

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. В. Семенов

Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми

Підручник

УДК 517.97:519.6(075.8)

С30

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. О. О. Покутний

(Інститут математики НАН України);

д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. С. С. Зуб

(Національний науковий центр «Інститут метрології»)

Рекомендовано до друку

вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики

(протокол № 10 від 8 лютого 2021 року)

Семенов В. В.

С30 Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми : підручник /
В. В. Семенов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2021. – 167 с.

ISBN 978-966-933-090-1

Викладено елементи теорії варіаційних нерівностей та популярні сучасні алгоритми пошуку їх розв'язків. Окрема частина присвячена алгоритмам апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів. Основна увага приділена доведенню збіжності алгоритмів. Майже весь матеріал розповідався у 2015–2020 рр. на лекціях для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Для студентів університетів, що спеціалізуються у математичному моделюванні, оптимальному керуванні, математичному програмуванні та обчислювальній математиці.

УДК 517.97:519.6(075.8)

ISBN 978-966-933-090-1

© Семенов В. В., 2021

© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2021

ЗМІСТ

Передмова	5
Розділ 1. Попередні відомості	6
1.1. Метрична проекція на замкнену опуклу множину	6
1.2. Навколо теореми Брауера	12
1.3. Опуклість чебишовських множин	23
1.4. Леми про послідовності	26
1.5. Задачі	28
Розділ 2. Вступ до теорії варіаційних нерівностей	32
2.1. Варіаційні нерівності в \mathbb{R}^n	32
2.2. Варіаційні нерівності в гільбертовому просторі	38
2.3. Апроксимація Браудера–Тихонова	42
2.4. Проксимальний метод	45
2.5. Задачі	47
Розділ 3. Основні методи розв’язання варіаційних нерівностей	48
3.1. Найпростіший проекційний метод	51
3.2. Екстраградієнтний метод Корпелевич	63
3.3. Метод екстраполяції з минулого	66
3.4. Модифікований екстраградієнтний метод Tseng’a	69
3.5. Субградієнтний екстраградієнтний метод	78
3.6. Задачі	80
Розділ 4. Модифіковані екстраградієнтні методи	82
4.1. Попередні відомості та допоміжні твердження	83
4.2. Модифікований екстраградієнтний алгоритм для варіаційних нерівностей	84

- 4.3. Модифікований екстраградієнтний алгоритм для варіаційних нерівностей та операторних рівнянь з апіорною інформацією . . . 91
- 4.4. Сильно збіжний модифікований екстраградієнтний алгоритм . . . 94
 - 4.4.1. Варіант для варіаційних нерівностей 94
 - 4.4.2. Варіант для задач з апіорною інформацією 105

Розділ 5. Алгоритм розщеплення для варіаційних нерівностей 111

- 5.1. Попередні відомості та постановка задачі 112
- 5.2. Алгоритм розщеплення 114
- 5.3. Основні оцінки 115
- 5.4. Теореми збіжності алгоритму 117
 - 5.4.1. Ергодична слабка збіжність алгоритму 117
 - 5.4.2. Сильна збіжність 118
- 5.5. Заключні коментарі 121
- 5.6. Задачі 122

Розділ 6. Алгоритм з відстанню Бреґмана для розв'язання

- задач рівноважного програмування 123**
- 6.1. Постановка задачі 124
- 6.2. Відстань Бреґмана та алгоритм 125
- 6.3. Аналіз збіжності 129
- 6.4. Задачі 135

Розділ 7. Апроксимація нерухомих точок нерозтягуючих

- операторів 136**
- 7.1. Теорема Браудера 137
- 7.2. Ергодична теорема Байона 142
- 7.3. Метод Красносельського–Манна 145
- 7.4. Метод Гальперна 147
- 7.5. Гібридний метод 154
- 7.6. Метод стиснення 156
- 7.7. Задачі 158

Література 161

Передмова

Теорія та алгоритми оптимізації є важливою частиною арсеналу сучасного прикладного математика. У посібнику розглянуто елементи теорії варіаційних нерівностей та популярні алгоритми пошуку їх розв'язків. Варіаційні нерівності є зручною загальною формою запису та дослідження різних задач. Зокрема, у вигляді варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі математичного програмування, сідлові задачі та задачі знаходження точок рівноваги Неша.

Ця невелика книга є розширеним конспектом лекцій для студентів спеціальності «Прикладна математика» факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Матеріал вивчався в рамках дисципліни «Проблеми та методи оптимізації».

Попередні знання, які вимагаються для розуміння матеріалу, відповідають тому середньому рівню, що досягається після трьох років навчання на факультетах комп'ютерних наук, кібернетики та прикладної математики класичних університетів України. Ряд необхідних результатів з функціонального аналізу наведено у розділі 1. Крім того, розділ 7 містить замкнений нарис метричної теорії нерухомих точок та основні методи апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів. Це викликано тим, що дані методи легко модифікуються до більш спеціалізованих алгоритмів.

Автор глибоко вдячний колегам і студентам за плідні дискусії та зауваження щодо змісту, передусім Юрію Маліцькому та Юрію Гончаренку.

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (0119U100337, «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, екології та медицини», 2019–2021) та НАН України (0119U101608, «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», 2019–2020).

Зауваження та побажання можна надсилати електронною поштою:

`semenov.volodya@gmail.com`.

Київ, 25 січня 2021

В. В. Семенов

Розділ 1

Попередні відомості

Наведено необхідні результати з функціонального аналізу. Крім того, розділ містить фундаментальні теореми Брауера, Шаудера та Какутані про нерухомі точки.

1.1. Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Нехай H — дійсний гільбертовий простір зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) та нормою $\|\cdot\|$. Сильну збіжність позначатимемо через \rightarrow , а слабку — \rightharpoonup .

Теорема 1.1. *Нехай $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина. Тоді для будь-якого елемента x простору H в C існує єдиний найближчий до x елемент. Іншими словами, існує єдиний елемент $z \in C$, для якого*

$$\|z - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|.$$

Перше доведення. Нехай $z_k \in C$ — мінімізуюча послідовність, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - x\| = d = \inf_{y \in C} \|y - x\|. \quad (1.1)$$

За правилом паралелограма (елементарний наслідок властивостей скалярного добутку)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in H,$$

можемо записати

$$\|z_k - z_l\|^2 = 2\|x - z_k\|^2 + 2\|x - z_l\|^2 - 4 \left\| x - \frac{z_k + z_l}{2} \right\|^2. \quad (1.2)$$

З опуклості C випливає $\frac{1}{2}z_k + \frac{1}{2}z_l \in C$, тому

$$d^2 \leq \left\| x - \frac{z_k + z_l}{2} \right\|^2.$$

Отже,

$$\|z_k - z_l\|^2 \leq 2\|x - z_k\|^2 + 2\|x - z_l\|^2 - 4d^2.$$

З (1.1) випливає, що $\lim_{k,l \rightarrow \infty} \|z_k - z_l\| = 0$.

Оскільки простір H повний, множина C замкнена, то існує елемент $z \in C$ такий, що $z_k \rightarrow z$. Крім того,

$$\|z - x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - x\| = d.$$

Для доведення єдиності найближчого елемента слід тільки зазначити, що після підстановки в (1.2) замість z_k і z_l довільних двох елементів $z, z' \in C$, які задовольняють $\|z - x\| = \|z' - x\| = d$, одержимо

$$\|z - z'\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|x - z'\|^2 - 4\left\| x - \frac{z + z'}{2} \right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

звідки випливає, що $z = z'$. □

Друге доведення. Оскільки $d(x, C) = \inf_{y \in C} \|y - x\| = d(0, C - x)$, то теорему достатньо довести для випадку $x = 0$. Позначимо $d(0, C)$ через d і розглянемо множини

$$C_n = \left\{ y \in C : \|y\| \leq d + \frac{1}{n} \right\}.$$

Перетин усіх C_n — це множина елементів, які розташовані на відстані d від нуля. Отже, потрібно довести, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ складається з однієї точки. Скористаємось принципом вкладених множин. Множини C_n утворюють спадний ланцюг опуклих замкнених множин. Потрібно показати, що $\text{diam} C_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Для $x, y \in C_n$ маємо:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \leq \\ &\leq 2 \left(\left(d + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(d + \frac{1}{n} \right)^2 - 2d^2 \right) = \frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Отже, $\text{diam} C_n \leq \sqrt{\frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). □

Теорема 1.1 дозволяє коректно ввести оператор P_C метричного проектува-

ння (проекції) простору \mathbf{H} на опуклу замкнену множину $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{H}$, який ставить у відповідність елементу $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ єдиний елемент $\mathbf{P}_\mathbf{C}\mathbf{x} \in \mathbf{C}$, для якого

$$\|\mathbf{P}_\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \quad (1.3)$$

Оператор $\mathbf{P}_\mathbf{C}$ можна охарактеризувати таким чином.

Теорема 1.2. *Нехай $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{H}$ — опукла замкнена множина, $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{C}$. Такі умови рівносильні:*

$$1) \mathbf{z} = \mathbf{P}_\mathbf{C}\mathbf{x}.$$

$$2) (\mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}.$$

$$3) \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}.$$

Доведення. Рівносильність 2) та 3) випливає з тотожності

$$2(\mathbf{z} - \mathbf{y}, \mathbf{z} - \mathbf{x}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Доведемо рівносильність 1) та 2). Нехай $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ і $\mathbf{z} = \mathbf{P}_\mathbf{C}\mathbf{x}$. Оскільки множина \mathbf{C} опукла, то

$$(1 - t)\mathbf{z} + t\mathbf{y} = \mathbf{z} + t(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \in \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{C} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Унаслідок (1.3) функція

$$\phi(t) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z} - t(\mathbf{y} - \mathbf{z})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 - 2t(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) + t^2 \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2$$

досягає мінімуму в точці $t = 0$. Це означає, що $\frac{d}{dt}\phi(0) \geq 0$, тобто $(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \leq 0$ для всіх $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$, або $(\mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \geq 0$ для всіх $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$. З іншого боку, якщо $\mathbf{z} \in \mathbf{C}$ і $(\mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \geq 0$ при $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$, то

$$0 \leq (\mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{z}) = -\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Отже, $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \leq (\mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ і тим самим $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}$, тобто $\mathbf{z} = \mathbf{P}_\mathbf{C}\mathbf{x}$. \square

З теореми 1.2 випливає, що оператор метричного проектування $\mathbf{P}_\mathbf{C}$ нерозтягуючий, тобто

$$\|\mathbf{P}_\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{P}_\mathbf{C}\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}.$$

Для деяких опуклих замкнених множин C відомі явні формули обчислення проєкції P_C . Наприклад, для кулі

$$B(x_0, R) = \{y \in H : \|y - x_0\| \leq R\}$$

та $x \notin B(x_0, R)$ маємо

$$P_{B(x_0, R)}x = x_0 + R \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|},$$

а для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$ ($x_0 \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$) проєкція P_Lx обчислюється за формулою

$$P_Lx = x + (c - (x_0, x)) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Розглянемо скінченний набір замкнених опуклих множин C_1, C_2, \dots, C_r . Для $x_0 \in H$ визначимо послідовність (x_n) за таким правилом:

$$x_0 \xrightarrow{P_{C_1}} x_1 \xrightarrow{P_{C_2}} x_2 \xrightarrow{P_{C_3}} x_3 \xrightarrow{P_{C_4}} \dots \xrightarrow{P_{C_r}} x_r \xrightarrow{P_{C_1}} x_{r+1} \xrightarrow{P_{C_2}} \dots, \quad (1.4)$$

тобто

$$x_{n+1} = P_{C_{n \bmod r+1}} x_n.$$

Має місце

Теорема 1.3 (Л. Бреґман¹). *Нехай $C_1, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином. Тоді*

$$x_n \rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Нехай $x \in \bigcap_{i=1}^r C_i$. Позначимо через (y_k^i) підпослідовність (x_{kr+i}) , де $i \in \{1, \dots, r\}$. Із означення метричної проєкції випливають нерівності

$$\|x_0 - x\| \geq \|x_1 - x\| \geq \|x_2 - x\| \geq \|x_3 - x\| \geq \dots \geq 0.$$

Отже, послідовність (x_n) обмежена та існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$. Зокрема, обмеженою є послідовність (y_k^1) . Тому існує така підпослідовність $(y_{k_l}^1)$, що $y_{k_l}^1 \rightarrow \bar{x} \in H$ ($l \rightarrow \infty$). Оскільки $y_{k_l}^1 \in C_1$, а множина C_1 слабо замкнена, то $\bar{x} \in C_1$.

¹Лев Меєрович Бреґман (Lev M. Bregman, нар. 31 січня 1941, Ленінград) — радянський та ізраїльський математик. Автор поняття дивергенція Бреґмана. Закінчив у 1963 році Ленінградський університет та працював у ньому до 1991-го. Кандидатську дисертацію захистив у 1966 році. Розробив релаксаційний метод знаходження спільної точки опуклих множин та застосував його для розв'язання задач опуклого програмування. Емігрував до Ізраїлю у 1991 році.

Для $\mathbf{y}_{k_l}^2 = P_{C_2} \mathbf{y}_{k_l}^1$ маємо

$$\|\mathbf{y}_{k_l}^1 - \mathbf{y}_{k_l}^2\|^2 \leq \|\mathbf{y}_{k_l}^1 - \mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}_{k_l}^2 - \mathbf{x}\|^2.$$

Тому $\lim_{l \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_{k_l}^1 - \mathbf{y}_{k_l}^2\| = 0$. Звідси $\mathbf{y}_{k_l}^2 \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$. Отримали, що $\bar{\mathbf{x}} \in C_2$. Продовжуючи аналогічно, доходимо висновку, що має місце включення $\bar{\mathbf{x}} \in \bigcap_{i=1}^r C_i$. Залишилось показати, що вся послідовність (\mathbf{x}_n) слабо збігається до $\bar{\mathbf{x}}$. Доводимо від супротивного. Припустимо, що (\mathbf{x}_n) не збігається слабо до $\bar{\mathbf{x}}$. Тоді існує така підпослідовність (\mathbf{x}_{n_j}) , що

$$\mathbf{x}_{n_j} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{x}}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Підпослідовність (\mathbf{x}_{n_j}) містить принаймні одну підпослідовність вигляду $(\mathbf{y}_{k_l}^i)$ для деякого $i \in \{1, \dots, r\}$. Міркуючи як і раніше, отримаємо $\tilde{\mathbf{x}} \in \bigcap_{i=1}^r C_i$. Розглянемо числову послідовність

$$\alpha_n = \|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}\|^2 - \|\mathbf{x}_n - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 = \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 + 2(\mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Послідовність (α_n) збіжна. Нехай $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$. З одного боку, розглянувши підпослідовність (α_{n_j}) , отримаємо

$$\alpha = \|\bar{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2.$$

З іншого, розглянувши $(\mathbf{y}_{k_l}^1)$, отримаємо

$$\alpha = -\|\bar{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2.$$

Таким чином, $\alpha = 0$ та $\bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}$. □

Має місце

Теорема 1.4. *Нехай $E_1, \dots, E_r \subseteq H$ — замкнені афінні підпростори з непорожнім перетином. Тоді для всіх $\mathbf{x} \in H$*

$$(P_{E_r} \dots P_{E_2} P_{E_1})^n \mathbf{x} \rightarrow P_{\bigcap_{i=1}^r E_i} \mathbf{x} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Опишемо тепер метод усереднених проєкцій знаходження спільної точки скінченного набору замкнених опуклих множин C_1, C_2, \dots, C_r . Для $\mathbf{x}_0 \in H$ будемо послідовність (\mathbf{x}_n) за правилом:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} \mathbf{x}_n. \quad (1.5)$$

Обчислення проєкцій у (1.5) можна організувати паралельно.
Має місце

Теорема 1.5. *Нехай $C_1, C_2, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином, (x_n) — послідовність, побудована методом усереднених проєкцій (1.5). Тоді*

$$x_n \rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Розглянемо гільбертовий простір

$$\mathcal{H} = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_r$$

зі скалярним добутком $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^r \langle x_i, y_i \rangle$. Задамо множини:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathcal{H} : x_i \in C_i \}, \\ \mathcal{D} &= \{ (x, x, \dots, x) \in \mathcal{H} : x \in H \}. \end{aligned}$$

Множина \mathcal{C} — опукла та замкнена, а \mathcal{D} — замкнений лінійний підпростір. Більш того, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ тоді й тільки тоді, коли $\bigcap_{i=1}^r C_i \neq \emptyset$. Неважко переко-
натись у правильності формул:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}} \vec{x} &= (P_{C_1} x_1, P_{C_2} x_2, \dots, P_{C_r} x_r), \\ P_{\mathcal{D}} \vec{x} &= (x, x, \dots, x), \text{ де } x = \frac{\sum_{i=1}^r x_i}{r}. \end{aligned}$$

Для $\vec{x} = (x, x, \dots, x) \in \mathcal{D}$ розглянемо $P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x}$. Маємо

$$P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x} = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x, \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x, \dots, \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x \right).$$

Застосувавши теорему 1.3 для послідовності

$$\vec{x}_{n+1} = P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x}_n, \quad \vec{x}_0 = (x_0, x_0, \dots, x_0) \in \mathcal{H},$$

отримаємо потрібне. □

Зауваження 1.1. Якщо додатково $C_1, C_2, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені афінні підпростори з непорожнім перетином, то

$$x_n \rightarrow P_{\bigcap_{i=1}^r C_i} x_0$$

при $n \rightarrow \infty$, де (x_n) — послідовність, побудована методом усереднених проєкцій (1.5).

1.2. Навколо теореми Брауера

Будемо використовувати позначення:

- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ — одинична куля;
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — одинична сфера.

Нехай $f : X \rightarrow X$ — деяке відображення. Точку $x \in X$ називають нерухомою точкою відображення f , якщо $f(x) = x$. Множину нерухомих точок (fixed points) відображення f позначимо $F(f)$.

Теорема 1.6 (Brouwer², 1912). *Довільне неперервне відображення $f : B^n \rightarrow B^n$ має нерухому точку.*

Наслідок 1.1. *Нехай $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактна опукла множина та $f : K \rightarrow K$ — неперервне відображення. Тоді f має нерухому точку.*

Доведення. Достатньо застосувати теорему 1.6 до відображення $f \circ P_K : B \rightarrow K$, де P_K — метрична проекція на K , B — замкнена куля, що містить K . \square

Наслідок 1.2 (лема про гострий кут). *Нехай неперервна функція $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ має властивість*

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Тоді існує точка $x_0 \in B^n$ така, що $f(x_0) = 0$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $f(x) \neq 0$ для всіх $x \in B^n$. Тоді визначене неперервне відображення

$$x \mapsto -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

кулі B^n у себе. За теоремою Брауера існує точка $x_1 \in B^n$ така, що

$$-\frac{f(x_1)}{\|f(x_1)\|} = x_1.$$

Звідси маємо

$$(f(x_1), x_1) = -\|f(x_1)\| < 0,$$

що, разом із включенням $x_1 \in S^{n-1}$, веде до протиріччя. \square

²Лейтзен Егберт Ян Брауер (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 27.02.1881 — 2.12.1966) — видатний голландський математик. Займався топологією, теорією множин, математичною логікою, теорією міри та комплексним аналізом. Поклав початок новому напрямку в математиці — інтуїціонізму.

Теорему Брауера виведемо з теореми про відсутність ретракції кулі B^n на сферу S^{n-1} .

Означення 1.1. Нехай $A \subseteq X$. Неперервне відображення $r : X \rightarrow A$ називають ретракцією X на A , якщо $r(x) = x$ для всіх $x \in A$.

Теорема 1.7. *Не існує ретракції кулі B^n на сферу S^{n-1} .*

Доведемо теорему 1.7 для випадку гладкого відображення. Перейти до неперервних відображень можна за допомогою апроксимації неперервних відображень гладкими. Дійсно, припустимо, що існує неперервна ретракція

$$r : B^n \rightarrow S^{n-1}.$$

Покажемо, що тоді існує гладка ретракція $r_0 : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Якщо $\|x\| = 1$, то $r(x) = x$. Тому для довільного $\varepsilon_1 > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $\|r(x) - x\| \leq \varepsilon_1$ при $1 - \delta \leq \|x\| \leq 1$. За теоремою Стоуна–Вейерштрасса існують таке гладке відображення $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, що $\|f(x) - (r(x) - x)\| \leq \varepsilon_1$ при $\|x\| \leq 1$, і така гладка функція ψ , що $0 \leq \psi(t) \leq 1$ при $0 \leq t \leq 1$, $\psi(1) = 0$ і $1 - \varepsilon_2 \leq \psi(t)$ при $t^2 \leq 1 - \delta$. Покладемо $g(x) = x + \phi(x)f(x)$, де $\phi(x) = \psi(\|x\|^2)$. Якщо $\|x\| \leq 1 - \delta$, то

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + \phi(x)f(x)\| = \\ &= \|r(x) + \phi(x)(f(x) - r(x) + x) + (\phi(x) - 1)(r(x) - x)\| \geq \\ &\geq \|r(x)\| - \phi(x)\|f(x) - r(x) + x\| - (1 - \phi(x))\|r(x) - x\| \geq \\ &\geq 1 - 1 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdot 2 = 1 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Якщо $1 - \delta \leq \|x\| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + \phi(x)f(x)\| = \\ &= \|x + \phi(x)(f(x) - r(x) + x) + \phi(x)(r(x) - x)\| \geq \\ &\geq \|x\| - \phi(x)\|f(x) - r(x) + x\| - \phi(x)\|r(x) - x\| \geq \\ &\geq 1 - \delta - 1 \cdot \varepsilon_1 - 1 \cdot \varepsilon_1 = 1 - \delta - 2\varepsilon_1. \end{aligned}$$

При $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ маємо $\delta \rightarrow 0$. Тому можна вважати, що $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta \leq \frac{1}{4}$. У цьому випадку $\|g(x)\| \geq \frac{1}{4} > 0$ для всіх $x \in B^n$. Якщо $\|x\| = 1$, то $\phi(x) = 0$ і $g(x) = x$. Потрібна гладка ретракція $r_0 : B^n \rightarrow S^{n-1}$ задається формулою

$$r_0(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}.$$

Доведення теореми 1.7. Припустимо, що існує неперервно диференційовна ретракція $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Для $x \in B^n$ і $0 \leq t \leq 1$ покладемо

$$\begin{aligned} g(x) &= r(x) - x, \\ r_t(x) &= x + tg(x) = (1-t)x + tr(x). \end{aligned}$$

З неперервної диференційовності відображення g випливає існування такої сталої $L > 0$, що

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in B^n.$$

Відображення $r_t : B^n \rightarrow B^n$ ін'єктивне при $0 \leq t < \frac{1}{L}$. Дійсно, якщо $x \neq y$, то

$$\|r_t(x) - r_t(y)\| \geq \|x - y\| - t\|g(x) - g(y)\| \geq (1 - tL)\|x - y\| > 0.$$

Частинні похідні відображення g рівномірно обмежені, тому матриця Якобі

$$r'_t(x) = I_n + t \cdot g'(x) \tag{1.6}$$

за малих t оборотна. Отже, за теоремою про обернене відображення r_t при $t \in [0, t_0]$ відображає $\text{int}B^n$ на деяку відкриту множину $G_t \subseteq \text{int}B^n$. Нехай $e \in B^n \setminus G_t$. З'єднаємо відрізком точку e з довільною точкою множини G_t і розглянемо точку b , у якій цей відрізок перетинає межу множини G_t . Множина B^n компактна, тому $b = r_t(x)$ для деякої точки $x \in B^n$. Оскільки $b \notin G_t = r_t(\text{int}B^n)$, то $x \notin \text{int}B^n$, тобто $x \in S^{n-1}$. Тому $b = x$ і $e = b = x \in S^{n-1}$. Таким чином, r_t сюр'єктивно відображає $\text{int}B^n$ на $\text{int}B^n$. Крім того, r_t бієктивно відображає S^{n-1} на S^{n-1} (на сфері S^{n-1} маємо $r_t(x) = x$) і, як було показано раніше, r_t ін'єктивно відображає B^n у B^n . Тому при $t \in [0, t_0]$ відображення r_t — бієкція B^n на B^n .

