досліджень НАН України і ДКА України,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник Сальніков М.М.

Підпис Сальнікова М.М. засвідчую
Вчений секретар
ІКД НАН України і ДКА України
к.т.н., с.н.с. Ніжніченко О.О.

УКРАЇНА
ІНСТИТУТ КОСМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ ТА ДЕРЖАВНОГО КОСМІЧНОГО АГЕНТСТВА УКРАЇНИ
Ідентифікаційний код 22971655
м. КИЇВ

Надійшов 26.04.2021 р