Розглянемо інтеграл

$$V(t) = \int_{B^n} \det(r'_t(x)) \, dx = \int_{B^n} \det(I_n + t \cdot g'(x)) \, dx.$$

При $0 \leq t \leq t_0$ цей інтеграл дорівнює об'єму кулі B^n . Формула (1.6) показує, що $V(t)$ — багаточлен від t . Тому $V(t)$ — додатна стала при $0 \leq t \leq 1$, зокрема

$$V(1) = \int_{B^n} \det(r'(x)) \, dx > 0.$$

З іншого боку, $r(x) \in S^{n-1}$ для всіх $x \in B^n$. Оскільки $(r(x), r(x)) =$

$\|r(x)\|^2 = 1$ для всіх $x \in B^n$, то

$$0 = \frac{d}{dt} (r(x + th), r(x + th))|_{t=0} = 2(r(x), r'(x)h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Отже, $R(r'(x)) \subseteq \{r(x)\}^\perp$ і тому $\det(r'(x)) = 0$. Проте в цьому випадку $V(1) = 0$. Отримали суперечність. \square

Доведення теореми Брауера. Припустимо, що існує неперервне відображення $f : B^n \rightarrow B^n$ без нерухомих точок. Побудуємо за допомогою f ретракцію r кулі B^n на сферу S^{n-1} .

Для кожної точки $x \in B^n$ розглянемо промінь із початком $f(x) \neq x$, що проходить через x . Нехай $r(x)$ — точка, у якій цей промінь перетинає сферу S^{n-1} . Ясно, що побудоване відображення r — ретракція B^n на S^{n-1} . \square

Теорема 1.6 та теорема 1.7 еквівалентні. Дійсно, нехай існує ретракція $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Тоді відображення $-r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ не має нерухомих точок, що суперечить теоремі 1.6.

Доведемо один з найважливіших результатів нескінченновимірного нелінійного аналізу — теорему Ю. Шаудера³ про нерухому точку. Ця теорема є потужним засобом доведення існування розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь.

Теорема 1.8 (Schauder, 1930). *Нехай K — опуклий компакт у лінійному нормованому просторі E та $f : K \rightarrow K$ — неперервне відображення. Тоді існує $x \in K$ із $f(x) = x$.*

Доведення. Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує точка $x_\varepsilon \in K$ така, що

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Це дасть нам існування нерухомої точки. Дійсно, з (x_{1/n_k}) виділимо підпоследовність (x_{1/n_k}) , збіжну до деякої точки $x \in K$. Тоді $f(x_{1/n_k}) \rightarrow f(x)$, звідки випливає $f(x) = x$, оскільки маємо

$$\|f(x_{1/n_k}) - x_{1/n_k}\| \rightarrow 0.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо в K деяку $\varepsilon/2$ -сітку $x_1, \dots, x_N \in K$. Нехай S — опукла оболонка цих точок. За рахунок опуклості K маємо $S \subseteq K$. Для

³Юліуш Павло Шаудер (Juliusz Pawel Schauder, 21.09.1899 Львів — вересень 1943 року, Львів) — польський математик єврейського походження, відомий своїми роботами з функціонального аналізу. Юліуш вступив до Львівського університету в 1919 році і отримав докторський ступінь в 1923 році. З 1935 року Шаудер працює у Львівському університеті. Належав до Львівської математичної школи. Страчений гестапо, імовірно, у вересні 1943 року.

$i = 1, 2, \dots, N$ розглянемо функції

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{якщо } \|x - x_i\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{якщо } \|x - x_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко перевірити, що функції β_i неперервні. Також маємо

$$\sum_{i=1}^N \beta_i(x) > 0 \quad \text{при } x \in K,$$

оскільки для кожного $x \in K$ існує такий номер i , що $\|x - x_i\| \leq \varepsilon/2$. Тому функції

$$\alpha_k(x) = \frac{\beta_k(x)}{\sum_{i=1}^N \beta_i(x)}$$

неперервні на K . Зазначимо також, що

$$0 \leq \alpha_k(x) \leq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) = 1 \quad \text{при } x \in K.$$

Тепер задамо неперервне відображення g на K формулою

$$g(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) x_k.$$

Відображення

$$h = g \circ f : K \rightarrow K$$

також неперервне, причому $h(S) \subseteq S$ (опуклість S і умова $f(K) \subseteq K$). З теореми Брауера про нерухому точку випливає існування $z \in S$ із $h(z) = z$. Оцінимо величину $\|f(z) - z\|$. Справедливі співвідношення

$$\begin{aligned} \|f(z) - z\| &= \|f(z) - g(f(z))\| = \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k(f(z)) f(z) - \sum_{k=1}^N \alpha_k(f(z)) x_k \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N \alpha_k(f(z)) \|f(z) - x_k\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

оскільки при $\|f(z) - x_k\| > \varepsilon$ маємо $\alpha_k(f(z)) = 0$. □

Існує багато модифікацій цього результату. Однією з них є така теорема.

Теорема 1.9. *Нехай K — замкнена опукла множина в банаховому просторі E і $f : K \rightarrow K$ — неперервне відображення, причому $f(K)$ лежить у компактi. Тоді f має нерухому точку.*

Доведення. Нехай V — замикання опуклої оболонки $f(K)$. Множина V — опуклий компакт та $f(V) \subseteq V$. □

Відомий такий результат В. Клі⁴.

Теорема 1.10 (Klee, 1955). *Для довільної некомпактної, замкненої, опуклої множини K банахового простору існує неперервне відображення $f : K \rightarrow K$ без нерухомих точок.*

Теореми Брауера та Шаудера можна узагальнити на багатозначні відображення, тобто такі, що ставлять у відповідність точці не точку, а деяку множину.

Наведемо деякі факти про багатозначні відображення. Нехай X та Y — метричні простори; через 2^Y позначимо булеан Y . Відображення $f : X \rightarrow 2^Y$ будемо називати багатозначним. У цьому випадку кожній точці $x \in X$ поставлено у відповідність деяку множину $f(x) \subseteq Y$, яку далі вважаємо непорожньою.

Графіком багатозначного відображення $f : X \rightarrow 2^Y$ називатимемо множину

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Означення 1.2. Багатозначне відображення $f : X \rightarrow 2^Y$ називається замкненим у точці $x \in X$, якщо з того, що $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ та $y_n \in f(x_n)$, випливає $y \in f(x)$. Відображення f називається замкненим, якщо воно є замкненим у кожній точці $x \in X$.

Очевидно, що $f : X \rightarrow 2^Y$ замкнене тоді й тільки тоді, коли його графік Γ_f замкнений у $X \times Y$.

Означення 1.3. Багатозначне відображення $f : X \rightarrow 2^Y$ називається напівнеперервним зверху в точці $x \in X$, якщо для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ такої, що $f(x) \subseteq U$, існує окіл V точки x , що задовольняє умову $f(V) \subseteq U$. Відображення f називається напівнеперервним зверху, якщо воно є напівнеперервним зверху в кожній точці $x \in X$.

Якщо f — однозначне відображення, то для нього напівнеперервність рівносильна неперервності, тоді як замкнене відображення може й не бути неперервним.

⁴Віктор Л. Клі-молодший (Victor L. Klee, Jr., 18.09.1925, Сан-Франциско — 17.08.2007) — відомий американський математик, який спеціалізувався в опуклому аналізі, функціональному аналізі, комбінаториці та оптимізації.

Лема 1.1. *Напівнеперервне зверху відображення $f : X \rightarrow 2^Y$ із замкненими значеннями є замкненим.*

Доведення. Нехай $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ та $y_n \in f(x_n)$. З напівнеперервності зверху f випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що $d_Y(y_n, f(x)) < \varepsilon$ для всіх $n \geq N$. Отже,

$$d_Y(y, f(x)) = 0.$$

Оскільки множина $f(x)$ замкнена, то $y \in f(x)$. □

Лема 1.2. *Якщо простір Y компактний, то замкнене відображення $f : X \rightarrow 2^Y$ напівнеперервне зверху.*

Доведення. Оберемо $x \in X$ і відкриту множину $U \supseteq f(x)$. Розглянемо

$$V = \{z \in X : f(z) \subseteq U\}.$$

Оскільки $x \in V$ і $f(V) \subseteq U$, то достатньо довести, що множина V відкрита або що множина $X \setminus V = \{z \in X : f(z) \cap (Y \setminus U) \neq \emptyset\}$ замкнена. Якщо $z_n \rightarrow z \in X$ і $z_n \in X \setminus V$, то знайдуться точки

$$y_n \in f(z_n) \cap (Y \setminus U).$$

Унаслідок компактності Y існує підпослідовність (y_{n_k}) така, що $y_{n_k} \rightarrow y \in Y \setminus U$. Оскільки відображення f замкнене, то $y \in f(z)$. Отже,

$$y \in f(z) \cap (Y \setminus U),$$

звідки $z \in X \setminus V$. □

Лема 1.2 є корисним інструментом при доведенні напівнеперервності зверху багатозначних відображень. Зауважимо, що припущення про компактність Y суттєве. Дійсно, розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$, задане за правилом

$$f(x) = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y = xt\}.$$

Воно є замкненим, але вкладення

$$f(x) \subseteq f(0) + O_\varepsilon(0)$$

неможливе для жодних $\varepsilon > 0$ та $x \neq 0$.

Означення 1.4. Точка $\bar{x} \in X$ називається нерухомою точкою відображення $f : X \rightarrow 2^X$, якщо $\bar{x} \in f(\bar{x})$.

Тепер сформулюємо теорему Какутані⁵.

Теорема 1.11 (Kakutani, 1941). *Нехай K — непорожній опуклий компакт у лінійному нормованому просторі E та $f : K \rightarrow 2^K$ — багатозначне відображення, що задовольняє умови:*

- 1) *для всіх $x \in K$ множина $f(x)$ є непорожньою опуклою підмножиною множини K ;*
- 2) *відображення f замкнене.*

Тоді відображення f має нерухому точку, причому множина нерухомих точок відображення f компактна.

Зауваження 1.2. Умову теореми Какутані про опуклозначність відображення f не можна відкинути. Дійсно, відображення $f : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$, задане за правилом

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{якщо } x < \frac{1}{2}, \\ \{0, 1\}, & \text{якщо } x = \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{якщо } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

замкнене, але без нерухомих точок.

Доведення теореми Какутані. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо в K деяку скінченну ε -сітку $x_{\varepsilon 1}, \dots, x_{\varepsilon N(\varepsilon)} \in K$. Для $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ розглянемо функції $\beta_{\varepsilon i} : K \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\beta_{\varepsilon i}(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_{\varepsilon i}\|, & \text{якщо } \|x - x_{\varepsilon i}\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{якщо } \|x - x_{\varepsilon i}\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко перевірити, що функції $\beta_{\varepsilon i}$ неперервні. Також маємо

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \beta_{\varepsilon i}(x) > 0 \quad \text{при } x \in K,$$

оскільки для кожного $x \in K$ існує такий номер i , що $\|x - x_{\varepsilon i}\| < \varepsilon$. Тому функції

$$\alpha_{\varepsilon k}(x) = \frac{\beta_{\varepsilon k}(x)}{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \beta_{\varepsilon i}(x)}, \quad k = 1, 2, \dots, N(\varepsilon),$$

⁵Сідзуо Какутані (Shizuo Kakutani, 28.08.1911, Осака — 17.08.2004) — видатний японський та американський математик, займався функціональним аналізом, комплексним аналізом, топологічними групами, марківськими процесами, теорією міри та ергодичною теорією. Найбільш відомі результати — теорема про нерухому точку для багатозначних відображень та теорема Маркова-Какутані.

неперервні на \mathbb{K} . Зазначимо також, що

$$0 \leq \alpha_{\varepsilon k}(x) \leq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_{\varepsilon k}(x) = 1 \quad \text{при } x \in \mathbb{K}. \quad (1.7)$$

Зафіксуємо тепер довільну точку $y_{\varepsilon i} \in f(x_{\varepsilon i})$ ($i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$) та задамо однозначне неперервне відображення $\phi_{\varepsilon} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ формулою

$$\phi_{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_{\varepsilon k}(x) y_{\varepsilon k}.$$

З умов (1.7) і опуклості множини \mathbb{K} випливає $\phi_{\varepsilon}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}$.

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо однозначне неперервне відображення $\phi_{\varepsilon} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. За теоремою Шаудера у цього відображення є нерухома точка $x_{\varepsilon} \in \mathbb{K}$: $\phi_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) = x_{\varepsilon}$.

Унаслідок компактності множини \mathbb{K} існують послідовність (ε_n) додатних чисел і точка $\bar{x} \in \mathbb{K}$ такі, що:

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

$$\|x_{\varepsilon_n} - \bar{x}\| \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

$$\phi_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) = x_{\varepsilon_n}. \quad (1.10)$$

Покажемо, що точка $\bar{x} \in \mathbb{K}$ є шуканою нерухомою точкою відображення f . Покладемо

$$O_{\delta} = \bigcup_{y \in f(\bar{x})} O_{\delta}(y),$$

де $O_{\delta}(y) = \{z \in E : \|z - y\| < \delta\}$. Доведемо, що $\bar{x} \in O_{\delta}$ для довільного $\delta > 0$, звідки внаслідок замкненості $f(\bar{x})$ отримаємо потрібне $\bar{x} \in f(\bar{x})$ (замкненість множини $f(\bar{x})$ випливає із замкненості відображення f).

Очевидно, що O_{δ} — опукла відкрита множина та $f(\bar{x}) \subseteq O_{\delta}$. Унаслідок леми 1.2 існує відкрита куля $O_{\varepsilon}(\bar{x})$ така, що

$$f(O_{\varepsilon}(\bar{x}) \cap \mathbb{K}) \subseteq O_{\delta}.$$

А внаслідок умов (1.8) і (1.9) існує число N таке, що для $n \geq N$ маємо $\varepsilon_n < \varepsilon/2$ та $x_{\varepsilon_n} \in O_{\varepsilon/2}(\bar{x})$. Якщо $\alpha_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) > 0$, то

$$\|x_{\varepsilon_n i} - x_{\varepsilon_n}\| < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|x_{\varepsilon_n i} - \bar{x}\| \leq \|x_{\varepsilon_n i} - x_{\varepsilon_n}\| + \|x_{\varepsilon_n} - \bar{x}\| < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, для $n > N$ маємо $x_{\varepsilon_n i} \in O_\varepsilon(\bar{x})$ для всіх таких i , що $\alpha_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) > 0$. Для цих i отримуємо

$$y_{\varepsilon_n i} \in f(x_{\varepsilon_n i}) \subseteq f(O_\varepsilon(\bar{x}) \cap K) \subseteq O_\delta. \quad (1.11)$$

Умову (1.10) запишемо у вигляді

$$x_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon_n)} \alpha_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) y_{\varepsilon_n i}. \quad (1.12)$$

З (1.11) і (1.12) одержуємо, що для $n \geq N$ точка x_{ε_n} — опукла комбінація тільки тих точок $y_{\varepsilon_n i}$, які лежать у O_δ , звідки внаслідок опуклості O_δ маємо $x_{\varepsilon_n} \in O_\delta$. Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, одержуємо, що $\bar{x} \in \text{cl}O_\delta \subseteq O_{2\delta}$. Як уже було вказано, звідси випливає, що $\bar{x} \in f(\bar{x})$.

Компактність множини нерухомих точок випливає із замкненості відображення f та компактності множини K . \square

Теорема Какутані має багато застосувань, переважно в математичній економіці та теорії ігор. Як приклад розв'яжемо задачу існування точок рівноваги Неша⁶ для досить загальної ситуації.

Задамо лінійні нормовані простори E_1, E_2, \dots, E_p та

$$C_i \subseteq E_i$$

— непорожня множина;

$$f_i : C = C_1 \times \dots \times C_p \rightarrow \mathbb{R}$$

— функція, $F = (f_1, \dots, f_p)$.

Задача рівноваги Неша полягає у відшуванні такої точки $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in C$, що

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) = \inf_{x_1 \in C_1} f_1(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p), \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) = \inf_{x_2 \in C_2} f_2(\bar{x}_1, x_2, \dots, \bar{x}_p), \\ \dots\dots\dots \\ f_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) = \inf_{x_p \in C_p} f_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_p). \end{cases} \quad (1.13)$$

⁶ Джон Форбс Неш молодший (John Forbes Nash, Jr., 13.06.1928 — 23.05.2015) — видатний американський математик. Зробив значний внесок в теорію ігор, теорію нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, диференціальну геометрію. Лауреат Нобелівської премії з економіки (1994), Премії Абеля (2015).

Позначимо $NE(F)$ множину розв'язків задачі (1.13). Її елементи називатимемо точками рівноваги за Нешем системи функцій $F = (f_1, \dots, f_p)$.

Теорема 1.12. *Нехай E_1, E_2, \dots, E_p — лінійні нормовані простори. Припустимо, що:*

- 1) C_i — непорожня опукла компактна підмножина E_i ;
- 2) f_i — неперервна на $C_1 \times \dots \times C_p$ функція, причому для всіх $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) \in C_1 \times \dots \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times \dots \times C_p$ функція $C_i \ni \eta \rightarrow f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \eta, x_{i+1}, \dots, x_p)$ опукла.

Тоді множина $NE(F)$ точок рівноваги за Нешем системи функцій (f_1, \dots, f_p) непорожня та компактна.

Доведення. Ясно, що $C = \prod_{i=1}^p C_i$ — опукла компактна підмножина лінійного нормованого простору $E = \prod_{i=1}^p E_i$. Розглянемо багатозначні відображення

$$\begin{aligned} & \prod_{i=2}^p C_i \ni (x_2, \dots, x_p) \mapsto BR_1(x_2, \dots, x_p) = \\ & = \left\{ \bar{x}_1 \in C_1 : f_1(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_p) = \inf_{x_1 \in C_1} f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) \right\}, \\ & \dots \dots \dots \\ & \prod_{i=1, i \neq k}^p C_i \ni (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) \mapsto \\ & \mapsto BR_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) = \\ & = \left\{ \bar{x}_k \in C_k : f_k(x_1, \dots, \bar{x}_k, \dots, x_p) = \inf_{x_k \in C_k} f_k(x_1, x_2, \dots, x_p) \right\}, \\ & \dots \dots \dots \\ & \prod_{i=1}^{p-1} C_i \ni (x_1, \dots, x_{p-1}) \mapsto BR_p(x_1, \dots, x_{p-1}) = \\ & = \left\{ \bar{x}_p \in C_p : f_p(x_1, \dots, x_{p-1}, \bar{x}_p) = \inf_{x_p \in C_p} f_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \right\}. \end{aligned}$$

Покладемо

$$\begin{aligned} BR(x_1, \dots, x_p) &= BR_1(x_2, \dots, x_p) \times \dots \\ &\dots \times BR_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) \times \dots \times BR_p(x_1, \dots, x_{p-1}). \end{aligned}$$

Точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in C$ є розв'язком задачі (1.13) тоді й тільки тоді, коли вона є нерухомою точкою відображення $BR : C \rightarrow 2^C$, тобто

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in BR(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p).$$

Покажемо, що відображення $BR : C \rightarrow 2^C$ має непорожню компактну множину нерухомих точок.

Множини $BR(x_1, x_2, \dots, x_p)$ — непорожні опуклі компакти. Замкненість багатозначного відображення BR пропонуємо довести самостійно (див. задачу 1.22). Отже, відображення $BR : C \rightarrow 2^C$ задовольняє умови теореми Какутані. Звідси випливає, що множина $NE(F)$ непорожня та компактна. \square

1.3. Опуклість чебишовських множин

Відстанню від заданої точки x до заданої множини C називають величину

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Під *елементом найкращого наближення* або найближчою точкою для заданої точки x будемо розуміти таку точку $y_0 \in C$, для якої $\|x - y_0\| = d(x, C)$, тобто $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ для всіх $y \in C$. Множину всіх найближчих точок з C для заданої точки x позначимо $P_C x$.

Означення 1.5. Непорожню множину C називають *чебишовською*, якщо довільна точка x має точно одну найближчу в C , тобто

$$\forall x \text{ множина } P_C x \text{ складається з однієї точки.}$$

Якщо C — чебишовська множина, то відображення P_C , що ставить у відповідність точці x її найближчу точку $P_C x$ із C , називається *метричною проекцією* на C .

Опишемо всі чебишовські множини евклідового (скінченновимірною гільбертового) простору.

Теорема 1.13 (Л. Бунт⁷, Т. Моцкін⁸). *Чебишовська множина евклідового простору є замкненою та опуклою.*

⁷Лукас Ніколаас Хендрік Бунт (Lucas Nicolaas Hendrik Bunt, 10.06.1905. — 22.01.1984) — голландський математик.

⁸Теодор Самуїл Моцкін (Theodore Samuel Motzkin, 26.03.1908, Берлін — 15.12.1970, Лос-Анджелес) — ізраїльський та американський математик. Один з розробників математичної термінології на івриті. Відомий своїми роботами з теорії лінійних нерівностей. Займався комбінаторикою, теорією графів, теорією наближення, чисельними методами та теорією чисел.

Ключову роль у розглянутому нижче доведенні (В. Клі, В. І. Бердишев⁹) грає теорема Брауера про нерухому точку.

Лема 1.3. *Метрична проекція P_C на чебишовську множину C є неперервним відображенням.*

Доведення. Спочатку зазначимо, що для $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq \|x - y\|. \quad (1.14)$$

Припустимо, що метрична проекція P_C розривна в деякій точці x , тобто знайдуться число $\varepsilon > 0$ і послідовність (x_n) , $x_n \rightarrow x$, такі, що $\|P_C x_n - P_C x\| \geq \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Унаслідок (1.14) послідовність $(P_C x_n)$ обмежена. Нехай y — її часткова границя. Ясно, що $y \neq P_C x$. За (1.14)

$$\|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - P_C x_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, C) = d(x, C).$$

Оскільки множина C замкнена, то $y \in C$, тобто точка y також є найближчою до x . Дістали протиріччя з тим, що C — чебишовська множина. \square

Означення 1.6. Чебишовську множину C називають **чебишовським сонцем**, якщо

$$P_C(P_C x + t(x - P_C x)) = P_C x \quad \forall x \notin C \quad \forall t \geq 0.$$

Лема 1.4. *Чебишовська множина є чебишовським сонцем.*

Доведення. Нехай C — чебишовська множина та $x \notin C$. Розглянемо промінь ℓ , що виходить з $y = P_C x \in C$ та проходить через x . Покладемо $r = \|x - y\|$ та розглянемо кулю $B = B(x, r)$. Задамо відображення $f: B \rightarrow B$ за формулою

$$f(z) = x + r \frac{x - P_C z}{\|x - P_C z\|}, \quad z \in B.$$

Точка $f(z)$ — точка перетину сфери $S(x, r)$ та променя, що виходить з x у напрямку $x - P_C z$.

Відображення f неперервне (впливає з неперервності метричної проекції на чебишовську множину). За теоремою Брауера існує точка $z_0 \in B$ така, що

$$f(z_0) = z_0.$$

⁹Віталій Іванович Бердишев (нар. 27.01.1939, Свердловськ) — російський математик, д.ф.-м.н., академік РАН, директор Інституту математики та механіки УрВ РАН. Наукова робота пов'язана з функціональним аналізом і теорією функцій, проблемою стиснення-відновлення інформації.

З означення $f(z_0)$ випливає, що точка x лежить на відрізку, що з'єднує z_0 з її проекцією $P_C z_0$. При цьому найближчим елементом до кожної точки відрізка $[z_0, P_C z_0]$ буде точка $P_C z_0$ (випливає з нерівності трикутника та чебишовості C). Однак для x найближча точка $y = P_C x$, і вона єдина. Отже, $P_C z_0 = y$. Таким чином, для всіх точок із $[y, z_0]$ найближчою точкою із C є точка y .

Застосовуючи попередні міркування, проведені для точки x , до точки z_0 , ми ще далі просунемось по променю ℓ . У результаті для кожної точки $p \in \ell$ точка y буде єдиною найближчою з множини C . \square

Лема 1.5. *Чебишовське сонце є опуклою множиною.*

Доведення. Нехай $x, y \in C$ та $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, де $\lambda \in (0, 1)$. Оскільки C — чебишовське сонце, то при $z \notin C$ кожна точка $z + t(z - P_C z)$ для $t > 0$ має точку $P_C z$ своєю найближчою із C . Тому

$$\|z + t(z - P_C z) - P_C z\|^2 \leq \|z + t(z - P_C z) - x\|^2. \quad (1.15)$$

Використовуючи властивості скалярного добутку, отримуємо

$$\frac{1}{t}\|z - P_C z\|^2 + 2(z - P_C z, z - P_C z) \leq \frac{1}{t}\|z - x\|^2 + 2(z - P_C z, z - x).$$

Спрямовуючи $t \rightarrow +\infty$ у цій нерівності, отримуємо

$$(z - P_C z, z - x) \geq \|z - P_C z\|^2.$$

Аналогічно, підставляючи y замість x у (1.15), маємо

$$(z - P_C z, z - y) \geq \|z - P_C z\|^2.$$

Звідси

$$\|z - P_C z\|^2 \leq \lambda(z - P_C z, z - x) + (1 - \lambda)(z - P_C z, z - y) = 0.$$

Отже,

$$z = P_C z \in C,$$

тобто множина C опукла. \square

У нескінченновимірних лінійних просторах про опуклість чебишовських підмножин відомо небагато. Наприклад, на момент написання цього тексту не відомо, чи опукла довільна чебишовська множина в нескінченновимірному гільбертовому просторі (проблема В. Клі, 1961).

1.4. Лема про послідовності

При доведенні слабкої збіжності послідовностей елементів гільбертового простору будемо використовувати відому лему Опяла¹⁰ [1].

Лема 1.6 (Opial, 1967). *Нехай послідовність (x_n) елементів гільбертового простору H слабо збігається до елемента $x \in H$. Тоді для всіх $y \in H \setminus \{x\}$ маємо*

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|.$$

Доведення. Для доведення нерівності достатньо помітити, що в рівності

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2(x_n - x, x - y)$$

останній доданок прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. □

Наступні факти також відіграють важливу роль у доведеннях основних результатів про збіжність алгоритмів.

Лема 1.7 (Opial, 1967). *Нехай H — гільбертовий простір; $F \subseteq H$ — непорожня множина; (x_n) — послідовність точок H . Припустимо, що:*

- 1) усі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать F ;
- 2) для всіх $y \in F$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.

Тоді (x_n) слабо збігається до деякої точки $x \in F$.

Зауваження 1.3. Лема 1.7 дозволяє доводити слабку збіжність послідовностей без апріорного знання границі.

Лема 1.8 (Passty¹¹, 1979). *Нехай H — гільбертовий простір; $F \subseteq H$ — непорожня множина; (x_n) — послідовність точок H і $\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$, де (λ_n) — послідовність додатних чисел така, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Припустимо, що:*

- 1) усі слабкі часткові границі послідовності (\bar{x}_n) належать F ;
- 2) для всіх $y \in F$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.

Тоді (\bar{x}_n) слабо збігається до деякої точки $x \in F$.

¹⁰Здзіслав Опял (Zdzislaw Opial, 29.09.1930, Краків — 27.07.1974, Краків) — польський математик. Займався теорією диференціальних рівнянь та нелінійним функціональним аналізом.

¹¹Грегорі Пасті (Gregory V. Passty) — американський математик. Основні результати пов'язані з теорією монотонних операторів та методами розв'язання операторних включень.

Лема 1.9. Нехай $(a_n), (b_n)$ — послідовності невід'ємних чисел, що задовольняють рекурентну нерівність

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Тоді (a_n) збіжна та $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Лема 1.10. Нехай $(a_n), (b_n)$ — послідовності невід'ємних чисел такі, що

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Тоді існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Лема 1.11. Нехай (x_n) — послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність

$$x_{n+1} \leq (1 - a_n)x_n + a_n b_n + c_n,$$

де послідовності $(a_n), (b_n)$ і (c_n) мають властивості:

- 1) $a_n \in [0, 1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
- 2) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 0$;
- 3) $c_n \in [0, +\infty)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Доведення. Для довільного $\epsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$

$$b_n < \epsilon, \quad \sum_{n=N}^{\infty} c_n < \epsilon.$$

Для $n > N$ з рекурентної нерівності отримуємо

$$x_{n+1} \leq \left(\prod_{k=N}^n (1 - a_k) \right) x_N + \left(1 - \prod_{k=N}^n (1 - a_k) \right) \epsilon + \sum_{k=N}^n c_k.$$

Беручи до уваги рівносильність умов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ та $\prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n) = 0$, отримуємо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 2\epsilon.$$

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. □

Лема 1.12 (Maingé, 2008). Нехай числова послідовність (a_n) має підпослідовність (a_{n_k}) , яка володіє властивістю

$$a_{n_k} < a_{n_{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді існує така неспадна послідовність (m_k) натуральних чисел, що

$$m_k \rightarrow +\infty \quad \text{і} \quad a_{m_k} \leq a_{m_{k+1}}, \quad a_k \leq a_{m_{k+1}} \quad \forall k \geq n_1.$$

Доведення. Для $k \geq n_1$ покладемо

$$m_k = \max\{i \leq k : a_i < a_{i+1}\}.$$

Послідовність чисел m_k коректно визначена, неспадна та $m_k \rightarrow +\infty$. Нерівність $a_{m_k} \leq a_{m_{k+1}}$ очевидна.

Доведемо виконання для всіх $k \geq n_1$ нерівності

$$a_k \leq a_{m_{k+1}}. \tag{1.16}$$

Розглянемо три можливі випадки:

- (i) $m_k = k$;
- (ii) $m_k = k - 1$;
- (iii) $m_k < k - 1$.

У випадку (i) нерівність (1.16) співпадає з $a_{m_k} \leq a_{m_{k+1}}$. У випадку (ii) нерівність (1.16) очевидна. У випадку (iii) для всіх $i \in \{m_k + 1, m_k + 2, \dots, k - 1\}$ виконується $a_i \geq a_{i+1}$, точніше, $a_{m_{k+1}} \geq a_{m_k+2} \geq \dots \geq a_{k-1} \geq a_k$. \square

Зауваження 1.4. Лема 1.12 є ефективним інструментом дослідження збіжності ітераційних процесів, що не володіють фейєрівською властивістю відносно множини розв'язків [2].

1.5. Задачі

Задача 1.1. Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин. Покладемо $C = \text{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ і нехай $x \in N$. Доведіть, що $P_{C_n} x \rightarrow P_C x$.

Задача 1.2. Нехай $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин. Припустимо, що $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, і нехай $x \in N$. Доведіть, що $P_{C_n} x \rightarrow P_C x$.

Задача 1.3. Нехай A — опукла замкнена множина з \mathbb{R}^n . Доведіть, що через довільну точку $x \in \text{fr}A$ можна провести опорну гіперплощину до множини A , тобто $\exists x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $(x^*, x) \geq (x^*, y) \quad \forall y \in A$.

Задача 1.4. Нехай H — нескінченновимірний гільбертовий простір. Доведіть, що оператор проектування на замкнену кулю не є слабко неперервним.

Задача 1.5. Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $x \in H \setminus C$. Доведіть, що існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x).$$

Задача 1.6. Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору H , $\dim H < +\infty$, $x \in H \setminus C$. Доведіть, що існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x).$$

Задача 1.7. Нехай C, D — непорожні підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$.

(i) Якщо припустити, що

множина $C - D$ опукла та замкнена,

то існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{y \in D} (p, y)$.

(ii) Якщо припустити, що

$\dim H < +\infty$, множина $C - D$ опукла,

то існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) \leq \inf_{y \in D} (p, y)$.

Задача 1.8. Нехай C, D — непорожні замкнені опуклі підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$ та D обмежена. Доведіть, що існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{y \in D} (p, y).$$

Задача 1.9. Нехай C — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

- 1) C — слабко секвенційно замкнена множина.
- 2) C — замкнена множина.
- 3) C — слабко замкнена множина.

Задача 1.10. Нехай C — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H та $x, y \in H$. Доведіть рівність $P_{y+C}x = y + P_C(x - y)$.

Задача 1.11. Нехай C — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H та $x \in H$. Доведіть, що для всіх $\lambda \geq 0$ має місце рівність $P_C(P_Cx + \lambda(x - P_Cx)) = P_Cx$.

Задача 1.12. Нехай $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та $C = \text{cl lin } \{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_Cx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad x \in H.$$

Задача 1.13. Нехай $C_1, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином. Розглянемо послідовність

$$x_{n+1} = \frac{1}{r} (P_{C_1}x_n + P_{C_1}P_{C_2}x_n + \dots + P_{C_1} \dots P_{C_r}x_n),$$

де $x_0 \in H$. Доведіть, що

$$x_n \rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Задача 1.14. Нехай $C_1, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином. Розглянемо послідовність

$$x_{n+1} = \frac{1}{r-1} (P_{C_1}P_{C_2}x_n + P_{C_2}P_{C_3}x_n + \dots + P_{C_{r-1}}P_{C_r}x_n),$$

де $x_0 \in H$. Доведіть, що

$$x_n \rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Задача 1.15. Нехай $E_1, E_2 \subseteq H$ — замкнені лінійні підпростори. Доведіть, що послідовність операторів $P_{E_1}, P_{E_2}P_{E_1}, P_{E_1}P_{E_2}P_{E_1}, P_{E_2}P_{E_1}P_{E_2}P_{E_1}, \dots$ поточково збігається до $P_{E_1 \cap E_2}$. Зокрема, для всіх $x \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{E_2}P_{E_1})^n x = P_{E_1 \cap E_2}x.$$

Задача 1.16. Доведіть, що всі опуклі компакти з непорожньою внутрішністю в \mathbb{R}^n гомеоморфні.

Задача 1.17. Нехай $A \subseteq \mathbb{B}^n$ — непорожня замкнена множина. Доведіть, що існує неперервне відображення $T: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ таке, що $F(T) = A$, де $F(T)$ — множина нерухомих точок відображення T .

Задача 1.18. Нехай неперервне відображення $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$f(S^{n-1}) \subseteq B^n.$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n$: $f(x_0) = x_0$.

Задача 1.19. В банахових просторах ℓ_2 , c_0 та $C([-1, 1])$ побудувати приклади неперервних відображень, що відображають замкнену кулю в себе, але не мають нерухомих точок.

Задача 1.20 (Лема Кнастера–Куратовського–Мазуркевича). Нехай X — довільна множина в \mathbb{R}^n . Кожній точці $x \in X$ поставлено у відповідність компактну множину $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ так, що для довільної скінченної множини $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subseteq X$

$$\text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subseteq \bigcup_{i=1}^p F(x_i).$$

Доведіть, що

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset.$$

Задача 1.21. Нехай (X, d_X) , (Y, d_Y) — метричні простори, (Y, d_Y) — компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та $g(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$. Доведіть, що $g \in C(X)$.

Задача 1.22. Нехай функція $\phi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна, Y — компакт. Доведіть, що відображення $T : X \rightarrow 2^Y$, задане співвідношенням

$$Tx = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\},$$

замкнене¹².

Задача 1.23. Нехай A, B — непорожні опуклі компакти з банахових просторів X, Y , відповідно. Функція $L : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна на $A \times B$ та опукла по x на A (для всіх $y \in B$), угнута по y на B (для всіх $x \in A$). Доведіть, що існує сідлова точка функції L на $A \times B$, тобто, існує $(x_0, y_0) \in A \times B$:

$$L(x_0, y) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x, y_0) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in B.$$

¹² X, Y — метричні простори.

Розділ 2

Вступ до теорії варіаційних нерівностей

Варіаційні нерівності — один з центральних об'єктів прикладного нелінійного аналізу. Вони є зручною загальною формою запису та дослідження різних нелінійних задач. Зокрема, у вигляді задачі розв'язання варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, знаходження точок рівноваги Неша тощо. Цей розділ містить базові положення теорії варіаційних нерівностей.

Для детальнішого ознайомлення з варіаційними нерівностями пропонуємо книги [3–5].

2.1. Варіаційні нерівності в \mathbb{R}^n

Нехай дано непорожню підмножину C простору \mathbb{R}^n та оператор $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$. Розглядатимемо задачу:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.1)$$

Нерівності вигляду (2.1) називають варіаційними. Чому варіаційними? Відповідь на це запитання пов'язана з тим, що у вигляді (2.1) можна записати критерій оптимальності в задачі

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in C,$$

де $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — опукла, замкнена множина, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — опукла та диференційовна функція. Дійсно,

$$f(x) = \min_{y \in C} f(y) \Leftrightarrow x \in C, (\nabla f(x), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Зауваження 2.1. Дослідження варіаційних нерівностей розпочалося в 1960-х при спробах розв'язання проблем варіаційного числення, оптимального керування та теорії крайових задач з односторонніми умовами. Гарний огляд перших застосувань варіаційних нерівностей дають книги Ж.–Л. Ліонса¹ [3], Д. Кіндерлерера² і Г. Стампак'ї³ [4] та К. Байоккі⁴ і А. Капело [5]. Відмітимо й ґрунтовні монографії вітчизняних математиків М. М. Вайнберга⁵ [6], В. І. Іваненко⁶ та В. С. Мельника⁷ [7].

Дуже швидко варіаційні нерівності стали потужним інструментом для розв'язання проблем оптимізації, оптимального керування, економіки, математичної фізики тощо [8–15].

В оптимізації та оптимальному керуванні варіаційні нерівності є перш за все зручним способом запису умов оптимальності. Відома класична монографія Ж.–Л. Ліонса [12] є систематичним викладенням теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами з точки зору варіаційних нерівностей.

В статті [13] А. Бенсусан⁸ сформулював задачу пошуку рівноваги за Нешем у вигляді варіаційної нерівності. Задача пошуку рівноважного розподілу потоків в транспортній мережі в роботі [14] була подана у вигляді варіаційної

¹Жак–Луї Ліонс (Jacques-Louis Lions, 3.05.1928, Грасс — 17.05.2001, Париж) — видатний французький математик. Займався теорією диференціальних рівнянь в частинних похідних, теорією оптимального керування, варіаційними нерівностями та чисельними методами.

²Девід Семюель Кіндерлерер (David Samuel Kinderlehrer, нар. 23.10.1941, Аллентаун) — американський математик. Займається рівняннями в частинних похідних, теорією мінімальних поверхонь, варіаційними нерівностями та прикладними питаннями.

³Гвідо Стампак'я (Guido Stampacchia, 26.03.1922, Неаполь — 27.04.1978, Піза) — видатний італійський математик. Займався теорією еліптичних диференціальних рівнянь у частинних похідних, теорією варіаційних нерівностей та варіаційним численням.

⁴Клаудіо Байоккі (Claudio Baiocchi, 20.08.1940 — 14.12.2020) — відомий італійський математик. Займався теорією диференціальних рівнянь у частинних похідних та варіаційним численням.

⁵Мордухай Мойсейович Вайнберг — радянський математик. Займався методами нелінійного функціонального аналізу.

⁶Іваненко Віктор Іванович (нар. 20.05.1928, Київ) — український математик, д.т.н., професор. Фахівець у галузі автоматичних систем керування. Зробив вагомий внесок у розвиток теорії прийняття рішень та теорії керованих випадкових процесів.

⁷Валерій Сергійович Мельник (24.01.1952, с. Червоне, Вінницька обл. — 10.08.2007, Київ) — видатний український математик, члена-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., професор, віце-президент Київського математичного товариства. З 1979 р. по 1997 р. працював в Інституті кібернетики НАН України. З 1997 року працював у Інституті прикладного системного аналізу. Сфера наукових інтересів В.С. Мельника охоплювала методи нелінійного функціонального аналізу, зокрема теорії мнозначних відображень і операторних включень у локально опуклих просторах, теорії нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних; теорії глобальних атракторів для еволюційних рівнянь, включень і варіаційних нерівностей; теорії оптимального керування для об'єктів, що описуються нелінійними граничними задачами для рівнянь у частинних похідних.

⁸Алан Бенсусан (Alain Bensoussan, нар. 12.05.1940, Туніс) — відомий французький математик. Учень Ж.–Л. Ліонса. Основні результати пов'язані з задачами теорії стохастичного керування розподіленими системами.

нерівності. Починаючи з цих робіт почалося активне дослідження різних задач пошуку рівноваги за допомогою методів теорії варіаційних нерівностей. Актуальним задачам пошуку рівноваги, таким як різні цінові рівноваги, або транспортні рівноваги, що відповідають поведінковим принципам Вардропа, присвячено чудову монографію [15].

В моделях математичної фізики варіаційні нерівності застосовуються в теорії пружності, теорії пружнопластичних матеріалів, теорії пористих середовищ, теорії неньютонівських рідин [3, 16].

Зазначимо, що коли x — розв'язок нерівності (2.1) — належить внутрішності $\text{int}C$ множини C , то $Ax = 0$. Дійсно, якщо $x \in \text{int}C$, то точки $y - x$ утворюють окіл нуля, коли y пробігає C , тобто для довільного $z \in \mathbb{R}^n$ знайдуться $\varepsilon > 0$ та $y \in C$ такі, що $z = \varepsilon(y - x)$. Отже,

$$(Ax, z) = \varepsilon(Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

тому

$$Ax = 0.$$

Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — опукла множина. Якщо x — розв'язок нерівності (2.1) — належить межі $\text{fr}C$ множини C та $Ax \neq 0$, то елемент Ax задає опорну гіперплощину до C .

Зауваження 2.2. Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — опукла множина та $x \in \text{fr}C$. Нагадаємо, що гіперплощина $L = \{y \in \mathbb{R}^n : (a, y - x) = 0\}$, $a \neq 0$, називається *опорною* до множини C , якщо $(a, y - x) \geq 0$ для всіх $y \in C$.

Будемо позначати $VI(A, C)$ множину розв'язків варіаційної нерівності (2.1).

Варіаційну нерівність (2.1) можна сформулювати у вигляді задачі пошуку нерухомої точки. Точка $x \in C$ є розв'язком варіаційної нерівності тоді й тільки тоді, коли

$$x = P_C(I - \lambda A)x, \quad (2.2)$$

де $\lambda > 0$, P_C — оператор метричного проектування на множину C . Дійсно, нехай $\lambda > 0$. З теореми 1.2 випливає

$$x = P_C(I - \lambda A)x \Leftrightarrow (x - x + \lambda Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Має місце

Теорема 2.1. *Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактна опукла множина та $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервний оператор. Тоді існує розв'язок задачі (2.1).*

Доведення. Оператор $T = P_C(I - \lambda A) : C \rightarrow C$ — неперервний, тому, за теоремою Брауера, у нього є нерухома точка $x \in C$, тобто виконується (2.2), що рівносильно (2.1). \square

Якщо допустима множина C необмежена, то задача (2.1) може не мати розв'язків. Умови існування розв'язків у необмеженому випадку отримують шляхом уведення додаткових припущень про властивості задачі, наприклад, обмеженість потенційної множини розв'язків, коерцитивність, сильну монотонність тощо.

Розглянемо загальну ідею виявлення таких властивостей. Для даної замкненої опуклої множини C покладемо $C_R = C \cap B_R$, де $B_R = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq R\}$ — замкнена куля з радіусом $R > 0$ та центром у нулі. Для неперервного оператора $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ за попередньою теоремою при будь-якому $C_R \neq \emptyset$ знайдеться така точка $x_R \in C_R$, що

$$(Ax_R, y - x_R) \geq 0 \quad \forall y \in C_R. \quad (2.3)$$

Має місце

Теорема 2.2. *Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнена опукла множина та $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервний оператор. Для існування розв'язків варіаційної нерівності (2.1) необхідно та достатньо існування такого $R > 0$, що $\|x_R\| < R$ для деякого $x_R \in VI(A, C_R)$.*

Доведення. Ясно, що якщо x — розв'язок нерівності (2.1), то x є і розв'язком (2.3) за умови $\|x\| < R$.

Припустимо тепер, що для $x_R \in VI(A, C_R)$ виконується $\|x_R\| < R$. Для кожного $y \in C$ оберемо таке число $\lambda > 0$, що $z = x_R + \lambda(y - x_R) \in C_R$. Маємо:

$$0 \leq (Ax_R, z - x_R) = \lambda(Ax_R, y - x_R) \quad \forall y \in C.$$

Отже, $x_R \in VI(A, C)$. \square

З теореми 2.2 можна отримати достатні умови існування розв'язків. Сформулюємо лише одну з них, яка пов'язана з поняттям коерцитивності.

Означення 2.1. Оператор $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ називаємо *коерцитивним*, якщо для деякого $x_0 \in C$ виконано

$$\frac{(Ax, x - x_0)}{\|x\|} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow +\infty, \quad x \in C.$$

Теорема 2.3. Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнена опукла множина та $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервний коерцитивний оператор. Тоді існує розв'язок варіаційної нерівності (2.1).

Доведення. З коерцитивності A випливає, що для кожного $M > 0$ існує достатньо велике $R_M > 0$ таке, що

$$(Ax, x - x_0) \geq M \|x\| \quad \forall x \in C, \|x\| \geq R_M,$$

де $x_0 \in C_{R_M}$ не залежить від M та R_M .

Унаслідок теореми 2.1 існує точка $x_{R_M} \in C_{R_M}$ така, що

$$(Ax_{R_M}, y - x_{R_M}) \geq 0 \quad \forall y \in C_{R_M}.$$

Якщо $\|x_{R_M}\| < R_M$, то за теоремою 2.2 точка x_{R_M} є розв'язком варіаційної нерівності (2.1).

Якщо $\|x_{R_M}\| = R_M$, то отримуємо

$$(Ax_{R_M}, x_0 - x_{R_M}) \leq -M \|x_{R_M}\| = -CR_M < 0,$$

що суперечить означенню x_{R_M} . □

З попередньої теореми випливає

Наслідок 2.1. Нехай оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ неперервний та коерцитивний у сенсі

$$\frac{(Ax, x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow +\infty.$$

Тоді існує елемент $x \in \mathbb{R}^n$, для якого $Ax = 0$.

Уведемо важливе поняття.

Означення 2.2. Оператор $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ називаємо *монотонним*, якщо

$$(Ax - Ay, x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in C.$$

Похідна опуклої диференційовної функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонним оператором.

Коли оператор A монотонний, то множина розв'язків варіаційної нерівності (2.1) має одну важливу властивість.

Твердження 2.1. Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнена опукла множина та $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервний монотонний оператор. Тоді множина розв'язків варіаційної нерівності (2.1) є замкнутою та опуклою.

Доведення. Замкненість та опуклість множини $\mathbf{VI}(A, C)$ впливає з такої рівносильності:

$$x \in \mathbf{VI}(A, C) \Leftrightarrow x \in C : (Ay, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.4)$$

Доведемо (2.4). Нехай спочатку $x \in \mathbf{VI}(A, C)$. Унаслідок монотонності A ,

$$(Ay, y - x) \geq (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Тепер припустимо, що $x \in C$ та $(Ay, y - x) \geq 0$ для всіх $y \in C$. Для довільної точки $z \in C$ маємо $y = x + \lambda(z - x) \in C$, де $\lambda \in [0, 1]$, через опуклість C . Тому при $\lambda \in (0, 1)$ маємо

$$(A(x + \lambda(z - x)), \lambda(z - x)) \geq 0,$$

або

$$(A(x + \lambda(z - x)), z - x) \geq 0 \quad \forall z \in C.$$

Оскільки оператор A неперервний, то при $\lambda \rightarrow 0$ отримуємо, що $(Ax, z - x) \geq 0$ для всіх $z \in C$. Отже, $x \in \mathbf{VI}(A, C)$. \square

Узагалі варіаційні нерівності можуть мати багато розв'язків. Строга монотонність оператора A гарантує єдиність можливого розв'язку (2.1).

Означення 2.3. Оператор $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ називаємо *строго монотонним*, якщо

$$(Ax - Ay, x - y) > 0 \quad \forall x, y \in C, \quad x \neq y.$$

Твердження 2.2. *Якщо оператор A строго монотонний, то варіаційна нерівність (2.1) має не більше одного розв'язку.*

Доведення. Якщо x_1, x_2 — два розв'язки (2.1), то

$$\begin{aligned} (Ax_1, y - x_1) &\geq 0 \quad \forall y \in C, \\ (Ax_2, y - x_2) &\geq 0 \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

Поклавши $y = x_2$ (відповідно $y = x_1$) у першій (відповідно у другій) нерівності та склавши, отримаємо

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \leq 0,$$

звідки $x_1 = x_2$. \square

2.2. Варіаційні нерівності в гільбертовому просторі

У попередньому підрозділі ми вже зустрічали монотонні оператори у скінченновимірному просторі. Там строга монотонність була використана для доведення єдиності розв'язку варіаційної нерівності, а монотонність — опуклості множини розв'язків. У даному підрозділі ми розглянемо варіаційні нерівності в нескінченновимірному гільбертовому просторі. Властивість монотонності знайде важливе застосування в питанні існування розв'язків.

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — замкнена опукла множина.

Означення 2.4. Оператор $A : C \rightarrow H$ називаємо *монотонним*, якщо

$$(Ax - Ay, x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in C.$$

Монотонний оператор A називаємо *строго монотонним*, якщо

$$(Ax - Ay, x - y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Означення 2.5. Оператор $A : C \rightarrow H$ називаємо *неперервним на скінченновимірних підпросторах*, якщо для кожного скінченновимірного підпростору $E \subseteq H$ оператор $A : C \cap E \rightarrow H$ слабо неперервний.

Теорема 2.4. *Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла обмежена множина та $A : C \rightarrow H$ — монотонний та неперервний на скінченновимірних підпросторах оператор. Тоді існує елемент*

$$x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.5)$$

Доведення. Спочатку доведемо лему Мінті.

Лема 2.1 (Minty⁹, 1962). *Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла обмежена множина та $A : C \rightarrow H$ — монотонний і неперервний на скінченновимірних підпросторах оператор. Тоді нерівність (2.5) рівносильна нерівності*

$$x \in C : (Ay, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Доведення. Нехай спочатку $x \in C$ — розв'язок (2.5). Унаслідок монотонності оператора A

$$(Ay, y - x) \geq (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

⁹ Джордж Джеймс Мінті (George James Minty, 16.09.1929, Детройт — 6.08.1986, Блумінгтон) — американський математик. Займався функціональним аналізом та дискретною математикою. Один з авторів теорії монотонних операторів.

Тепер припустимо, що $x \in C$ та $(Ay, y - x) \geq 0$ для всіх $y \in C$. Для довільної точки $z \in C$ маємо $y = x + \lambda(z - x) \in C$, де $\lambda \in [0, 1]$, через опуклість C . Тому при $\lambda \in (0, 1)$ маємо

$$(A(x + \lambda(z - x)), z - x) \geq 0 \quad \forall z \in C.$$

Оскільки оператор A слабко неперервний на перетині C з лінійною оболонкою множини $\{x, z\}$, то при $\lambda \rightarrow 0$ отримуємо, що $(Ax, z - x) \geq 0$ для всіх $z \in C$. \square

Перейдемо до доведення теореми 2.4. Без обмеження загальності можна вважати, що $0 \in C$. Нехай $E \subseteq H$ — скінченновимірний підпростір, $\pi : E \rightarrow H$ — оператор вкладення та $\pi^* : H \rightarrow E$ — оператор, спряжений до π . Позначимо $C_E = C \cap E = C \cap \pi E$ та розглянемо оператор $\pi^* A \pi : C_E \rightarrow E$. Оскільки C_E — компактна опукла підмножина E та $\pi^* A \pi$ — неперервний оператор, то існує такий елемент $x_E \in C_E$, що $(\pi^* A \pi x_E, y - x_E) \geq 0$ для всіх $y \in C_E$, або

$$(Ax_E, y - x_E) \geq 0 \quad \forall y \in C_E.$$

За лемою Мінті

$$(Ay, y - x_E) \geq 0 \quad \forall y \in C_E. \quad (2.6)$$

Покладемо

$$S(y) = \{x \in C : (Ay, y - x) \geq 0\}.$$

Ясно, що для кожного $y \in C$ множина $S(y)$ слабко компактна. Отже, множина $\bigcap_{y \in C} S(y)$ слабко компактна. Покажемо, що вона непорожня. Для цього достатньо довести центрованість системи $\{S(y)\}_{y \in C}$, тобто показати, що

$$S(y_1) \cap S(y_2) \cap \dots \cap S(y_m) \neq \emptyset \quad (2.7)$$

для довільного скінченного набору $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq C$.

Позначимо через E лінійну оболонку векторів $\{y_1, \dots, y_m\}$, і нехай, як і раніше, $C_E = C \cap E$. За наведеними при доведенні (2.6) міркуваннями існує такий елемент $x_E \in C_E$, що $(Ay, y - x_E) \geq 0$ для всіх $y \in C_E$. Зокрема, $(Ay_i, y_i - x_E) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, і отже, $x_E \in S(y_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Таким чином, (2.7) виконується для довільного скінченного набору і тим самим існує елемент $x \in \bigcap_{y \in C} S(y)$. Ясно, що $(Ay, y - x) \geq 0$ для всіх $y \in C$, тому знову за лемою Мінті $(Ax, y - x) \geq 0$ для всіх $y \in C$. \square

Наслідок 2.2. *В умовах лемми 2.1 множина $VI(A, C)$ є опуклою та замкненою.*

Означення 2.6. Оператор $A : C \rightarrow H$ називаємо **коерцитивним**, якщо для деякого $x_0 \in C$ виконано

$$\frac{(Ax, x - x_0)}{\|x\|} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow +\infty, \quad x \in C.$$

Означення 2.7. Оператор $A : C \rightarrow H$ називають **сильно монотонним**, якщо існує додатна константа m така, що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq m \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

Сильно монотонний оператор є коерцитивним.

Теорема 2.5. Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла множина та $A : C \rightarrow H$ — монотонний, неперервний на скінченновимірних підпросторах та коерцитивний оператор. Тоді існує елемент $x \in C$, для якого виконується (2.5).

Доведення. Нехай $r > 0$ та $C_r = C \cap B_r$, де $B_r = \{y \in H : \|y\| \leq r\}$. Ясно, що C_r — обмежена, замкнена, опукла та при достатньо великих r ще й непорожня множина. З доведеного вище випливає існування такого $x_r \in C_r$, що

$$(Ax_r, y - x_r) \geq 0 \quad \forall y \in C_r. \quad (2.8)$$

При $r \geq \|x_0\|$ покладемо в (2.8) $y = x_0$. Одержимо

$$\frac{(Ax_r, x_r - x_0)}{\|x_r\|} \leq 0.$$

З умови коерцитивності A випливає обмеженість множини $\{x_r\}$. Виділимо з $\{x_r\}$ послідовність елементів x_{r_k} , $r_k \rightarrow +\infty$, що збіжна в H до деякого елемента x . Ясно, що $x \in C$ — розв'язок (2.5). Дійсно, для довільного $y \in C$ унаслідок леми Мінти для всіх достатньо великих номерів k маємо $(Ay, y - x_{r_k}) \geq 0$. Після граничного переходу отримаємо $(Ay, y - x) \geq 0$, а з леми Мінти випливає $x \in VI(A, C)$. \square

Наслідок 2.3. Нехай $A : H \rightarrow H$ — монотонний, неперервний на скінченновимірних підпросторах та коерцитивний оператор. Тоді для довільного $f \in H$ існує $x \in H$, для якого $Ax = f$.

Доведення. Оскільки для довільного $f \in H$ оператор $Ax - f$ теж монотонний, неперервний на скінченновимірних підпросторах та коерцитивний, то достатньо переконатись у розв'язності рівняння $Ax = 0$. У цьому переконуємось за допомогою теореми 2.5. \square

Доведемо сильніший варіант цього наслідку.

Наслідок 2.4. *Нехай оператор $A : H \rightarrow H$ монотонний, неперервний на скінченновимірних підпросторах та*

$$\|Ax\| \rightarrow +\infty \quad \text{рівномірно при} \quad \|x\| \rightarrow +\infty. \quad (2.9)$$

Тоді для довільного $f \in H$ існує $x \in H$, для якого $Ax = f$.

Доведення. При $\varepsilon > 0$ оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ монотонний та

$$\frac{(A_\varepsilon x, x)}{\|x\|} = \varepsilon \|x\| + \frac{(Ax, x)}{\|x\|} \geq \varepsilon \|x\| + \frac{(A(0), x)}{\|x\|}. \quad (2.10)$$

Оскільки відношення $\frac{(A(0), x)}{\|x\|}$ обмежене, то права частина (2.10) прямує до $+\infty$ при $\|x\| \rightarrow +\infty$. Згідно з попереднім наслідком, оператор A_ε сюр'єктивний. Нехай x_ε — розв'язок рівняння $A_\varepsilon x = f \in H$.

Покажемо, що норми $\|x_\varepsilon\|$ рівномірно обмежені за всіх $\varepsilon > 0$. Маємо

$$\frac{(f, x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|} = \frac{(A_\varepsilon x_\varepsilon, x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|} \geq \varepsilon \|x_\varepsilon\| - \|A(0)\|,$$

тому

$$\varepsilon \|x_\varepsilon\| \leq \|A(0)\| + \|f\| = K,$$

де K не залежить від ε . Оскільки $Ax_\varepsilon + \varepsilon x_\varepsilon = f$, то $\|Ax_\varepsilon\| \leq \varepsilon \|x_\varepsilon\| + \|f\| \leq \text{const}$, де константа не залежить від ε . Унаслідок (2.9) звідси випливає, що $\|x_\varepsilon\| \leq \text{const}$, де константа знову не залежить від ε .

Нехай $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Тоді з послідовності (x_{ε_k}) можна виділити слабо збіжну підпослідовність (яку знову позначимо через (x_{ε_k})), границю якої позначимо через x . Оскільки $Ax_{\varepsilon_k} + \varepsilon_k x_{\varepsilon_k} = f$, то $Ax_{\varepsilon_k} \rightarrow f$. Унаслідок монотонності A

$$(Ax_{\varepsilon_k} - Ay, x_{\varepsilon_k} - y) \geq 0 \quad \forall y \in H.$$

Після граничного переходу отримуємо

$$(f - Ay, x - y) \geq 0 \quad \forall y \in H.$$

Унаслідок леми Мінті маємо

$$(f - Ax, x - y) \geq 0 \quad \forall y \in H.$$

Звідси випливає $Ax - f = 0$. □

Зауваження 2.3. Якщо оператор A строго монотонний, то в теоремах 2.4, 2.5 і наслідках 2.3, 2.4 має місце єдиність розв'язку.

Зауваження 2.4. Якщо в наслідку 2.3 оператор A додатково сильно монотонний, то обернений оператор A^{-1} є ліпшицевим. А якщо оператор A ще й ліпшицевий, то A^{-1} — сильно монотонний.

Означення 2.8. Оператор $A : C \rightarrow H$ називаємо *хемінеперервним*, якщо для всіх $x, y \in C, z \in H$ функція

$$[0, 1] \ni \lambda \mapsto (A(x + \lambda(y - x)), z) \in \mathbb{R}$$

неперервна, тобто звуження оператора A на відрізки, що лежать у C , неперервне в слабкій топології H .

Зауваження 2.5. Усі твердження цього підрозділу справедливі для монотонних хемінеперервних операторів. Інструментом доведення в цій ситуації є лема Кнастера¹⁰–Куратовського¹¹–Мазуркевича¹².

2.3. Апроксимація Браудера–Тихонова

У цьому підрозділі розглядається схема апроксимації розв'язків (2.5), якщо вони існують, послідовністю розв'язків деяких допоміжних нерівностей, що мають ліпші властивості. Використання такої апроксимації для побудови регуляризуючих алгоритмів для задач оптимізації було запропоновано А. Тихоновим.¹³ Аналогічні загальніші твердження щодо спеціальної апроксима-

¹⁰Броніслав Кнастер (Bronislaw Knaster, 22.05.1893, Варшава — 3.11.1980, Вроцлав) — видатний польський математик, відомий своїми роботами по загальній топології. З 1939 року професор Львівського університету. З 1945 року жив та працював у Вроцлаві. Один з відомих результатів — теорема Кнастера–Тарського, яка стверджує, що множина всіх нерухомих точок монотонного відображення повної решітки в себе також є повною решіткою.

¹¹Казимир Куратовський (Kazimierz Kuratowski, 2.02.1896, Варшава — 18.06.1980, Варшава) — видатний польський математик–тополог. У 1927–1933 роках викладав у Львівській політехніці. З 1948 до 1967 очолював Інститут математики Польської академії наук.

¹²Стефан Мазуркевич (Stefan Mazurkiewicz, 25.09.1888, Варшава — 19.06.1945, Гродзиськ-Мазовецький) — видатний польський математик, професор Варшавського університету. Основні результати в топології, математичному аналізі та теорії ймовірностей. У 1933–1935 роках був президентом Польського математичного товариства. Був одним з засновників та головним редактором журналу «Fundamenta mathematicae».

¹³Андрій Миколайович Тихонов (17.10.1906, Гжатськ — 7.10.1993, Москва) — радянський математик і геофізик, академік АН СРСР, двічі Герой Соціалістичної Праці. Засновник факультету обчислювальної математики і кібернетики МГУ. Перші роботи студентських років присвячені топології і функціонального аналізу. Ввів поняття добутку топологічних просторів, довів теореми про компактність добутку компактних просторів та про існування нерухомої точки неперервних відображень топологічних векторних просторів. У 1956–1963 роках спільно з Олександром Самарським створив теорію однорідних різницевих схем. В рамках робіт над проблемами пошуку корисних копалин розробив теорію методів регуляризації.

ції розв'язків варіаційних нерівностей були доведені Ф. Браудером.¹⁴ Тому згідно з [17] називатимемо подібні апроксимації апроксимаціями Браудера–Тихонова.

Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $A : C \rightarrow H$ — монотонний хемінеперервний оператор. Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.11)$$

Припустимо, що $VI(A, C) \neq \emptyset$.

Зауваження 2.6. Множина $VI(A, C)$ замкнена та опукла.

Зафіксуємо сильно монотонний хемінеперервний оператор $R : C \rightarrow H$. Розв'язки нерівності (2.11) будемо наближати розв'язками нерівностей з операторами $A + \varepsilon R$, $\varepsilon > 0$:

$$\text{знайти } x_\varepsilon \in C : (Ax_\varepsilon + \varepsilon Rx_\varepsilon, y - x_\varepsilon) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.12)$$

Ясно, що варіаційна нерівність (2.12) має єдиний розв'язок. Наступна теорема описує основну асимптотичну властивість x_ε .

Теорема 2.6. *Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $A : C \rightarrow H$ — монотонний хемінеперервний оператор, $R : C \rightarrow H$ — сильно монотонний хемінеперервний оператор. Якщо $VI(A, C) \neq \emptyset$, то*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_\varepsilon - z\| = 0,$$

де $z \in VI(A, C)$ — єдиний розв'язок варіаційної нерівності

$$z \in VI(A, C) : (Rz, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in VI(A, C). \quad (2.13)$$

Доведення. Доведемо обмеженість $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$. Підставимо елемент $y \in VI(A, C)$ в (2.12). За лемою Мінті маємо

$$0 \geq (Ax_\varepsilon, y - x_\varepsilon) \geq \varepsilon(Rx_\varepsilon, x_\varepsilon - y). \quad (2.14)$$

¹⁴Фелікс Ерл Браудер (Felix Earl Browder, 31.07.1927, Москва — 10.12.2016, Принстон) — видатний американський математик, фахівець в галузі нелінійного функціонального аналізу. Син Ерла Браудера, відомого лівого політика, генерального секретаря Комуністичної партії США (1930–1945). Ф. Браудер у 1946 році роки закінчив MIT, а в 1948 році отримав ступінь PhD у Princeton University. Йому належать фундаментальні результати у теорії рівнянь в частинних похідних, функціональному аналізі, теорії нерухомих точок, теорії монотонних операторів. Відомий міжнародний фінансист та інвестор Вільям Браудер — його син.

Сильна монотонність \mathbf{R} дає

$$0 \geq \varepsilon(\mathbf{R}x_\varepsilon, x_\varepsilon - y) \geq \varepsilon(\mathbf{R}y, x_\varepsilon - y) + \varepsilon m \|x_\varepsilon - y\|^2,$$

де $m > 0$ — константа сильної монотонності оператора \mathbf{R} . Звідси

$$m \|x_\varepsilon - y\| \leq \|\mathbf{R}y\|.$$

Таким чином, множина $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ обмежена.

Нехай $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Тоді з послідовності (x_{ε_k}) можна виділити слабо збіжну підпослідовність (яку знову позначимо через (x_{ε_k})), границю якої позначимо через x^* . Ясно, що $x^* \in \mathbf{C}$. Перейшовши в нерівності

$$(\mathbf{A}y, y - x_{\varepsilon_k}) + \varepsilon_k(\mathbf{R}y, y - x_{\varepsilon_k}) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbf{C}$$

до границі, отримаємо $(\mathbf{A}y, y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbf{C}$, тобто $x^* \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Покажемо, що (x_{ε_k}) сильно збігається до z — єдиного розв'язку варіаційної нерівності (2.13). Унаслідок сильної монотонності \mathbf{R} це впливатиме з

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{R}x_{\varepsilon_k} - \mathbf{R}z, x_{\varepsilon_k} - z) = 0. \quad (2.15)$$

Завдяки (2.14) маємо

$$0 \leq (\mathbf{R}x_{\varepsilon_k} - \mathbf{R}z, x_{\varepsilon_k} - z) \leq -(\mathbf{R}z, x_{\varepsilon_k} - z) = (\mathbf{R}z, z - x_{\varepsilon_k}).$$

Звідси

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{R}x_{\varepsilon_k} - \mathbf{R}z, x_{\varepsilon_k} - z) \leq (\mathbf{R}z, z - x^*) \leq 0.$$

Таким чином, виконується (2.15).

З єдиності елемента z впливає сильна збіжність кривої $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ до z при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Якщо $\mathbf{R}x = x - \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{H}$, то теорема 2.6 дає $x_\varepsilon \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})}\mathbf{a}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

З теореми 2.6 впливає

Наслідок 2.5. *Нехай оператор $\mathbf{A} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ монотонний, хемінеперервний, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ та $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \neq \emptyset$. Тоді*

$$x_\varepsilon = (\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})^{-1}\mathbf{f} \rightarrow z = \mathbf{P}_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}}\mathbf{0} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Елемент $z = \mathbf{P}_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}}\mathbf{0}$ називають **нормальним розв'язком** операторного рівняння $\mathbf{A}x = \mathbf{f}$ (розв'язком з мінімальною нормою).

2.4. Проксимальний метод

Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $A : C \rightarrow H$ — монотонний хемінеперервний оператор.

Означення 2.9. *Проксимальним оператором* (щодо A) називають оператор $J_A : H \rightarrow 2^C$:

$$x \mapsto J_A x = \{z \in C : (Az, y - z) + (z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in C\}.$$

Проксимальний оператор J_A всюди визначений, однозначний та має місце нерівність

$$\|J_A x - J_A y\|^2 \leq (J_A x - J_A y, x - y) \quad \forall x, y \in H,$$

яка рівносильна такій:

$$\|J_A x - J_A y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - J_A x) - (y - J_A y)\|^2 \quad \forall x, y \in H. \quad (2.16)$$

Крім того, множина нерухомих точок оператора J_A збігається з $VI(A, C)$.

Розглянемо ітераційний процес, породжений проксимальним оператором, а саме: нехай

$$x_{n+1} = J_A x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.17)$$

де $x_0 \in H$ — довільна початкова точка.

Процес (2.17) називають проксимальним методом; він є, по суті, лише методом простої ітерації для пошуку нерухокої точки оператора J_A . Зазначимо, що проксимальний метод є дворівневим: на кожній його ітерації слід розв'язати допоміжну варіаційну нерівність (але із сильно монотонним оператором $x \mapsto Ax + x - x_n$), що вимагає свого, узагалі кажучи, нескінченного обчислювального процесу.

Припустимо, що $VI(A, C) \neq \emptyset$. З нерівності (2.16) для $\|x_{n+1} - z\|^2$, де $z \in VI(A, C)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|J_A x_n - J_A z\|^2 \leq \\ &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - J_A x_n\|^2 = \|x_n - z\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Звідси

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \|x_n - z\|$$

та

$$\sum_{k=0}^n \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_0 - z\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Таким чином, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$, послідовність (x_n) обмежена, а з (2.18) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (2.19)$$

Покажемо за допомогою (2.19), що всі часткові слабкі границі послідовності (x_n) належать $VI(A, C)$. Нехай підпослідовність (x_{n_k}) слабо збігається до $z \in H$. Очевидно, що $z \in C$. Маємо

$$(Ax_{n_k+1}, x - x_{n_k+1}) + (x_{n_k+1} - x_{n_k}, x - x_{n_k+1}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідси для всіх $x \in C$ отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_{n_k+1} - x_{n_k}, x - x_{n_k+1}) + (Ax, x - x_{n_k+1}) = \\ &= (x_{n_k+1} - x_{n_k}, x - x_{n_k+1}) + (Ax, x - x_{n_k}) + (Ax, x_{n_k} - x_{n_k+1}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ в (2.20), отримаємо $(Ax, x - z) \geq 0$ для всіх $x \in C$, тобто $z \in VI(A, C)$.

Покажемо, що (x_n) слабо збігається до деякого елемента $z \in VI(A, C)$. Нехай $a, b \in VI(A, C)$ — дві слабкі часткові границі послідовності (x_n) . Припустимо, що $a \neq b$, $x_{n_k} \rightharpoonup a$, $x_{n_l} \rightharpoonup b$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - a\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - b\| = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - b\| < \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - a\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|. \end{aligned}$$

Ця нерівність указує на те, що $a = b$. Отже, послідовність (x_n) слабо збіжна.

Має місце

Теорема 2.7. *Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $A : C \rightarrow H$ — монотонний хемінеперервний оператор. Якщо $VI(A, C) \neq \emptyset$, то породжена проксимальним методом (2.17) послідовність (x_n) слабо збігається до деякої точки з $VI(A, C)$.*

З теореми 2.7 випливає

Наслідок 2.6. *Нехай оператор $A : H \rightarrow H$ монотонний, хемінеперервний, $f \in H$ та $A^{-1}f \neq \emptyset$. Тоді послідовність (x_n) , що задана формулою*

$$x_{n+1} = (A + I)^{-1}(x_n + f), \quad x_0 \in H,$$

слабо збігається до деякого розв'язку рівняння $Ax = f$.

2.5. Задачі

Задача 2.1. Доведіть, що для гладкої задачі опуклого програмування $f \rightarrow \min_C$ має місце:

$$x \in \operatorname{argmin}_C f \iff x \in C \wedge (\nabla f(x), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Задача 2.2. Сформулюйте у вигляді варіаційної нерівності задачу пошуку сідлової точки опукло-угнутої функції.

Задача 2.3. Сформулюйте у вигляді варіаційної нерівності задачу пошуку точок рівноваги Неша.

Задача 2.4. Доведіть, що похідна опуклої диференційовної функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонним оператором.

Задача 2.5. Доведіть, що похідна сильно опуклої диференційовної функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є сильно монотонним оператором.

Задача 2.6. Доведіть нерівність (2.16).

Задача 2.7. Доведіть, що для розв'язків варіаційної нерівності (2.12) має місце оцінка:

$$\|x_\varepsilon - x_\delta\| \leq \frac{|\varepsilon - \delta| \|R x_\delta\|}{\varepsilon m},$$

де $m > 0$ — константа сильної монотонності оператора R .

Розділ 3

Основні методи розв'язання варіаційних нерівностей

Нехай C — непорожня підмножина дійсного гільбертового простору H , $A : H \rightarrow H$ — оператор, що діє в H . У даному розділі ми розглянемо основні проекційні методи розв'язання варіаційних нерівностей вигляду:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (3.1)$$

Якщо не вказано інше, будемо припускати виконаними такі умови:

- A1) множина $C \subseteq H$ замкнена та опукла;
- A2) оператор $A : H \rightarrow H$ монотонний та ліпшицевий (зі сталою $L > 0$) на множині C ;
- A3) $V(A, C) \neq \emptyset$.

Серед методів розв'язання (3.1) проекційні є ідейно та практично найпростішими. Їх теоретичним підґрунтям є рівносильність варіаційної нерівності (3.1) та задачі пошуку нерухомої точки оператора $P_C(I - \lambda A)$, де $\lambda > 0$.

Проекційні методи для варіаційних нерівностей беруть свій початок з робіт Гольдштейна¹ [18] та Левітіна² і Поляка³ [19], в яких незалежно запропоновано метод проекції градієнта для задачі умовної оптимізації. Для (3.1) аналог цього методу генерує послідовність (x_n) за правилом

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \quad (3.2)$$

¹Аллен Гольдштейн (Allen A. Goldstein) — американський математик. Основні результати пов'язані з розробкою теорії та методів оптимізації.

²Левітін Євген Соломонович — радянський та російський математик.

³Борис Теодорович Поляк (нар. 4.05.1935) — видатний радянський та російський математик, завідувач лабораторії імені Я.З. Ципкіна ІПУ РАН, д.т.н., професор МФТІ. Займається теорією керування та оптимізацією.

де $\lambda > 0$. Для збіжності (x_n) до розв'язку (3.1) необхідно накласти на A більш сильні умови, ніж просто монотонність. Зокрема, якщо A — сильно монотонний або обернено сильно монотонний (ко-коерцитивний), то послідовність (x_n) збігається⁴ до розв'язку (3.1) (у першому випадку — сильно, у другому — слабо).

У випадку лише монотонності оператора A найпростіша схема (3.2) не гарантує збіжності.

У 1976 р. Г. М. Корпелевич⁵ запропонувала для розв'язання (3.1) в евклідовому просторі \mathbb{R}^m , так званий, екстраградієнтний алгоритм [20] (див. також роботу А. С. Антіпіна⁶ [21]):

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ay_n), \end{cases} \quad (3.3)$$

де $\lambda \in (0, 1/L)$. Вона довела збіжність послідовностей (x_n) і (y_n) до деякого розв'язку нерівності (3.1).

Узагальненню і дослідженню цього алгоритму присвячена велика кількість публікацій. Зокрема, у 2006 р. N. Nadezhkina та W. Takahashi⁷ [22] розглянули екстраградієнтний алгоритм для монотонних варіаційних нерівностей в нескінченновимірному гільбертовому просторі та довели його слабку збіжність. А у 2010 р. російські дослідники Зикіна та Меленьчук [23] запропонували такий двокроковий екстраградієнтний алгоритм

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ z_n = P_C(y_n - \lambda Ay_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Az_n). \end{cases}$$

⁴Величина крокового множника λ у першому випадку обирається з інтервалу $(0, 2\mu/L^2)$, де $\mu > 0$, $L > 0$ — сталі сильної монотонності та Ліпшиця оператора A , відповідно, у другому випадку — з $(0, 2\alpha)$, де $\alpha > 0$ стала ко-коерцитивності A . Нагадаємо, що оператор $A : H \rightarrow H$ називають ко-коерцитивним (обернено сильно монотонним), якщо існує додатня константа α така, що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

⁵Галина Михайлівна Корпелевич (1938 — 1985) — радянський математик.

⁶Антіпін Анатолій Сергійович (нар. 10.09.1939, Іркутськ) — російський математик, д.ф.-м.н. Працює в Обчислювальному центрі імені А. О. Дородніцина. Основні результати пов'язані з розробкою теорії та методів рівноважного програмування.

⁷Ватару Такахаши (Wataru Takahashi, 22.01.1944, Токіо — 19.11.2020) — видатний японський математик. Займався нелінійним функціональним аналізом. Основні результати пов'язані з нелінійною ергодичною теорією нерозтягуючих напівгруп, теоремами про нерухомі точки для нелінійних відображень, опуклими метричними просторами та методами апроксимації нерухомих точок.

У 2011 р. Y. Censor⁸, A. Gibali та S. Reich⁹ [24] запропонували модифікацію алгоритму Корпелевич з одним метричним проектуванням на допустиму множину C — субградієнтний екстраградієнтний алгоритм, що має вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_n = P_C(\mathbf{x}_n - \lambda A\mathbf{x}_n), \\ T_n = \{\mathbf{z} \in H : (\mathbf{x}_n - \lambda A\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n, \mathbf{z} - \mathbf{y}_n) \leq 0\}, \\ \mathbf{x}_{n+1} = P_{T_n}(\mathbf{x}_n - \lambda A\mathbf{y}_n), \end{cases} \quad (3.4)$$

де $\lambda \in (0, 1/L)$. Друга проекція в (3.4) має явну форму. Тому цей метод є привабливим, коли проектування на допустиму множину C є складною задачею. Зазначимо, що незалежно алгоритм (3.4) був запропонований Т. А. Войтовою, В. В. Семеновим і С. І. Ляшком [25] в контексті задач рівноважного програмування. В роботах [24, 25] доведена слабка збіжність породжених цим алгоритмом послідовностей (\mathbf{x}_n) і (\mathbf{y}_n) до деякого розв'язку варіаційної нерівності (3.1).

Альтернативою до екстраградієнтного методу є така схема, запропонована в 2000 р. Р. Tseng¹⁰ [26]

$$\begin{cases} \mathbf{y}_n = P_C(\mathbf{x}_n - \lambda A\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \lambda(A\mathbf{x}_n - A\mathbf{y}_n), \end{cases} \quad (3.5)$$

де $\lambda \in (0, 1/L)$. Послідовності (\mathbf{x}_n) і (\mathbf{y}_n) слабо збіжні до деякого розв'язку нерівності (4.1). Обидва алгоритми (3.4) і (3.5) мають однакову складність ітераційного кроку: одне проектування на C та обчислення двох значень оператора A .

У 1980 р. Л. Д. Попов¹¹ [27] запропонував цікавий метод, подібний до екстраградієнтного, але з використанням в ітераційному кроці лише одного значення оператора A

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = P_C(\mathbf{x}_n - \lambda A\mathbf{y}_n), \\ \mathbf{y}_{n+1} = P_C(\mathbf{x}_{n+1} - \lambda A\mathbf{y}_n), \end{cases} \quad (3.6)$$

⁸Яір Цензор (Yair Censor, нар. 29.11.1943, Рішон-ле-Ціон) — видатний ізраїльський математик, професор Хайфського університету. Займається алгоритмами оптимізації та застосуваннями в медичній візуалізації та плануванні лікування радіаційною терапією (IMRT). Заснував Центр обчислювальної математики та наукових обчислень при Хайфському університеті.

⁹Сімеон Райх (Simeon Reich, нар. 12.08.1948) — видатний ізраїльський математик. Займається нелінійним функціональним аналізом. Зробив значний внесок в метричну теорію нерухомих точок та теорію нелінійних операторних рівнянь.

¹⁰Пол Цзен (Paul Tseng, 21.09.1959, Сінчжу, Тайвань — 13.08.2009 (?)) — відомий американський та канадський математик. Зробив значний внесок в математичне програмування. Пол Цзен зник під час каякінгу на річці Янцзи в китайській провінції Юньнань.

¹¹Леонід Денисович Попов (12.08.1952, Свердловськ) — російський математик, д.ф.-м.н., професор. Спеціаліст в галузі математичного програмування та математичної економіки. Займається некоректними задачами умовної оптимізації, задачами економічної рівноваги, варіаційними нерівностями, розробкою паралельних алгоритмів.

де $\lambda \in (0, 1/3L)$. У роботі [27] обґрунтовано збіжність (3.6) для скінченновимірному простору. У 2014 р. Ю. В. Маліцький і В. В. Семенов [28] довели слабку збіжність (3.6) для варіаційних нерівностей в нескінченновимірному гільбертовому просторі та запропонували модифікацію алгоритму Попова з одним метричним проектуванням на допустиму множину C

$$\begin{cases} T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, z - y_n) \leq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n), \end{cases}$$

де $\lambda \in (0, 1/3L)$.

У 2015 р. Ю. В. Маліцький [29] опублікував, так званий, проєктивний відбиваючий алгоритм

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_n, \end{cases} \quad (3.7)$$

де $\lambda \in (0, (\sqrt{2} - 1)L^{-1})$, та довів його слабку збіжність.

Нещодавно Юрієм Маліцьким з колегами [30, 31] були запропоновані такі схеми (вони ідейно близькі до методів (3.6) та (3.7)):

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A x_n - \lambda(Ax_n - Ax_{n-1})), \quad \lambda \in (0, 1/2L),$$

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A x_n) - \lambda(Ax_n - Ax_{n-1}), \quad \lambda \in (0, 1/3L).$$

Тут ми закінчимо цей невеликий огляд та перейдемо до більш близького знайомства з методами.

3.1. Найпростіший проєкційний метод

Розглянемо ітераційний процес.

Алгоритм 3.1.

1) *Задаємо* $x_0 \in C$, $\lambda > 0$.

2) *Для* x_n *обчислюємо*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A x_n).$$

3) *Якщо* $x_n = x_{n+1}$, *то СТОП, інакше покладаємо* $n := n + 1$ *та переходимо на крок 2.*

При зупинці алгоритму 3.1 отримуємо розв'язок варіаційної нерівності (3.1). Дійсно, рівність $x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ax_n)$ рівносильна варіаційній нерівності

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda Ax_n, x - x_{n+1}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

З урахуванням умови $x_n = x_{n+1}$ маємо $x_n \in VI(A, C)$.

Розглянемо спочатку випадок ліпшицевого та сильно монотонного оператора A , тобто вважаємо, що

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| &\leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in C, \\ (Ax - Ay, x - y) &\geq \alpha \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C, \end{aligned}$$

де $L, \alpha > 0$. У цьому випадку варіаційна нерівність (3.1) має єдиний розв'язок $z \in C$.

Для $\lambda > 0$ введемо оператор $Tx = P_C(x - \lambda Ax)$, що діє із C в C . Покажемо, що він є стискаючим при $0 < \lambda < 2\alpha L^{-2}$. Маємо:

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &= \|P_C(x - \lambda Ax) - P_C(y - \lambda Ay)\|^2 \leq \\ &\leq \|x - \lambda Ax - y + \lambda Ay\|^2 = \|x - y\|^2 + \lambda^2 \|Ax - Ay\|^2 - \\ &\quad - 2\lambda(Ax - Ay, x - y) \leq (1 + \lambda^2 L^2 - 2\alpha\lambda) \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

тобто

$$\|Tx - Ty\| \leq q(\lambda) \|x - y\| \quad \forall x, y \in C, \quad (3.8)$$

де $q(\lambda) = \sqrt{1 + \lambda^2 L^2 - 2\alpha\lambda}$. Оскільки $0 < \lambda < 2\alpha L^{-2}$, то $0 < q(\lambda) < 1$. Це означає, що оператор T стискаючий. Зазначимо, що замкнена множина $C \subseteq H$ є повним метричним простором з метрикою $d(x, y) = \|x - y\|$. Алгоритм 3.1 при $0 < \lambda < 2\alpha L^{-2}$, записаний у вигляді $x_{n+1} = Tx_n$, є класичним процесом пошуку нерухомої точки стискаючого оператора T , яка існує, єдина та є розв'язком (3.1). З (3.8) випливає

$$\|x_n - x_k\| \leq q(\lambda)^n \|x_0 - x_{k-n}\| \quad \forall k \geq n.$$

Звідси при $k \rightarrow \infty$ отримуємо оцінку

$$\|x_n - z\| \leq q(\lambda)^n \|x_0 - z\| \quad n = 0, 1, \dots$$

Отже, має місце така теорема.

Теорема 3.1. *Нехай C — опукла замкнена множина, оператор A ліпшицевий і сильно монотонний на C . Нехай $0 < \lambda < 2\alpha L^{-2}$, де L, α — сталі ліпшицевості та сильної монотонності оператора A , відповідно. Тоді по-*

роджена алгоритмом 3.1 послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку (3.1) z , причому справедлива оцінка

$$\|x_n - z\| \leq q(\lambda)^n \|x_0 - z\| \quad n = 0, 1, \dots,$$

де $q(\lambda) = \sqrt{1 - 2\alpha\lambda + \lambda^2 L^2} \in (0, 1)$.

Зауваження 3.1. Найменше значення $q(\lambda)$ при $0 < \lambda < 2\alpha L^{-2}$ досягається в $\lambda_0 = \alpha L^{-2}$ та становить $q(\lambda) = \sqrt{1 - \alpha^2 L^{-2}}$.

Тепер розглянемо алгоритм 3.1 у випадку варіаційної нерівності з обернено сильно монотонним оператором A .

Означення 3.1. Оператор $A : C \rightarrow H$ називають **обернено сильно монотонним** (ко-коерцитивним), якщо існує додатна константа α така, що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

У цьому випадку кажуть, що A — α -обернено сильно монотонний.

Важливим прикладом обернено сильно монотонних операторів є ліпшицеві похідні опуклих функціоналів.

Теорема 3.2. Нехай функціонал $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ диференційовний за Фреше. Тоді такі умови рівносильні:

- 1) функціонал f опуклий та похідна ∇f задовольняє умову Ліпшица зі сталою $L > 0$;
- 2) для всіх $x, y \in H$:

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2;$$

- 3) для всіх $x, y \in H$:

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \frac{1}{L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.$$

Доведення. Покажемо, що $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$. Має місце

Лема 3.1. Нехай функціонал $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ — обмежений знизу та диференційовний за Фреше; похідна ∇f задовольняє умову Ліпшица зі сталою $L > 0$. Тоді

$$\inf_H f \leq f(x) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x)\|^2 \quad \forall x \in H. \quad (3.9)$$

Доведення. Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$ маємо

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}) + \int_0^1 (\nabla f(\mathbf{x} + \tau(\mathbf{y} - \mathbf{x})), \mathbf{y} - \mathbf{x}) d\tau = f(\mathbf{x}) + \\ &+ (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) + \int_0^1 (\nabla f(\mathbf{x} + \tau(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) d\tau. \end{aligned}$$

Оцінимо підінтегральний вираз

$$\begin{aligned} (\nabla f(\mathbf{x} + \tau(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) &\leq \\ &\leq \|\nabla f(\mathbf{x} + \tau(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \tau \cdot L \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Отримуємо

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{L}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2.$$

Поклавши $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{x})$, матимемо

$$f\left(\mathbf{x} - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{x})\right) \leq f(\mathbf{x}) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2.$$

Оцінивши ліву частину через $\inf_{\mathbf{H}} f$, отримуємо нерівність (3.9). \square

Для $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ розглянемо допоміжний функціонал

$$\mathbf{y} \mapsto \Phi(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y}).$$

Функціонал Φ опуклий, похідна $\nabla \Phi(\mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x})$ задовольняє умову Ліпшица зі сталою $L > 0$. Крім того, $\mathbf{x} \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathbf{H}} \Phi(\mathbf{y})$ ¹². Нерівність (3.9) для Φ дає

$$f(\mathbf{x}) - (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) - (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) - (2L)^{-1} \|\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x})\|^2,$$

що і треба було довести.

2) \Rightarrow 3). Маємо

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) &\geq (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) + (2L)^{-1} \|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|^2, \\ f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) &\geq (\nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) + (2L)^{-1} \|\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x})\|^2. \end{aligned}$$

¹²Нагадаємо, що з опуклості f випливає

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}.$$

Склавши ці нерівності, отримаємо

$$0 \geq (\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) + (2L)^{-1} \|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|^2,$$

що і треба було довести.

3) \Rightarrow 1). Очевидно. \square

Має місце

Теорема 3.3. *Нехай C — опукла замкнена множина, оператор A обернено сильно монотонний на C . Нехай $0 < \lambda < 2\alpha$, де α — стала оберненої сильної монотонності оператора A . Тоді породжена алгоритмом 3.1 послідовність (\mathbf{x}_n) слабо збігається до деякого розв'язку (3.1).*

Доведення. Для $0 < \lambda < 2\alpha$ розглянемо оператори

$$T\mathbf{x} = P_C S\mathbf{x}, \quad S\mathbf{x} = \mathbf{x} - \lambda A\mathbf{x}.$$

Множина нерухомих точок оператора T збігається з множиною $VI(A, C)$ розв'язків варіаційної нерівності (3.1), а алгоритм 3.1 записується у вигляді

$$\mathbf{x}_{n+1} = T\mathbf{x}_n.$$

Для оператора S має місце оцінка

$$\|S\mathbf{x} - S\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \left(\frac{2\alpha}{\lambda} - 1\right) \|(\mathbf{x} - S\mathbf{x}) - (\mathbf{y} - S\mathbf{y})\|^2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C.$$

Ураховуючи опуклість функції $\|\cdot\|^2$, отримаємо

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x} - T\mathbf{x}) - (\mathbf{y} - T\mathbf{y})\|^2 / 2 &= \|(\mathbf{x} - P_C S\mathbf{x}) - (\mathbf{y} - P_C S\mathbf{y})\|^2 / 2 = \|(\mathbf{x} - S\mathbf{x}) - \\ &\quad - (\mathbf{y} - S\mathbf{y}) + (S\mathbf{x} - P_C S\mathbf{x}) - (S\mathbf{y} - P_C S\mathbf{y})\|^2 / 2 \leq \\ &\leq \|(\mathbf{x} - S\mathbf{x}) - (\mathbf{y} - S\mathbf{y})\|^2 + \|(S\mathbf{x} - P_C S\mathbf{x}) - (S\mathbf{y} - P_C S\mathbf{y})\|^2 \leq \\ &\leq \lambda(2\alpha - \lambda)^{-1} \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|S\mathbf{x} - S\mathbf{y}\|^2 \right) + \|S\mathbf{x} - S\mathbf{y}\|^2 - \|P_C S\mathbf{x} - P_C S\mathbf{y}\|^2 \leq \\ &\leq \max \{ \lambda(2\alpha - \lambda)^{-1}, 1 \} \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|P_C S\mathbf{x} - P_C S\mathbf{y}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \mu \|(\mathbf{x} - T\mathbf{x}) - (\mathbf{y} - T\mathbf{y})\|^2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \quad (3.10)$$

де $\mu = (\max \{ 2\lambda(2\alpha - \lambda)^{-1}, 2 \})^{-1} > 0$.

Використовуючи (3.10), оцінимо зверху $\|x_{n+1} - z\|^2$, де $z \in VI(A, C)$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|Tx_n - Tz\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \\ &\quad - \mu \|x_n - Tx_n\|^2 = \|x_n - z\|^2 - \mu \|x_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Звідси

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \|x_n - z\|,$$

та

$$\mu \sum_{k=0}^n \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_0 - z\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Таким чином, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$, послідовність (x_n) обмежена, а з (3.11) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (3.12)$$

Покажемо за допомогою (3.12), що всі часткові слабкі границі послідовності (x_n) належать $VI(A, C)$. Нехай підпослідовність (x_{n_k}) слабо збігається до $z \in H$. Очевидно, що $z \in C$. Маємо

$$(x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + \lambda Ax_{n_k}, x - x_{n_{k+1}}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідси для всіх $x \in C$ отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}, x - x_{n_{k+1}}) + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + \\ &\quad + \lambda (Ax_{n_k}, x - x_{n_k}) \leq (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}, x - x_{n_{k+1}}) + \\ &\quad + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + \lambda (Ax, x - x_{n_k}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ в (3.13), отримаємо

$$(Ax, x - z) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

тобто $z \in VI(A, C)$.

Покажемо, що (x_n) слабо збігається до деякого елемента $z \in VI(A, C)$. Нехай $a, b \in VI(A, C)$ — дві слабкі часткові границі послідовності (x_n) . Припустимо, що $a \neq b$, $x_{n_k} \rightharpoonup a$, $x_{n_l} \rightharpoonup b$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - a\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - b\| = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - b\| < \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - a\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|. \end{aligned}$$

Ця нерівність указує на те, що $a = b$. Отже, (x_n) слабо збіжна. \square

Розглянемо регуляризований варіант найпростішого проєкційного методу для нерівностей з обернено сильно монотонними ліпшицевими операторами. Зафіксуємо число $\lambda \in (0, 2\alpha)$, де α — стала оберненої сильної монотонності оператора A , і послідовність чисел (α_n) таку, що $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) / \alpha_{n+1} = 0$.

Алгоритм 3.2.

1) *Задаємо $x_0 \in H$.*

2) *Для x_n обчислюємо*

$$\begin{aligned} y_n &= P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} &= P_C(1 - \alpha_n)y_n. \end{aligned}$$

3) *Покладаємо $n := n + 1$ та переходимо на крок 2.*

Покажемо, що послідовності (x_n) , (y_n) обмежені. Для $z \in VI(A, C)$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\| &= \|P_C(1 - \alpha_n)y_n - P_C z\| \leq \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)y_n - z\| \leq (1 - \alpha_n)\|y_n - z\| + \alpha_n\|z\| = \\ &= (1 - \alpha_n)\|P_C(x_n - \lambda Ax_n) - P_C(z - \lambda Az)\| + \alpha_n\|z\| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - z\| + \alpha_n\|z\| \leq \max\{\|x_n - z\|, \|z\|\}. \end{aligned}$$

Тому

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \max\{\|x_0 - z\|, \|z\|\}. \quad (3.14)$$

З (3.14) випливає обмеженість послідовності (x_n) . Обмеженість (y_n) випливає з формули $y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n)$.

Покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \quad (3.15)$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (3.16)$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|P_C(1 - \alpha_n)y_n - P_C(1 - \alpha_{n-1})y_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)y_n - (1 - \alpha_{n-1})y_{n-1}\| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \cdot \|y_{n-1}\|. \end{aligned}$$

З леми 1.11 випливає (3.15). Тепер можемо отримати (3.16) із (3.15).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| &\leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\| + \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}_n\| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\| + \\ &+ \|\mathbf{P}_C(1 - \alpha_n)\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\| + \alpha_n \|\mathbf{y}_n\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

З обмеженості (\mathbf{x}_n) випливає існування підпослідовності (\mathbf{x}_{n_k}) , що слабо збігається до деякої точки $\mathbf{w} \in \mathbf{H}$. Покажемо, що $\mathbf{w} \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. Ясно, що $\mathbf{w} \in \mathbf{C}$. Маємо

$$(\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}_{n_k} + \lambda \mathbf{A}\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}.$$

Звідси

$$(\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k}) + \lambda (\mathbf{A}\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}) + \lambda (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C},$$

тобто $\mathbf{w} \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Розглянемо елемент $\mathbf{x}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})}\mathbf{0}$. Доведемо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*) \leq 0. \quad (3.17)$$

Виділимо з (\mathbf{x}_n) підпослідовність (\mathbf{x}_{n_k}) таку, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}^*).$$

Можна вважати, що $\mathbf{x}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{w} \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. Тому маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}^*) = (-\mathbf{x}^*, \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) \leq 0,$$

чим і доводимо (3.17).

Покажемо тепер, що $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}^*$. Маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*\|^2 &= \|\mathbf{P}_C(1 - \alpha_n)\mathbf{y}_n - \mathbf{x}^*\|^2 = \|\mathbf{P}_C(1 - \alpha_n)\mathbf{y}_n - \mathbf{P}_C\mathbf{x}^*\|^2 \leq \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}^*) - \alpha_n\mathbf{x}^*\|^2 = (1 - \alpha_n)^2 \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ &+ 2(1 - \alpha_n)\alpha_n(\mathbf{x}^* - \mathbf{y}_n, \mathbf{x}^*) + \alpha_n^2 \|\mathbf{x}^*\|^2 \leq (1 - \alpha_n) \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ &+ 2(1 - \alpha_n)\alpha_n \left\{ (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n, \mathbf{x}^*) + (\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n, \mathbf{x}^*) + \alpha_n \|\mathbf{x}^*\|^2 \right\}. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Застосувавши до рекурентної нерівності (3.18) лему 1.11, робимо висновок, що $x_n \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$. А з (3.16) випливає $y_n \rightarrow x^*$.

Отже, має місце

Теорема 3.4. *Нехай C — опукла замкнена множина, оператор A обернено сильно монотонний на C . Нехай $0 < \lambda < 2\alpha$, де α — стала оберненої сильної монотонності оператора A , послідовність чисел (α_n) така, що $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) / \alpha_{n+1} = 0$. Тоді породжені алгоритмом 3.2 послідовності (x_n) та (y_n) сильно збігаються до єдиного нормального розв'язку $x^* = P_{V(A,C)} 0$ задачі (3.1).*

Перейдемо до вивчення ітераційного алгоритму 3.1 у випадку лише монотонних і хемінеперервних операторів A .

Зафіксуємо послідовність додатних чисел (λ_n) , що задовольняє умову

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty. \quad (3.19)$$

Розглянемо

Алгоритм 3.3.

1) *Задаємо $x_0 \in C$.*

2) *Для x_n обчислюємо*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A x_n).$$

3) *Якщо $x_n = x_{n+1}$, то СТОП, інакше покладаємо $n := n + 1$ та переходимо на крок 2.*

Розглянемо послідовність середніх за Чезаро:

$$z_n = \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k}.$$

Щодо оператора A зробимо таке припущення:

$$\text{послідовність } (Ax_n) \text{ обмежена.} \quad (3.20)$$

Лема 3.2. *Для породженої алгоритмом 3.3 послідовності (x_n) і точки $y \in C$ виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \|Ax_n\|^2 - 2\lambda_n (Ay, x_n - y). \quad (3.21)$$

Доведення. Для $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ та \mathbf{x}_{n+1} маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_n - \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{x}_n) - \mathbf{y}\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 + \lambda_n^2 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_n\|^2 - 2\lambda_n (\mathbf{A}\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Оператор \mathbf{A} — монотонний. Тому $(\mathbf{A}\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n - \mathbf{y}) \geq (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{x}_n - \mathbf{y})$. Отже,

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 + \lambda_n^2 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_n\|^2 - 2\lambda_n (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{x}_n - \mathbf{y}),$$

що і треба було довести. \square

Лема 3.3. Для породженої алгоритмом 3.3 послідовності (\mathbf{x}_n) , послідовності середніх (\mathbf{z}_n) і точки $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ виконується нерівність

$$\frac{\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|^2}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} \leq 2 (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}_n) + \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_k^2 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|^2}{\sum_{k=0}^n \lambda_k}. \quad (3.22)$$

Доведення. Подамо нерівність леми 3.2 у вигляді

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|^2 \leq 2 (\mathbf{A}\mathbf{y}, \lambda_k \mathbf{y} - \lambda_k \mathbf{x}_k) + \lambda_k^2 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|^2. \quad (3.23)$$

Підсумувавши (3.23) за k від 0 до $n \in \mathbb{N}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\|^2 &\leq 2 \left(\mathbf{A}\mathbf{y}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \mathbf{y} - \sum_{k=0}^n \lambda_k \mathbf{x}_k \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Розділивши (3.24) на $\sum_{k=0}^n \lambda_k$, приходимо до (3.22). \square

Припустимо, що $\mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Має місце

Лема 3.4. Нехай (\mathbf{x}_n) — породжена алгоритмом 3.3 послідовність. Тоді для довільної точки $\mathbf{y} \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathcal{C})$ існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|$. Зокрема, послідовність (\mathbf{x}_n) обмежена.

Доведення. Використаємо леми 1.10 та 3.2. У нерівності (3.21) покладемо $\mathbf{y} \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathcal{C})$. Отримаємо

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 + \lambda_n^2 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_n\|^2, \quad (3.25)$$

оскільки $(\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{x}_n - \mathbf{y}) \geq 0$. З нерівності (3.25), припущення (3.20) та умови $(\lambda_n) \in \ell_2$ впливає існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| \in \mathbb{R}$. \square

Обмеженість послідовності (x_n) зумовлює обмеженість послідовності середніх (z_n) . А з леми 3.3 випливає

Лема 3.5. *Усі слабкі часткові границі послідовності середніх (z_n) належать множині $VI(A, C)$.*

Доведення. Розглянемо слабо збіжну підпослідовність (z_{n_l}) послідовності (z_n) . Нехай $z \in H$ — слабка границя (z_{n_l}) . Ясно, що z належить множині C . Записавши нерівність (3.22) для елементів z_{n_l} , після граничного переходу при $l \rightarrow \infty$ отримуємо $(Ay, y - z) \geq 0 \forall y \in C$, що за лемою 2.1 рівносильно включенню $z \in VI(A, C)$. \square

Сформулюємо теорему про ергодичну збіжність.

Теорема 3.5. *Справедливі твердження:*

- 1) якщо $VI(A, C) \neq \emptyset$, то послідовність середніх за Чезаро (z_n) слабо збігається до деякої точки $x \in VI(A, C)$;
- 2) якщо $VI(A, C) = \emptyset$, то $\|z_n\| \rightarrow +\infty$.

Доведення. З лем 3.4 та 3.5 випливає, що у випадку $VI(A, C) \neq \emptyset$ для згенерованої алгоритмом 3.3 послідовності (x_n) і множини $F = VI(A, C)$ виконані умови леми 1.8. Отже, послідовність (z_n) слабо збігається до деякої точки $x \in VI(A, C)$.

Припустимо, що $VI(A, C) = \emptyset$. Тоді $\|z_n\| \rightarrow +\infty$. Дійсно, інакше послідовність (z_n) має слабку граничну точку z , яка, як було показано раніше, належить множині $VI(A, C)$. \square

За деяких додаткових умов має місце сильна збіжність послідовності (x_n) .

Теорема 3.6. *Нехай оператор A сильно монотонний. Тоді породжена алгоритмом 3.3 послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку (3.1).*

Доведення. Нехай $z \in C$ — розв'язок (3.1), A — сильно монотонний оператор з константою $\mu > 0$. Маємо

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \|Ax_n\|^2 - 2\lambda_n (Ax_n, x_n - y), \quad y \in C.$$

Завдяки сильній монотонності оператора A отримуємо

$$(Ax_n, x_n - y) \geq (Ay, x_n - y) + \mu \|x_n - y\|^2.$$

Отже,

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \|Ax_n\|^2 - 2\lambda_n (Ay, x_n - y) - 2\mu\lambda_n \|x_n - y\|^2. \quad (3.26)$$

Розглянувши у (3.26) варіант $y = z$, отримуємо нерівність

$$2\mu\lambda_n \|x_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 + \lambda_n^2 \|Ax_n\|^2. \quad (3.27)$$

Просумувавши (3.27) за n від 0 до N , отримаємо

$$2\mu \sum_{n=0}^N \lambda_n \|x_n - z\|^2 \leq \|x_0 - z\|^2 + \sum_{n=0}^N \lambda_n^2 \|Ax_n\|^2.$$

Звідси $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \|x_n - z\|^2 < +\infty$. Оскільки $(\lambda_n) \notin \ell_1$ та існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$, то маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = 0$. \square

Теорема 3.7. *Нехай $\text{intVI}(A, C) \neq \emptyset$. Тоді породжена алгоритмом 3.3 послідовність (x_n) сильно збігається до розв'язку (3.1).*

Доведення. Візьмемо елемент $y \in \text{intVI}(A, C)$. Тоді існує замкнена куля $B(y, r) \subseteq VI(A, C)$, $r > 0$. Запишемо для $y_n = y - r \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} \in B(y, r)$ нерівність (3.25)

$$\|x_{n+1} - y_n\|^2 \leq \|x_n - y_n\|^2 + \lambda_n^2 \|Ax_n\|^2.$$

Цю нерівність можна записати у такому вигляді:

$$2r \|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2 + \lambda_n^2 \|Ax_n\|^2.$$

Для довільних $m > n$ маємо

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{\|x_n - y\|^2 - \|x_m - y\|^2}{2r} + \frac{1}{2r} \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_k^2 \|Ax_k\|^2.$$

З припущення (3.20), $(\lambda_n) \in \ell_2$ та леми 3.4 випливає фундаментальність послідовності (x_n) . Нехай $z \in H$ — сильна границя (x_n) . Тоді послідовність середніх (z_n) сильно збігається до точки z . Включення

$$z \in VI(A, C)$$

випливає з леми 3.5. \square

Включивши операцію усереднення у схему обчислень, отримаємо такий алгоритм.

Алгоритм 3.4.

- 1) *Задаємо $x_0 = z_0 \in C$; покладаємо $\sigma_0 := \lambda_0$, $n := 0$.*
- 2) *Для x_n знаходимо $x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$.*
- 3) *Якщо $x_{n+1} = x_n$, то СТОП та $x_n \in VI(A, C)$. Інакше переходимо на крок 4.*
- 4) *Покладаємо*

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \lambda_{n+1}, \\ z_{n+1} &= \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1}, \end{aligned}$$

$n := n + 1$, переходимо на крок 2.

Має місце

Теорема 3.8. *Справедливі твердження:*

- 1) *якщо $VI(A, C) \neq \emptyset$, то послідовність (z_n) слабо збігається до деякого елемента $x \in VI(A, C)$;*
- 2) *якщо $VI(A, C) = \emptyset$, то $\|z_n\| \rightarrow +\infty$.*

3.2. Екстраградієнтний метод Корпелевич

Одним з найпопулярніших методів розв'язання варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод Корпелевич.

Алгоритм 3.5.

- 1) *Задаємо $x_0 \in C$, $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$.*
- 2) *Для x_n обчислюємо*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n).$$
- 3) *Якщо $x_n = y_n$, то СТОП, інакше обчислюємо*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ay_n),$$

покладаємо $n := n + 1$ та переходимо на крок 2.

Лема 3.6. Якщо $x_n = y_n$, то $x_n \in VI(A, C)$.

Доведення. Рівність

$$y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n)$$

рівносильна варіаційній нерівності

$$(y_n - x_n + \lambda Ax_n, x - y_n) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

З урахуванням умови $x_n = y_n$ маємо $x_n \in VI(A, C)$. \square

Лема 3.7. Для $z \in VI(A, C)$ і породжених алгоритмом 3.5 послідовностей (x_n) , (y_n) виконується нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2. \quad (3.28)$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - \lambda Ay_n - z\|^2 - \|x_n - \lambda Ay_n - x_{n+1}\|^2 = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 + 2\lambda (Ay_n, z - x_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

З монотонності оператора A та $z \in VI(A, C)$ випливає

$$\begin{aligned} 0 \leq (Ay_n - Az, y_n - z) &= (Ay_n, y_n - z) - (Az, y_n - z) \leq \\ &\leq (Ay_n, y_n - z) = (Ay_n, y_n - x_{n+1}) + (Ay_n, x_{n+1} - z), \end{aligned}$$

тобто

$$(Ay_n, z - x_{n+1}) \leq (Ay_n, y_n - x_{n+1}). \quad (3.30)$$

Оцінивши праву частину (3.29) за допомогою (3.30), отримаємо

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 + 2\lambda (Ay_n, y_n - x_{n+1}).$$

Далі

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|(x_n - y_n) + (y_n - x_{n+1})\|^2 + \\ &+ 2\lambda (Ay_n, y_n - x_{n+1}) = \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \\ &- \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_n - \lambda Ay_n - y_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned}$$

Оскільки $x_{n+1} \in C$, то

$$\begin{aligned} (x_n - \lambda Ay_n - y_n, x_{n+1} - y_n) &= (x_n - \lambda Ax_n - y_n, x_{n+1} - y_n) + \\ &+ \lambda (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \lambda (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Перейдемо до оцінки $2\lambda (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$. Маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) &\leq 2\lambda L \|x_n - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \lambda^2 L^2 \|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Використовуючи (3.32) у (3.31), отримаємо нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2,$$

чим і завершуємо доведення. \square

Теорема 3.9. *Породжені алгоритмом 3.5 послідовності (x_n) , (y_n) слабо збігаються до розв'язку (3.1).*

Доведення. З нерівності (3.28) випливає існування $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ для всіх $z \in \mathbf{M}(A, C)$. Зокрема, послідовність (x_n) обмежена. Запишемо нерівність (3.28) у вигляді

$$(1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2.$$

Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < +\infty.$$

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Отже, послідовність (y_n) також обмежена. Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині $\mathbf{M}(A, C)$. Нехай підпослідовність (x_{n_k}) слабо збігається до $x^* \in \mathbf{H}$. Очевидно, що $x^* \in C$ та $y_{n_k} \rightharpoonup x^*$. Маємо

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda Ax_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідси для всіх $x \in C$ отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x - x_{n_k}) \leq \\ &\leq (y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (Ax, x - x_{n_k}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Перейшовши до границі у (3.33), отримаємо $(Ax, x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C$, тобто

$x^* \in VI(A, C)$. Покажемо, що послідовність (x_n) слабо збігається. Припустимо, що послідовність (x_n) має принаймні дві різні слабкі часткові границі p та q . За доведеним $p, q \in VI(A, C)$. Нехай (x_{n_k}) — підпослідовність, що слабо збігається до p . Тоді з леми Опяла (лема 1.6) випливає:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - p\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - q\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|.$$

Повторивши це міркування, приходимо до абсурдної нерівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|.$$

Отже, послідовність (x_n) слабо збігається до точки з множини $VI(A, C)$. \square

3.3. Метод екстраполяції з минулого

Певною альтернативою методу Г. М. Корпелевич є метод Л. Д. Попова, опублікований у 1980 р.

Алгоритм 3.6.

1) *Задаємо* $x_0 = y_0 \in C$, $\lambda \in (0, \frac{1}{3L})$.

2) *Для* x_n *та* y_n *обчислюємо*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n).$$

Якщо $x_n = y_n = x_{n+1}$, *то СТОП*, *інакше переходимо на крок 3.*

3) *Обчислюємо*

$$y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n),$$

покладаємо $n := n + 1$ *та переходимо на крок 2.*

В спільноті фахівців з машинного навчання даний алгоритм отримав назву «Extrapolation from the Past» [32]. Це пов'язано з можливістю записати метод у такій формі:

$$\begin{aligned} x_1 &\in C, y_0 \in C, \\ y_n &= P_C(x_n - \lambda A y_{n-1}), \\ x_{n+1} &= P_C(x_n - \lambda A y_n). \end{aligned}$$

Лема 3.8. Для $z \in VI(A, C)$ і породжених алгоритмом 3.6 послідовностей (x_n) , (y_n) виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda L) \|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \lambda L \|x_n - y_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|P_C(x_n - \lambda A y_n) - z\|^2 \leq \\ &\leq \|x_n - \lambda A y_n - z\|^2 - \|x_n - \lambda A y_n - x_{n+1}\|^2 = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 - 2\lambda (A y_n, x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (3.35)$$

До правої частини (3.35) додамо $2\lambda (A y_n, y_n - z) \geq 0$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 - 2\lambda (A y_n, x_{n+1} - y_n) = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2 - 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) - \\ &\quad - 2\lambda (A y_n, x_{n+1} - y_n) = \|x_n - z\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) + \\ &\quad + 2(x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Оцінимо четвертий та п'ятий доданки в правій частині (3.36). Почнемо з п'ятого. Оскільки $x_{n+1} \in C$, то

$$(x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, x_{n+1} - y_n) \leq 0. \quad (3.37)$$

Перейдемо до оцінки $(A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n)$. Маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) &\leq 2\lambda L \|y_{n-1} - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq 2\lambda L (\|y_n - x_n\| + \|x_n - y_{n-1}\|) \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \lambda L \left(\|y_n - x_n\|^2 + \|x_n - y_{n-1}\|^2 + 2\|x_{n+1} - y_n\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Використовуючи (3.37), (3.38) у (3.36), отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda L) \|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 2\lambda L) \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \lambda L \|x_n - y_{n-1}\|^2, \end{aligned}$$

чим і завершуємо доведення. □

Має місце

Теорема 3.10. *Породжені алгоритмом 3.6 послідовності (x_n) , (y_n) слабко збігаються до розв'язку (3.1).*

Доведення. Доведемо обмеженість послідовності (x_n) . Зафіксуємо номер $N \in \mathbb{N}$ та розглянемо нерівності (3.34) для всіх номерів $N, N+1, \dots, M$, де $M > N$. Додавши їх, отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{M+1} - z\|^2 &\leq \|x_N - z\|^2 - (1 - \lambda L) \sum_{n=N}^M \|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 3\lambda L) \sum_{n=N}^M \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \lambda L \|x_N - y_{N-1}\|^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Звідси випливає обмеженість послідовності (x_n) . Крім того, з нерівності (3.39) отримуємо збіжність рядів $\sum_n \|x_n - y_n\|^2$ та $\sum_n \|x_{n+1} - y_n\|^2$. Таким чином,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0.$$

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині $VI(A, C)$. Нехай підпослідовність (x_{n_k}) слабко збігається до $x^* \in H$. Очевидно, що $x^* \in C$ та $y_{n_k} \rightharpoonup x^*$. Маємо

$$(y_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} + \lambda Ay_{n_k}, y - y_{n_{k+1}}) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Звідси для всіх $y \in C$ отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}}, y - y_{n_{k+1}}) + \lambda (Ay_{n_k}, y_{n_k} - y_{n_{k+1}}) + \lambda (Ay_{n_k}, y - y_{n_k}) \leq \\ &\leq (y_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}}, y - y_{n_{k+1}}) + \lambda (Ay_{n_k}, y_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + \\ &\quad + \lambda (Ay_{n_k}, x_{n_{k+1}} - y_{n_{k+1}}) + \lambda (Ay, y - y_{n_k}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ у (3.40), отримуємо $(Ay, y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in C$, тобто $x^* \in VI(A, C)$.

Покажемо, що послідовність (x_n) слабко збігається. Оберемо довільне $z \in VI(A, C)$. Оскільки $1 - 2\lambda L \geq \lambda L$, то з нерівності (3.34) випливає

$$\|x_{n+1} - z\|^2 + \lambda L \|x_{n+1} - y_n\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \lambda L \|x_n - y_{n-1}\|^2.$$

Отже, існує границя послідовності $(\|x_n - z\|^2 + \lambda L \|x_n - y_{n-1}\|^2)$. А з рівності $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_{n-1}\| = 0$ випливає збіжність числової послідовності $(\|x_n - z\|)$. Припустимо тепер, що послідовність (x_n) має принаймні дві різні

слабкі часткові границі \mathbf{p} та \mathbf{q} . За доведеним $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \text{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. Нехай (\mathbf{x}_{n_k}) , (\mathbf{x}_{m_k}) — підпослідовності, що слабо збігаються до \mathbf{p} , \mathbf{q} , відповідно. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{p}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{q}\| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{q}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{p}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}\|. \end{aligned}$$

Отримали абсурдну нерівність. Отже, послідовність (\mathbf{x}_n) слабо збігається до точки з множини $\text{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. \square

3.4. Модифікований екстраградієнтний метод Tseng'а

У цьому підрозділі ми припустимо, що оператор $\mathbf{A} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ монотонний та ліпшицевий на всьому просторі \mathbf{H} . Алгоритм Tseng'а буде виконувати за ітерацію лише одне метричне проектування на допустиму множину \mathbf{C} .

Алгоритм 3.7.

1) *Задаємо $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{H}$, $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$.*

2) *Для \mathbf{x}_n обчислюємо*

$$\mathbf{y}_n = \text{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \lambda \mathbf{A} \mathbf{x}_n).$$

3) *Якщо $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$, то СТОП, інакше обчислюємо*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{y}_n - \lambda(\mathbf{A} \mathbf{y}_n - \mathbf{A} \mathbf{x}_n),$$

покладаємо $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$ та переходимо на крок 2.

Зауважимо, що при виконанні умови $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ маємо $\mathbf{x}_n \in \text{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. Дійсно, у цьому випадку рівність $\mathbf{y}_n = \text{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \lambda \mathbf{A} \mathbf{x}_n)$ рівносильна варіаційній нерівності

$$(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n + \lambda \mathbf{A} \mathbf{x}_n, \mathbf{x} - \mathbf{y}_n) = \lambda(\mathbf{A} \mathbf{x}_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}.$$

Отже, $\mathbf{x}_n \in \text{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Має місце

Лема 3.9. *Для породжених алгоритмом 3.7 послідовностей (\mathbf{x}_n) , (\mathbf{y}_n) має місце нерівність*

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{z}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\|^2, \quad (3.41)$$

де $\mathbf{z} \in \text{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C)$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|y_n - \lambda(Ay_n - Ax_n) - z\|^2 = \|(y_n - z) + \lambda(Ax_n - Ay_n)\|^2 = \\ &= \|y_n - z\|^2 + 2\lambda(Ax_n - Ay_n, y_n - z) + \lambda^2 \|Ax_n - Ay_n\|^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Зі включення $z \in VI(A, C)$ та рівності $y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n)$ випливає нерівність

$$(y_n - (x_n - \lambda Ax_n) - \lambda Az, y_n - z) \leq 0.$$

З монотонності оператора A випливає

$$(\lambda Az - \lambda Ay_n, y_n - z) \leq 0.$$

Склавши ці нерівності, отримаємо

$$(y_n - (x_n - \lambda Ax_n) - \lambda Ay_n, y_n - z) \leq 0. \quad (3.43)$$

З (3.43) випливає нерівність

$$\begin{aligned} 2\lambda(Ax_n - Ay_n, y_n - z) &= 2(y_n - (x_n - \lambda Ax_n) - \lambda Ay_n, y_n - z) + \\ &+ 2(x_n - y_n, y_n - z) \leq 2(x_n - y_n, y_n - z) = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|y_n - z\|^2 - \|y_n - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Урахувавши (3.44) у (3.42), отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 + \lambda^2 \|Ax_n - Ay_n\|^2 \leq \\ &\leq \|x_n - z\|^2 - (1 - L^2\lambda^2) \|x_n - y_n\|^2, \end{aligned}$$

що і треба було довести. \square

Сформулюємо теорему збіжності.

Теорема 3.11. *Породжені алгоритмом 3.7 послідовності (x_n) , (y_n) слабко збігаються до розв'язку (3.1).*

Доведення. З нерівності (3.41) випливає існування $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ для всіх $z \in VI(A, C)$ та рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Зокрема, послідовності (x_n) , (y_n) обмежені. Усі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині $VI(A, C)$. Дійсно, нехай підпослідовність (x_{n_k}) слабко збігається до $x^* \in H$. Очевидно, що $y_{n_k} \rightharpoonup x^*$ та $x^* \in C$. Маємо

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda Ax_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідси для всіх $x \in C$ отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x - x_{n_k}) \leq \\ &\leq (y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (Ax, x - x_{n_k}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ в (3.45), отримаємо

$$(Ax, x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

тобто $x^* \in VI(A, C)$.

Припустимо, що послідовність (x_n) має принаймні дві різні слабкі часткові границі p та q . За доведеним $p, q \in VI(A, C)$. Нехай $(x_{n_k}), (x_{m_k})$ — підпослідовності, що слабо збігаються до p, q , відповідно. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - p\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - q\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - q\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|. \end{aligned}$$

Отримали абсурдну нерівність. Отже, послідовність (x_n) слабо збігається до точки з множини $VI(A, C)$. \square

В нескінченновимірному гільбертовому просторі наведені вище алгоритми не гарантують сильної збіжності. Тож важливим є питання побудови алгоритмів, які б гарантували сильну збіжність. Для побудови сильно збіжних алгоритмів до базового методу застосовують техніку ітеративної регуляризації Бакушинського [17] або доповнюють базовий метод однією з сильно збіжних схем апроксимації нерухомих точок.

Розглянемо два варіанти регуляризації алгоритму 3.7. Почнемо з ітеративної регуляризації.

Алгоритм 3.8.

1) *Задаємо* $x_0 \in H$, $a \in H$, $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$, $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

2) *Для* x_n *обчислюємо*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n).$$

3) *Обчислюємо*

$$\begin{aligned} z_n &= y_n - \lambda (Ay_n - Ax_n), \\ x_{n+1} &= \alpha_n a + (1 - \alpha_n) z_n, \end{aligned}$$

покладаємо $n := n + 1$ *та переходимо на крок 2.*

Має місце

Лема 3.10. Для породжених алгоритмом 3.8 послідовностей (x_n) , (y_n) , (z_n) та $z \in VI(A, C)$ має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z_n\|^2 + (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2 \leq \\ \leq -2\alpha_n(z_n - a, x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|\alpha_n a + (1 - \alpha_n)z_n - z\|^2 = \\ &= \|z_n - z\|^2 - 2\alpha_n(z_n - a, z_n - z) + \alpha_n^2 \|z_n - a\|^2 = \\ &= \|z_n - z\|^2 - 2\alpha_n(z_n - a, x_{n+1} - z) - \|x_{n+1} - z_n\|^2. \end{aligned}$$

Оцінимо зверху $\|z_n - z\|^2$, використовуючи лему 3.9. Отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2 - \\ - \|x_{n+1} - z_n\|^2 - 2\alpha_n(z_n - a, x_{n+1} - z). \end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність (3.46). \square

Лема 3.11. Породжені алгоритмом 3.8 послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) обмежені.

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C)$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\| &= \|\alpha_n a + (1 - \alpha_n)z_n - z\| = \|\alpha_n(a - z) + \\ &+ (1 - \alpha_n)(z_n - z)\| \leq \alpha_n \|a - z\| + (1 - \alpha_n) \|z_n - z\|. \end{aligned}$$

Використавши нерівність леми 3.9, отримаємо

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \alpha_n \|a - z\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - z\| \leq \max\{\|a - z\|, \|x_n - z\|\}.$$

Отже,

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \max\{\|a - z\|, \|x_0 - z\|\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена. Обмеженість послідовностей (y_n) та (z_n) випливає з нерівності

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2$$

та обмеженості (x_n) . \square

Тепер сформулюємо теорему про сильну збіжність алгоритму 3.8.

Теорема 3.12. *Породжені алгоритмом 3.8 послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) сильно збігаються до точки $x^* = P_{VI(A,C)}a$.*

Доведення. Розглянемо елемент $x^* = P_{VI(A,C)}a$. З леми 3.11 випливає існування такого $M > 0$, що $|(z_n - a, x_{n+1} - x^*)| \leq M$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді з леми 3.10 одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2 + \|x_{n+1} - z_n\|^2 + \\ + (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2 \leq 2\alpha_n M. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Розглянемо числову послідовність $(\|x_n - x^*\|)$. Можливі два варіанти:

а) існує номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такий, що

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \|x_n - x^*\| \quad \forall n \geq \bar{n};$$

б) існує зростаюча послідовність номерів (n_k) така, що

$$\|x_{n_{k+1}} - x^*\| > \|x_{n_k} - x^*\| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо варіант а). У цьому випадку існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| \in \mathbb{R}$. Оскільки $\|x_{n+1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2 \rightarrow 0$ та $\alpha_n \rightarrow 0$, то маємо

$$\|x_{n+1} - z_n\| \rightarrow 0, \quad \|x_n - y_n\| \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

З обмеженості (x_n) випливає існування підпослідовності (x_{n_k}) , що слабо збігається до деякої точки $w \in H$. Покажемо, що $w \in VI(A, C)$. З (3.48) випливає $y_{n_k} \rightharpoonup w$ та $w \in C$. Маємо

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda Ax_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідси

$$(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (Ax, x - x_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(Ax, x - w) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

тобто $w \in VI(A, C)$.

Доведемо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{a} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*) \leq 0. \quad (3.49)$$

Виділимо з (\mathbf{x}_n) підпослідовність (\mathbf{x}_{n_k}) таку, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{a} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{a} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}^*).$$

Можна вважати, що $\mathbf{x}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{w} \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. Тому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{a} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}^*) = (\mathbf{a} - \mathbf{x}^*, \mathbf{w} - \mathbf{x}^*) \leq 0,$$

чим і доводимо (3.49).

З (3.49) та нерівності

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*\|^2 &= \|\alpha_n(\mathbf{a} - \mathbf{x}^*) + (1 - \alpha_n)(\mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*)\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\|^2 + 2\alpha_n (\mathbf{a} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|^2 + 2\alpha_n (\mathbf{a} - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*), \end{aligned}$$

узявши до уваги лему 1.11, робимо висновок, що

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0.$$

З (3.48) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}^*\| = 0.$$

Розглянемо варіант b). Використаємо лему 1.12. У цьому випадку розглянемо послідовність номерів (m_k) із властивостями:

- (i) $m_k \nearrow +\infty$;
- (ii) $\|\mathbf{x}_{m_k+1} - \mathbf{x}^*\| \geq \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{x}^*\|$ для всіх $k \geq n_1$;
- (iii) $\|\mathbf{x}_{m_k+1} - \mathbf{x}^*\| \geq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$ для всіх $k \geq n_1$.

З (3.47) та (ii) випливає

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{m_k+1} - \mathbf{z}_{m_k}\|^2 + (1 - \lambda^2 L^2) \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{y}_{m_k}\|^2 &\leq \\ &\leq -2\alpha_{m_k} (\mathbf{z}_{m_k} - \mathbf{a}, \mathbf{x}_{m_k+1} - \mathbf{z}) \leq 2\alpha_{m_k} M. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Звідси

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{m_k+1} - \mathbf{z}_{m_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{y}_{m_k}\| = 0.$$

Крім того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{m_k} - y_{m_k}\| = 0.$$

Як і в попередньому випадку, показуємо, що часткові слабкі границі послідовностей (x_{m_k}) та (y_{m_k}) належать множині $VI(A, C)$.

Нехай $z_{m_{k_j}} \rightharpoonup w$. Тоді $y_{m_{k_j}} \rightharpoonup w$ та $w \in VI(A, C)$. З (3.50) випливає

$$(z_{m_k} - a, x_{m_{k+1}} - z) \leq 0 \quad \forall k \geq n_1. \quad (3.51)$$

Запишемо тотожність

$$\begin{aligned} \|z_{m_k} - x^*\|^2 &= (z_{m_k} - a, x_{m_{k+1}} - x^*) + \\ &\quad + (z_{m_k} - a, z_{m_k} - x_{m_{k+1}}) - (x^* - a, z_{m_k} - x^*). \end{aligned}$$

Ураховуючи нерівність (3.51), отримуємо

$$\|z_{m_k} - x^*\|^2 \leq (z_{m_k} - a, z_{m_k} - x_{m_{k+1}}) - (x^* - a, z_{m_k} - x^*). \quad (3.52)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} (z_{m_k} - a, z_{m_k} - x_{m_{k+1}}) &\rightarrow 0, \\ (x^* - a, z_{m_{k_j}} - x^*) &\rightarrow (x^* - a, w - x^*) \geq 0, \end{aligned}$$

то з (3.52) випливає

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \|z_{m_{k_j}} - x^*\|^2 \leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left\{ -(x^* - a, z_{m_{k_j}} - x^*) \right\} \leq 0.$$

Таким чином,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|z_{m_{k_j}} - x^*\| = 0.$$

З обмеженості (z_{m_k}) та єдиності $x^* = P_{VI(A, C)} a$ випливає

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{m_k} - x^*\| = 0.$$

Далі маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_{k+1}} - x^*\| = 0.$$

Ураховуючи умову (iii), отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0.$$

Звідси, у свою чергу, випливає $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\| = 0$. \square

Розглянемо тепер іншу схему регуляризації алгоритму 3.7, яка базується на проєкційній CQ-схемі Nakaïo–Takahashi.

Алгоритм 3.9.

1) *Задаємо* $x_0 \in H$, $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$.

2) *Для* x_n *обчислюємо*

$$\begin{aligned} y_n &= P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ z_n &= y_n - \lambda(Ay_n - Ax_n). \end{aligned}$$

3) *Будуємо напівпростори*

$$\begin{aligned} C_n &= \{z \in H : \|z_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n &= \{z \in H : (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}, \end{aligned}$$

обчислюємо

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0,$$

покладаємо $n := n + 1$ *та переходимо на крок 2.*

Теорема 3.13. *Породжені алгоритмом 3.9 послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) сильно збігаються до точки $x^* = P_{V(A,C)} x_0$.*

Доведення. Має місце нерівність

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2, \quad (3.53)$$

де $z \in V(A, C)$.

Множини Q_n , C_n — опуклі та замкнені. Нехай $z \in V(A, C)$. З нерівності (3.53) випливає $z \in C_n$ для всіх $n \geq 0$. Отже, $V(A, C) \subseteq C_n$ для всіх $n \geq 0$.

Тепер за допомогою математичної індукції покажемо, що для всіх $n \geq 0$ має місце вкладення $V(A, C) \subseteq C_n \cap Q_n$. Для $n = 0$ маємо $Q_n = H$. Тому $V(A, C) \subseteq C_0 \cap Q_0$. Нехай для деякого $k \in \mathbb{N}$ маємо $V(A, C) \subseteq C_k \cap Q_k$. Тоді існує єдина точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$ така, що $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$. З $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$ випливає

$$(x_{k+1} - z, x - x_{k+1}) \geq 0 \quad \forall z \in C_k \cap Q_k.$$

Оскільки $V(A, C) \subseteq C_k \cap Q_k$, то $V(A, C) \subseteq Q_{k+1}$. Таким чином, $V(A, C) \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}$.

Покажемо, що послідовність (x_n) обмежена. Існує єдина точка $x^* \in V(A, C)$ така, що $x^* = P_{V(A,C)} x_0$. З $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$ випливає

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z - x_0\| \quad \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Оскільки $x^* \in VI(A, C) \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|x^* - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.54)$$

Звідси випливає обмеженість (x_n) .

Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (3.55)$$

З $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ та $x_n = P_{Q_n} x_0$ випливає

$$\|x_{n+1} - x_0\| \geq \|x_n - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $(\|x_n - x_0\|)$ обмежена та неспадна. Тому існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|$. З іншого боку, оскільки $x_{n+1} \in Q_n$, то $(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \geq 0$ і

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|(x_n - x_0) - (x_{n+1} - x_0)\|^2 = \\ &= \|x_n - x_0\|^2 - 2(x_n - x_0, x_{n+1} - x_0) + \|x_{n+1} - x_0\|^2 = \\ &= \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 - 2(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \leq \\ &\leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Звідси випливає (3.55).

Оскільки $x_{n+1} \in C_n$, то $\|z_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|$. Звідси

$$\|z_n - x_n\| \leq 2 \|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0. \quad (3.56)$$

Використовуючи нерівність (3.53), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_n - y_n\|^2 &\leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|z_n - z\|^2}{(1 - \lambda^2 L^2)} = \\ &= \frac{(\|x_n - z\| - \|z_n - z\|)(\|x_n - z\| + \|z_n - z\|)}{(1 - \lambda^2 L^2)} \leq \\ &\leq \frac{(\|x_n - z\| + \|z_n - z\|)}{(1 - \lambda^2 L^2)} \|x_n - z_n\|, \end{aligned}$$

де $z \in VI(A, C)$. З (3.56) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (3.57)$$

Розглянемо довільну підпослідовність (x_{n_k}) , що слабо збігається до деякої

точки $w \in H$. Покажемо, що $w \in VI(A, C)$. З (3.57) випливає $y_{n_k} \rightarrow w$ та $w \in C$. Маємо

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda Ax_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідси

$$(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (Ax, x - x_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Після граничного переходу отримаємо $(Ax, x - w) \geq 0 \quad \forall x \in C$, тобто $w \in VI(A, C)$.

Для $x^* = P_{VI(A, C)}x_0$ з нерівності (3.54) випливає

$$\|x_0 - x^*\| \leq \|x_0 - w\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \|x_0 - x^*\|.$$

Отримали $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| = \|x_0 - w\| = \|x_0 - x^*\|$. Звідси $x_{n_k} \rightarrow w = x^*$. Отже, $x_n \rightarrow x^*$. З (3.56) і (3.57) випливає $z_n \rightarrow x^*$ та $y_n \rightarrow x^*$, що і треба було довести. \square

3.5. Субградієнтний екстраградієнтний метод

Припустимо, що оператор $A : H \rightarrow H$ монотонний на множині C та ліпшицевий на H .

Алгоритм 3.10.

1) *Задаємо* $x_0 \in C$, $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$.

2) *Для* x_n *обчислюємо*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n).$$

3) *Якщо* $x_n = y_n$, *то СТОП, інакше будуємо півпростір*

$$T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda Ax_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}$$

та обчислюємо

$$x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda Ay_n),$$

покладаємо $n := n + 1$ *та переходимо на крок 2.*

Маємо $C \subseteq T_n$. Дійсно, якщо припустити існування точки $z \in C \setminus T_n$, то нерівність $(x_n - \lambda Ax_n - y_n, z - y_n) > 0$ буде суперечити рівності $y_n = P_C(x_n - \lambda Ay_n)$.

Ясно, що коли $x_n = y_n$, то $x_n \in VI(A, C)$.

Лема 3.12. Для $z \in VI(A, C)$ і породжених алгоритмом 3.10 послідовностей (x_n) , (y_n) виконується нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2. \quad (3.58)$$

Доведення. Аналогічно доведенню леми 3.7 отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2(x_n - \lambda A y_n - y_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned}$$

Оскільки $x_{n+1} \in T_n$, то

$$\begin{aligned} (x_n - \lambda A y_n - y_n, x_{n+1} - y_n) &= (x_n - \lambda A x_n - y_n, x_{n+1} - y_n) + \\ &\quad + \lambda (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n) \leq \lambda (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Перейдемо до оцінки $2\lambda (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n)$. Маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n) &\leq 2\lambda L \|x_n - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq \lambda^2 L^2 \|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Використовуючи (3.60) у (3.59), отримуємо нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2,$$

чим і завершуємо доведення. □

Теорема 3.14. Породжені алгоритмом 3.10 послідовності (x_n) , (y_n) слабко збігаються до розв'язку (3.1).

Доведення. З нерівності (3.58) випливає існування $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ для всіх $z \in VI(A, C)$. Зокрема, послідовність (x_n) обмежена. Запишемо нерівність (3.58) у вигляді

$$(1 - \lambda^2 L^2) \|x_n - y_n\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2.$$

Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < +\infty.$$

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Отже, послідовність (y_n) також обмежена.

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині $\text{VI}(A, C)$. Нехай підпослідовність (x_{n_k}) слабо збігається до $x^* \in H$. Очевидно, що $y_{n_k} \rightharpoonup x^*$ та $x^* \in C$. Маємо

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda A x_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідси для всіх $x \in C$ отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (A x_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (A x_{n_k}, x - x_{n_k}) \leq \\ &\leq (y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda (A x_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda (A x, x - x_{n_k}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ у (3.61), отримаємо

$$(A x, x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

тобто $x^* \in \text{VI}(A, C)$.

За допомогою леми Опяла доводимо, що послідовність (x_n) слабо збігається до точки з множини $\text{VI}(A, C)$ (тоді з $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ випливає слабка збіжність (y_n) до тієї самої границі). \square

3.6. Задачі

Задача 3.1. Для L -гладкої (похідна ∇f задовольняє умову Ліпшица зі сталою $L > 0$) μ -сильно опуклої функції f доведіть нерівність

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \frac{\mu L}{\mu + L} \|x - y\|^2 + \frac{1}{\mu + L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.$$

Задача 3.2. Дослідіть збіжність наступного алгоритму.

1) Задаємо $x_1 \in C$, $\tau \in (0, 1)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$.

2) Для x_n обчислюємо

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n).$$

3) Якщо $x_n = y_n$, то СТОП, інакше обчислюємо

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

4) Обчислюємо

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|x_n - y_n\|}{\|Ax_n - Ay_n\|} \right\}, & \text{якщо } Ax_n \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

покладаємо $n := n + 1$ та переходимо на крок 2.

Задача 3.3. Дослідіть збіжність наступного алгоритму.

1) Задаємо $x_1, y_0 \in C$, $\tau \in (0, \frac{1}{3})$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$.

2) Обчислюємо

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ay_{n-1}).$$

3) Обчислюємо

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n Ay_n).$$

Якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, то СТОП, інакше переходимо на крок 4.

4) Обчислюємо

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|y_{n-1} - y_n\|}{\|Ay_{n-1} - Ay_n\|} \right\}, & \text{якщо } Ay_{n-1} \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

покладаємо $n := n + 1$ та переходимо на крок 2.

Задача 3.4. Дослідіть збіжність алгоритму.

1) Задаємо $x_0, x_1 \in C$, $\tau \in (0, \frac{1}{2})$, $\lambda_0, \lambda_1 \in (0, +\infty)$.

2) Обчислюємо

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1})).$$

3) Якщо $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$, то СТОП, інакше переходимо до 4.

4) Обчислюємо

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|} \right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

покладаємо $n := n + 1$ та переходимо до 2.

Розділ 4

Модифіковані екстраградієнтні методи

В розділі розглядаються різні варіанти модифікованого екстраградієнтного методу з динамічним регулюванням величини кроку для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними операторами, які діють у гільбертовому просторі. Основний матеріал розділу вперше був опублікований в статтях [33, 34].

Розділ побудовано наступним чином. В підрозділі 4.1. наведено факти, що відіграють важливу роль у доведеннях основних результатів розділу. В підрозділі 4.2. описано модифікацію субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з динамічним регулюванням величини кроку для варіаційних нерівностей з монотонними неліпшицевими операторами та доведено його збіжність. Підрозділ 4.3. присвячений варіанту алгоритму для пошуку розв'язку варіаційної нерівності з апріорною інформацією, що описана у вигляді включення до множини нерухомих точок заданого квазінерозтягуючого оператора. Також розглянуто варіант методу для операторних рівнянь з апріорною інформацією про розв'язок. В підрозділі 4.4. розглянуто сильно збіжні модифіковані екстраградієнтні методи з динамічним регулюванням величини кроку для розв'язання монотонних варіаційних нерівностей та операторних рівнянь з апріорною інформацією про розв'язок. Для регуляризації використано схему Гальперна¹, проекційну CQ-схему Nakaïo–Takahashi та метод Takahashi–Takeuchi–Kubota.

¹Бенджамін Гальперн (Benjamin Halpern) — американський математик. Основні результати пов'язані з метричною теорією нерухомих точок.

4.1. Попередні відомості та допоміжні твердження

Нехай C — непорожня опукла і замкнена підмножина простору H та $A : H \rightarrow H$ — деякий оператор. Розглянемо варіаційну нерівність

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (4.1)$$

Скрізь у цьому розділі будемо вважати, що виконуються такі умови:

A1) $VI(A, C) \neq \emptyset$;

A2) оператор $A : H \rightarrow H$ — монотонний, рівномірно неперервний на обмежених множинах.

Зауваження 4.1. Якщо простір H скінченновимірний, то достатньо вимагати від оператора A монотонності та неперервності.

Розглянемо функцію

$$t \mapsto \|x - P_C(x - tAx)\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Вона володіє наступними корисними властивостями.

Лема 4.1. Для $x \in H$ і чисел $\alpha \geq \beta > 0$ мають місце нерівності

$$\frac{\|x - P_C(x - \alpha Ax)\|}{\alpha} \leq \frac{\|x - P_C(x - \beta Ax)\|}{\beta},$$

$$\|x - P_C(x - \beta Ax)\| \leq \|x - P_C(x - \alpha Ax)\|.$$

Доведення. Покладемо

$$x_\alpha = P_C(x - \alpha Ax), \quad x_\beta = P_C(x - \beta Ax).$$

Маємо

$$\left(\frac{x_\alpha - x + \alpha Ax}{\alpha}, x_\beta - x_\alpha \right) \geq 0,$$

$$\left(\frac{x_\beta - x + \beta Ax}{\beta}, x_\alpha - x_\beta \right) \geq 0.$$

Додавши ці нерівності, отримаємо

$$0 \leq \left(\frac{x - x_\alpha}{\alpha} - \frac{x - x_\beta}{\beta}, x_\alpha - x_\beta \right) = \left(\frac{x - x_\alpha}{\alpha} - \frac{x - x_\beta}{\beta}, (x - x_\beta) - (x - x_\alpha) \right).$$

Звідки,

$$0 \leq -\|x - x_\alpha\|^2 - \frac{\alpha}{\beta} \|x - x_\beta\|^2 + \|x - x_\alpha\| \|x - x_\beta\| + \frac{\alpha}{\beta} \|x - x_\alpha\| \|x - x_\beta\|.$$

Отже,

$$0 \geq \left(\|x - x_\alpha\| - \frac{\alpha}{\beta} \|x - x_\beta\| \right) (\|x - x_\alpha\| - \|x - x_\beta\|).$$

Звідки випливає

$$\|x - x_\alpha\| - \frac{\alpha}{\beta} \|x - x_\beta\| \leq 0, \quad \|x - x_\beta\| \leq \|x - x_\alpha\|,$$

що і потрібно було довести. \square

Означення 4.1. Оператор $T : H \rightarrow H$ називають квазінерозтягуючим (фейєрівським), якщо $F(T) = \{x \in H : Tx = x\} \neq \emptyset$ та

$$\|Tx - y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x \in H \quad \forall y \in F(T).$$

Відомо, що множина нерухомих точок $F(T)$ квазінерозтягуючого оператора замкнена та опукла [35, 36].

Зауваження 4.2. Квазінерозтягуючі (фейєрівські) оператори та породжені ними ітераційні процеси мають велике значення в оптимізаційній алгоритмиці (див. [37, 38]). Але в багатьох інших областях обчислювальної математики ці плідні конструкції не достатньо відомі. Книга [35] — одне з найкращих джерел по ітераційним алгоритмам з фейєрівською властивістю для розв'язання рівнянь, нерівностей та задач оптимізації.

Означення 4.2. Оператор $S : C \rightarrow H$ називають демізамкненим в точці $y \in H$ якщо для послідовності точок $x_n \in C$ із $x_n \rightarrow x$ і $Sx_n \rightarrow y$ випливає $Sx = y$.

Відомо, що для нерозтягуючого оператора $T : C \rightarrow H$ оператор $I - T$ демізамкнений в нулі [36].

4.2. Модифікований екстраградієнтний алгоритм для варіаційних нерівностей

У розділі 3 ми познайомились з екстраградієнтним алгоритмом Корпелевич для розв'язання варіаційної нерівності (4.1) з ліпшицевим оператором A . Він

має вигляд:

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ay_n), \end{cases}$$

де $\lambda \in (0, 1/L)$, L — стала Ліпшиця оператора A . Існує модифікація алгоритму Корпелевич з одним метричним проектуванням на допустиму множину — так званий, субградієнтний екстраградієнтний алгоритм, що має вигляд:

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda Ax_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda Ay_n), \end{cases}$$

де $\lambda \in (0, 1/L)$.

Очевидним недоліком субградієнтного екстраградієнтного алгоритму є припущення про те, що стала Ліпшиця оператора A відома або допускає просту оцінку. Крім того, у задачах оператори можуть не задовольняти умові Ліпшиця.

Нижче ми розглянемо модифікацію субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з динамічним регулюванням величини кроку.

Алгоритм 4.1. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$ і елемент $x_0 \in H$.*

Ітераційний крок. *Для $x_n \in H$ обчислюємо*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n\| \leq \\ \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \|P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Якщо $y_n = x_n$, то закінчуємо, в протилежному випадку обчислюємо

$$x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda_n Ay_n),$$

де

$$T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n Ax_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}.$$

Зрозуміло, що якщо $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n$, то точка \mathbf{x}_n належить множині \mathbf{C} і є розв'язком варіаційної нерівності.

Покажемо, що процедура (4.2) завжди закінчується за скінченну кількість кроків. Має місце

Лема 4.2. *Правило (4.2) вибору параметра λ_n коректне, тобто*

$$j(\mathbf{n}) < +\infty.$$

Доведення. Нехай $\mathbf{x}_n \in \mathbf{VI}(A, \mathbf{C})$. Тоді

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma A\mathbf{x}_n) \quad \text{та} \quad j(\mathbf{n}) = 0.$$

Розглянемо ситуацію $\mathbf{x}_n \notin \mathbf{VI}(A, \mathbf{C})$ і припустимо, що для всіх $j \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\sigma\tau^j \|\mathbf{AP}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n) - A\mathbf{x}_n\| > \theta \|\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n\|. \quad (4.3)$$

Якщо $\mathbf{x}_n \in \mathbf{C}$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n\| = 0$. Із рівномірної неперервності оператора A на обмежених множинах випливає

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{AP}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n) - A\mathbf{x}_n\| = 0.$$

Таким чином,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n\|}{\sigma\tau^j} = 0. \quad (4.4)$$

Покладемо $\mathbf{y}_n^j = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n)$. Маємо

$$\left(\frac{\mathbf{y}_n^j - \mathbf{x}_n}{\sigma\tau^j}, \mathbf{x} - \mathbf{y}_n^j \right) + (A\mathbf{x}_n, \mathbf{x} - \mathbf{y}_n^j) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}. \quad (4.5)$$

Здійснивши граничний перехід в (4.5) з урахуванням асимптотики (4.4), отримуємо $(A\mathbf{x}_n, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}$, тобто, $\mathbf{x}_n \in \mathbf{VI}(A, \mathbf{C})$. Протиріччя.

У випадку $\mathbf{x}_n \notin \mathbf{C}$ маємо

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{P}_{\mathbf{C}}\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\| > 0.$$

та

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma\tau^j \|\mathbf{AP}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_n - \sigma\tau^j A\mathbf{x}_n) - A\mathbf{x}_n\| = 0.$$

Знову отримали протиріччя (див. (4.3)). □

Зауваження 4.3. При доведенні леми 4.2 зовсім не використовувалась монотонність оператора A .

Перейдемо тепер до доведення слабкої збіжності алгоритму 4.1.

Лема 4.3. Для послідовностей (x_n) , (y_n) , породжених алгоритмом 4.1, має місце нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \theta^2) \|x_n - y_n\|^2, \quad (4.6)$$

де $z \in VI(A, C)$.

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C)$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 = \\ &= \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n) + (x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 = \\ &= \|(x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 + \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n)\|^2 + \\ &\quad + 2(P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n), (x_n - \lambda_n A y_n) - z). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &2 \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n)\|^2 + \\ &\quad + 2(P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n), (x_n - \lambda_n A y_n) - z) = \\ &= 2((x_n - \lambda_n A y_n) - P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n), z - P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n)) \leq 0, \end{aligned}$$

то для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - \lambda_n A y_n - z\|^2 - \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - x_n + \lambda_n A y_n\|^2 = \\ &= \|(x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 - \|x_{n+1} - (x_n - \lambda_n A y_n)\|^2 = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n (z - x_{n+1}, A y_n). \end{aligned}$$

З монотонності оператора A , включення $z \in VI(A, C)$ та леми Мінти випливає

$$\begin{aligned} 0 \leq (A y_n - A z, y_n - z) &= (A y_n, y_n - z) - \underbrace{(A z, y_n - z)}_{\geq 0} \leq \\ &\leq (A y_n, y_n - z) = (A y_n, y_n - x_{n+1}) + (A y_n, x_{n+1} - z). \end{aligned}$$

Тобто,

$$(A y_n, z - x_{n+1}) \leq (A y_n, y_n - x_{n+1}).$$

Таким чином,

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n (Ay_n, y_n - x_{n+1}).$$

Далі,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|(x_n - y_n) + (y_n - x_{n+1})\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n (Ay_n, y_n - x_{n+1}) = \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2(x_n - \lambda_n Ay_n - y_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned}$$

Оскільки $x_{n+1} \in T_n$, то

$$\begin{aligned} (x_n - \lambda_n Ay_n - y_n, x_{n+1} - y_n) &= \underbrace{(x_n - \lambda_n Ax_n - y_n, x_{n+1} - y_n)}_{\leq 0} + \\ &+ \lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned}$$

Отже, приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &+ 2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доданок $2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$ в (4.7) оцінимо наступним чином

$$\begin{aligned} 2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) &\leq 2\lambda_n \|Ax_n - Ay_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\ &\leq 2\theta \|x_n - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \theta^2 \|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Враховуючи оцінку (4.8) в (4.7), приходимо до нерівності (4.6). \square

Зауваження 4.4. Оцінивши доданок $2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$ в (4.7) інакше, отримаємо корисну нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \theta) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - \theta) \|x_{n+1} - y_n\|^2, \quad (4.9)$$

де $z \in VI(A, C)$.

Теорема 4.1. *Послідовності (x_n) і (y_n) , породженні алгоритмом 4.1, слабо збігаються до деякої точки $z \in VI(A, C)$.*

Доведення. Із нерівності (4.6) випливає, що послідовність (x_n) фейєрівська відносно множини $VI(A, C)$, тобто

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in VI(A, C).$$

Зокрема, послідовність (x_n) обмежена.

Зафіксуємо номер $N \in \mathbb{N}$ і розглянемо нерівності (4.6) для всіх номерів $1, 2, \dots, N$. Додавши їх, отримаємо

$$\|x_{N+1} - z\|^2 \leq \|x_1 - z\|^2 - (1 - \theta^2) \sum_{n=1}^N \|x_n - y_n\|^2. \quad (4.10)$$

Із нерівності (4.10) випливає збіжність числового ряду $\sum_n \|x_n - y_n\|^2$. Таким чином,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (4.11)$$

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}) , що слабо збігається до деякої точки $z \in H$. Тоді $y_{n_k} \rightharpoonup z$ і $z \in C$. Покажемо, що $z \in VI(A, C)$.

Можливі два варіанти:

- 1) числова послідовність (λ_{n_k}) не прямує до нуля;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = 0$.

Спочатку розглянемо варіант 1). Можна вважати, що $\lambda_{n_k} \geq \lambda$ для всіх достатньо великих k і деякого $\lambda > 0$. Маємо,

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} A x_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідки, використовуючи монотонність оператора A , виводимо оцінку

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} A x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} = \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + \\ &\quad + (A x_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + (A x_{n_k}, x - x_{n_k}) \leq \\ &\leq \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + (A x_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + (A x, x - x_{n_k}). \end{aligned}$$

Здійснивши граничний перехід із врахуванням (4.11), отримаємо

$$(A x, x - z) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Отже, $z \in VI(A, C)$.

Розглянемо варіант 2). Нехай $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = 0$. Покладемо

$$z_{n_k} = P_C(x_{n_k} - \mu_{n_k} A x_{n_k}),$$

де $\mu_{n_k} = \lambda_{n_k} \tau^{-1} = \sigma \tau^{j(n_k)-1} > \lambda_{n_k} > 0$. Застосуємо лему 4.1. Маємо,

$$\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \leq \frac{1}{\tau} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \rightarrow 0.$$

Зокрема, послідовність (z_{n_k}) обмежена і $z_{n_k} \rightharpoonup z$. Із рівномірної неперервності оператора A на обмежених множинах випливає $\|Ax_{n_k} - Az_{n_k}\| \rightarrow 0$. А нерівність

$$\mu_{n_k} \|Az_{n_k} - Ax_{n_k}\| > \theta \|z_{n_k} - x_{n_k}\|$$

тягне асимптотику

$$\frac{\|x_{n_k} - z_{n_k}\|}{\mu_{n_k}} \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

Далі маємо,

$$(z_{n_k} - x_{n_k} + \mu_{n_k} Ax_{n_k}, x - z_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідки виводимо оцінку

$$0 \leq \frac{(z_{n_k} - x_{n_k}, x - z_{n_k})}{\mu_{n_k}} + (Ax_{n_k}, x_{n_k} - z_{n_k}) + (Ax, x - x_{n_k}).$$

Здійснивши граничний перехід із врахуванням (4.12), отримаємо

$$(Ax, x - z) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

Звідки, $z \in VI(A, C)$.

Покажемо тепер, що $x_n \rightharpoonup z$. Тоді із (4.11) буде впливати $y_n \rightharpoonup z$. Міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність (x_{m_k}) , така, що $x_{m_k} \rightharpoonup z'$ і $z \neq z'$. Зрозуміло, що $z' \in VI(A, C)$. Застосуємо двічі лему 1.6. Маємо,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z'\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z'\| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - z'\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|, \end{aligned}$$

що неможливо. Таким чином, $z = z'$. □

Зауваження 4.5. Слабка границя $z \in VI(A, C)$ породженої алгоритмом 4.1 фейєрівської послідовності (x_n) володіє властивістю [36]:

$$P_{VI(A,C)} x_n \rightarrow z.$$

Якщо ж множина $VI(A, C)$ являється афінним многовидом, то $x_n \rightarrow P_{VI(A,C)} x_0$ [36].

Зауваження 4.6. Асимптотику (4.11) можна уточнити до наступної:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \|x_n - y_n\| = 0. \quad (4.13)$$

Дійсно, якщо (4.13) не виконується, то

$$\|x_n - y_n\| \geq \mu n^{-1/2}$$

для деякого $\mu > 0$ і всіх достатньо великих номерів n . Отже числовий ряд $\sum_n \|x_n - y_n\|^2$ розбігається. Отримали протиріччя.

4.3. Модифікований екстраградієнтний алгоритм для варіаційних нерівностей та операторних рівнянь з апріорною інформацією

Розглянемо варіант методу для пошуку розв'язку варіаційної нерівності (4.1), що додатково є нерухомою точкою заданого оператора.

Нехай $S : H \rightarrow H$ — квазінерозтягуючий оператор з множиною нерухомих точок $F(S) = \{x \in H : Sx = x\}$. Припустимо, що оператор $I - S$ — демізамкнений в нулі. Крім того, нехай має місце:

$$A3) VI(A, C) \cap F(S) \neq \emptyset.$$

Зауваження 4.7. Нехай $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ — опукла диференційовна функція. Якщо множина $D = \{x \in H : g(x) \leq 0\}$ непорожня, то її можна трактувати як множину нерухомих точок квазінерозтягуючого оператора

$$Sx = \begin{cases} x - \frac{g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g(x), & \text{якщо } x \notin D, \\ x, & \text{якщо } x \in D, \end{cases}$$

де $\nabla g(x) \in H$ — похідна g в точці $x \in H$ [35]. Для демізамкненості в нулі оператора $I - S$ достатньо обмеженості g на будь-якій обмеженій множині [35].

Для пошуку елементів множини $VI(A, C) \cap F(S)$ розглянемо наступний алгоритм.

Алгоритм 4.2. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, елемент $x_0 \in H$ і послідовність $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0, 1)$.*

Ітераційний крок. *Для $x_n \in H$ обчислюємо*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n\| \leq \\ \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \|P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = \delta_n x_n + (1 - \delta_n) SP_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n),$$

де

$$T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.2. *Послідовності (x_n) і (y_n) , що породжені алгоритмом 4.2, слабо збігаються до деякої точки $z \in VI(A, C) \cap F(S)$.*

Доведення. Покладемо $z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n)$. Оскільки оператор S квазіне-розтягуючий, то для всіх точок $z \in VI(A, C) \cap F(S)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|\delta_n(x_n - z) + (1 - \delta_n)(Sz_n - z)\|^2 = \\ &= \delta_n \|x_n - z\|^2 + (1 - \delta_n) \|Sz_n - z\|^2 - \delta_n(1 - \delta_n) \|x_n - Sz_n\|^2 \leq \\ &\leq \delta_n \|x_n - z\|^2 + (1 - \delta_n) \|z_n - z\|^2 - \delta_n(1 - \delta_n) \|x_n - Sz_n\|^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Використовуючи (4.9) в (4.14) для оцінки доданка $(1 - \delta_n) \|z_n - z\|^2$, приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \delta_n)(1 - \theta) \|x_n - y_n\|^2 - \\ &- (1 - \delta_n)(1 - \theta) \|z_n - y_n\|^2 - \delta_n(1 - \delta_n) \|x_n - Sz_n\|^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Із нерівності (4.15) випливає, що послідовність (x_n) фейєрівська відносно множини $VI(A, C) \cap F(S)$, тобто

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in VI(A, C) \cap F(S).$$

Зокрема, послідовність (x_n) обмежена. Крім того, справедливі нерівності

$$\|x_n - y_n\|^2 + \|z_n - y_n\|^2 \leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2}{(1 - \delta_n)(1 - \theta)},$$

$$\|x_n - Sz_n\|^2 \leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2}{\delta_n (1 - \delta_n)}.$$

Звідки випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Sz_n\| = 0. \quad (4.16)$$

Розглянемо підпоследовність (x_{n_k}) , що слабко збігається до деякої точки $z \in H$. Тоді (y_{n_k}) , (z_{n_k}) слабко збігається до z та $z \in C$. Міркуючи як в доведенні теореми 4.1 отримуємо, що $z \in VI(A, C)$.

Залишилось показати, що $z \in F(S)$. Оскільки

$$\|z_n - Sz_n\| \leq \|z_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| + \|x_n - Sz_n\|,$$

то із (4.16) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - Sz_n\| = 0.$$

Оператор $I - S$ демізамкнений в нулі. Отже із $z_{n_k} \rightharpoonup z$ та $z_{n_k} - Sz_{n_k} \rightarrow 0$ отримуємо що $z \in F(S)$.

Аналогічно доведенню теореми 4.1 показуємо, що $x_n \rightharpoonup z$. Тоді із (4.16) буде випливати $y_n \rightharpoonup z$. \square

Розглянемо тепер операторне рівняння з апріорною інформацією, яка задана у вигляді множини нерухомих точок квазінерозтягуючого оператора $T : H \rightarrow H$:

$$Ax = 0, \quad x \in F(T). \quad (4.17)$$

Подібні задачі розглядались в [35].

Алгоритм 4.2 для задачі (4.17) набуде такого вигляду.

Алгоритм 4.3. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, елемент $x_0 \in H$ і послідовність $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0, 1)$.*

Ітераційний крок. *Для $x_n \in H$ обчислюємо*

$$y_n = x_n - \lambda_n Ax_n,$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|A(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n\| \leq \theta \|Ax_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$\begin{aligned} z_n &= x_n - \lambda_n A y_n, \\ x_{n+1} &= \delta_n x_n + (1 - \delta_n) T z_n. \end{aligned}$$

Частковим випадком теореми 4.2 є наступний результат.

Теорема 4.3. *Нехай оператор $A : H \rightarrow H$ — монотонний, рівномірно неперервний на обмежених множинах. Нехай оператор $T : H \rightarrow H$ — квазі-нерозтягуючий, причому оператор $I - T$ демізамкнений в нулі. Припустимо, що $A^{-1}0 \cap F(T) \neq \emptyset$. Тоді послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) , породжені алгоритмом 4.3, слабо збігаються до деякої точки $z \in A^{-1}0 \cap F(T)$.*

4.4. Сильно збіжний модифікований екстраградієнтний алгоритм

У цьому підрозділі розглянемо сильно збіжний модифікований екстраградієнтний метод з динамічним регулюванням величини кроку. Відносно операторів ми, як і раніше, не припускаємо їх ліпшицевість. Також розглянуті варіанти методу для варіаційних нерівностей і операторних рівнянь з апріорною інформацією про розв'язок, яка задана у вигляді множини нерухомих точок квазінерозтягуючого оператора.

Для регуляризації модифікованого екстраградієнтного алгоритму використовувалась проста схема Гальперна [39], яка по суті співпадає зі схемою ітеративної регуляризації [17]. Також розглянута регуляризація за допомогою проєкційної CQ-схеми [40] та схеми Takahashi–Takeuchi–Kubota [41].

4.4.1. Варіант для варіаційних нерівностей

Алгоритм 4.4. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, елемент $x_0 \in H$ і послідовність $(\alpha_n) \subseteq (0, 1)$, таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.*

Ітераційний крок. *Для $x_n \in H$ обчислюємо*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|\mathcal{A}P_C(x_n - \sigma\tau^j \mathcal{A}x_n) - \mathcal{A}x_n\| \leq \\ \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \|\mathcal{P}_C(x_n - \sigma\tau^j \mathcal{A}x_n) - x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n) P_{T_n}(x_n - \lambda_n \mathcal{A}y_n),$$

де

$$T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n \mathcal{A}x_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}.$$

Покладемо

$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n \mathcal{A}y_n). \quad (4.18)$$

Має місце лема.

Лема 4.4. Для послідовностей (x_n) , (y_n) і (z_n) , що породжені алгоритмом 4.4, має місце нерівність

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \theta) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - \theta) \|z_n - y_n\|^2, \quad (4.19)$$

де $z \in VI(A, C)$.

Доведення. Повторюючи міркування леми 4.3 приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 + \\ + 2\lambda_n (\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}y_n, z_n - y_n). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Доданок $2\lambda_n (\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}y_n, z_n - y_n)$ в (4.20) оцінимо наступним чином

$$\begin{aligned} 2\lambda_n (\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}y_n, z_n - y_n) \leq 2\lambda_n \|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}y_n\| \|z_n - y_n\| \leq \\ \leq 2\theta \|x_n - y_n\| \|z_n - y_n\| \leq \theta \|x_n - y_n\|^2 + \theta \|z_n - y_n\|^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Враховуючи оцінку (4.21) в (4.20), приходимо до нерівності (4.19). \square

Лема 4.5. Для породжених алгоритмом 4.4 послідовностей (x_n) , (y_n) та (z_n) має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + (1 - \theta) \|x_n - y_n\|^2 + \\ + (1 - \theta) \|z_n - y_n\|^2 \leq 2\alpha_n (x_0 - z, x_{n+1} - z). \end{aligned}$$

де $z \in VI(A, C)$.

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C)$. Застосуємо елементарну нерівність

$$\|a + b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2(b, a + b).$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|\alpha_n(x_0 - z) + (1 - \alpha_n)(z_n - z)\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|z_n - z\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z) \leq \\ &\leq \|z_n - z\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Враховуючи в (4.22) нерівність (4.19) приходимо до бажаної оцінки. \square

Доведемо обмеженість породжених алгоритмом послідовностей. Має місце

Лема 4.6. *Породжені алгоритмом 4.4 послідовності (x_n) , (y_n) і (z_n) — обмежені.*

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C)$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\| &= \|\alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n) z_n - z\| = \\ &= \|\alpha_n(x_0 - z) + (1 - \alpha_n)(z_n - z)\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|x_0 - z\| + (1 - \alpha_n) \|z_n - z\|. \end{aligned}$$

Скориставшись нерівністю леми 4.4, отримаємо

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \alpha_n \|x_0 - z\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - z\| \leq \max\{\|x_0 - z\|, \|x_n - z\|\}.$$

Отже, $\|x_{n+1} - z\| \leq \max\{\|x_0 - z\|, \|x_1 - z\|\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Таким чином, послідовність (x_n) — обмежена. Обмеженість послідовностей (y_n) і (z_n) випливає із обмеженості (x_n) і леми 4.4. \square

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.4. *Нехай множина $C \subseteq H$ — опукла і замкнена, оператор $A : H \rightarrow H$ — монотонний, рівномірно неперервний на обмежених множинах. Припустимо, що $VI(A, C) \neq \emptyset$. Тоді послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) , породжені алгоритмом 4.4, сильно збігаються до точки $\bar{z} = P_{VI(A, C)} x_0$.*

Доведення. Розглянемо елемент $\bar{z} = P_{VI(A, C)} x_0$. Із леми 4.6 випливає існування такого числа $M > 0$, що

$$|(x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z})| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тоді із нерівності леми 4.5 отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{z}}\|^2 - \|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{z}}\|^2 + (1 - \theta) \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\|^2 + \\ + (1 - \theta) \|\mathbf{z}_n - \mathbf{y}_n\|^2 \leq 2\alpha_n M. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Розглянемо числову послідовність $(\|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{z}}\|)$. Можливі два варіанти:

- a) існує номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такий, що $\|\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{z}}\| \leq \|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{z}}\|$ для всіх $n \geq \bar{n}$;
- b) існує зростаюча послідовність номерів (n_k) така, що $\|\mathbf{x}_{n_{k+1}} - \bar{\mathbf{z}}\| > \|\mathbf{x}_{n_k} - \bar{\mathbf{z}}\|$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Спочатку розглянемо варіант a). В цьому випадку існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{z}}\| \in \mathbb{R}$. Оскільки $\|\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{z}}\|^2 - \|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{z}}\|^2 \rightarrow 0$ та $\alpha_n \rightarrow 0$, то при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| \rightarrow 0, \quad (4.24)$$

$$\|\mathbf{z}_n - \mathbf{y}_n\| \rightarrow 0. \quad (4.25)$$

Із обмеженості (\mathbf{x}_n) випливає існування підпослідовності (\mathbf{x}_{n_k}) , слабо збіжної до точки $\mathbf{w} \in \mathbf{H}$. Із (4.24) випливає, що $\mathbf{y}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{w}$. Отже, $\mathbf{w} \in \mathbf{C}$. Покажемо, що обов'язково $\mathbf{w} \in \mathbf{VI}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Можливі два варіанти:

- 1) числова послідовність (λ_{n_k}) не прямує до нуля;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = 0$.

Спочатку розглянемо варіант 1). Можна вважати, що $\lambda_{n_k} \geq \lambda$ для всіх достатньо великих k і деякого $\lambda > 0$. Маємо,

$$(\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}_{n_k} + \lambda_{n_k} \mathbf{A} \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}.$$

Звідки, використовуючи монотонність оператора \mathbf{A} , виводимо оцінку

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{(\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}_{n_k} + \lambda_{n_k} \mathbf{A} \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k})}{\lambda_{n_k}} &= \frac{(\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + \\ &+ (\mathbf{A} \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}) + (\mathbf{A} \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k}) \leq \\ &\leq \frac{(\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + (\mathbf{A} \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}) + (\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k}). \end{aligned}$$

Здійснивши граничний перехід з урахуванням (4.24), отримаємо

$$(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}.$$

Отже, $w \in VI(A, C)$.

Розглянемо варіант 2). Нехай $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = 0$. Покладемо

$$w_{n_k} = P_C(x_{n_k} - \mu_{n_k} Ax_{n_k}),$$

де

$$\mu_{n_k} = \lambda_{n_k} \tau^{-1} = \sigma \tau^{j(n_k)-1} > \lambda_{n_k} > 0.$$

Використаємо лему 4.1. Маємо,

$$\|x_{n_k} - w_{n_k}\| \leq \frac{1}{\tau} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \rightarrow 0.$$

Зокрема, послідовність (w_{n_k}) обмежена і слабо збігається до w . Із рівномірної неперервності оператора A на обмежених множинах випливає

$$\|Ax_{n_k} - Aw_{n_k}\| \rightarrow 0.$$

А з нерівності

$$\mu_{n_k} \|Aw_{n_k} - Ax_{n_k}\| > \theta \|w_{n_k} - x_{n_k}\|$$

випливає асимптотика

$$\frac{\|x_{n_k} - w_{n_k}\|}{\mu_{n_k}} \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

Далі маємо,

$$(w_{n_k} - x_{n_k} + \mu_{n_k} Ax_{n_k}, x - w_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Звідки виводимо оцінку

$$0 \leq \frac{(w_{n_k} - x_{n_k}, x - w_{n_k})}{\mu_{n_k}} + (Ax_{n_k}, x_{n_k} - w_{n_k}) + (Ax, x - x_{n_k}).$$

Здійснивши граничний перехід з урахуванням (4.26), отримаємо

$$(Ax, x - w) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

звідки, $w \in VI(A, C)$.

Доведемо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}) \leq 0. \quad (4.27)$$

Розглянемо таку підпослідовність (x_{n_k}) , що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_0 - \bar{z}, x_{n_k} - \bar{z}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightarrow w \in VI(A, C)$. Тоді отримаємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_0 - \bar{z}, x_{n_k} - \bar{z}) = (x_0 - \bar{z}, w - \bar{z}) = (x_0 - P_{VI(A,C)} x_0, w - P_{VI(A,C)} x_0) \leq 0,$$

чим і доводимо (4.27).

Тепер із (4.27), оцінки

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 &= \|\alpha_n (x_0 - \bar{z}) + (1 - \alpha_n) (z_n - \bar{z})\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|z_n - \bar{z}\|^2 + 2\alpha_n (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - \bar{z}\|^2 + 2\alpha_n (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}) \end{aligned}$$

та леми 1.11 робимо висновок, що $\|x_n - \bar{z}\| \rightarrow 0$. Із (4.24), (4.25) отримуємо $\|y_n - \bar{z}\| \rightarrow 0$ і $\|z_n - \bar{z}\| \rightarrow 0$.

Вивчимо варіант b). В цьому випадку розглянемо послідовність номерів (m_k) із властивостями (див. лему 1.12):

- (i) $m_k \nearrow +\infty$;
- (ii) $\|x_{m_{k+1}} - \bar{z}\| \geq \|x_{m_k} - \bar{z}\|$ для всіх $k \geq n_1$;
- (iii) $\|x_{m_{k+1}} - \bar{z}\| \geq \|x_k - \bar{z}\|$ для всіх $k \geq n_1$.

Із нерівності леми 4.5 та (ii) випливає

$$\begin{aligned} (1 - \theta) \|x_{m_k} - y_{m_k}\|^2 + (1 - \theta) \|z_{m_k} - y_{m_k}\|^2 &\leq \\ &\leq 2\alpha_{m_k} (x_0 - \bar{z}, x_{m_{k+1}} - \bar{z}) \leq 2\alpha_{m_k} M. \end{aligned}$$

Звідки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - y_{m_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{m_k} - y_{m_k}\| = 0.$$

Міркуваннями, подібними до викладених вище, показуємо, що часткові слабкі границі послідовностей (x_{m_k}) і (y_{m_k}) належать множині $VI(A, C)$. Із нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{m_{k+1}} - x_{m_k}\| &= \|\alpha_{m_k} x_0 + (1 - \alpha_{m_k}) z_{m_k} - x_{m_k}\| \leq \\ &\leq \alpha_{m_k} \|x_0 - x_{m_k}\| + (1 - \alpha_{m_k}) \|z_{m_k} - x_{m_k}\| \leq \\ &\leq \alpha_{m_k} \|x_0 - x_{m_k}\| + (1 - \alpha_{m_k}) (\|z_{m_k} - y_{m_k}\| + \|y_{m_k} - x_{m_k}\|) \end{aligned}$$

випливає $\|x_{m_{k+1}} - x_{m_k}\| \rightarrow 0$. Із тотожності

$$(x_0 - \bar{z}, x_{m_{k+1}} - \bar{z}) = (x_0 - \bar{z}, x_{m_k} - \bar{z}) + (x_0 - \bar{z}, x_{m_{k+1}} - x_{m_k})$$

отримуємо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\chi_0 - \bar{z}, \chi_{m_{k+1}} - \bar{z}) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\chi_0 - \bar{z}, \chi_{m_k} - \bar{z})$. Як і раніше отримуємо

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\chi_0 - \bar{z}, \chi_{m_{k+1}} - \bar{z}) \leq 0.$$

Далі матимемо

$$\begin{aligned} \|\chi_{m_{k+1}} - \bar{z}\|^2 &\leq (1 - \alpha_{m_k}) \|\chi_{m_k} - \bar{z}\|^2 + 2\alpha_{m_k} (\chi_0 - \bar{z}, \chi_{m_{k+1}} - \bar{z}) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_{m_k}) \|\chi_{m_{k+1}} - \bar{z}\|^2 + 2\alpha_{m_k} (\chi_0 - \bar{z}, \chi_{m_{k+1}} - \bar{z}). \end{aligned}$$

Звідки, враховуючи умову (iii), отримуємо

$$\|\chi_k - \bar{z}\|^2 \leq \|\chi_{m_{k+1}} - \bar{z}\|^2 \leq 2 (\chi_0 - \bar{z}, \chi_{m_{k+1}} - \bar{z}).$$

Таким чином,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|\chi_k - \bar{z}\|^2 \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\chi_0 - \bar{z}, \chi_{m_{k+1}} - \bar{z}) \leq 0.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_n - \bar{z}\| = 0$$

і, в свою чергу, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n - \bar{z}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}_n - \bar{z}\| = 0$. □

Розглянемо ще один варіант сильно збіжного модифікованого екстраградієнтного алгоритму для розв'язання варіаційної нерівності (4.1).

Алгоритм 4.5. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$ та елемент $\chi_0 \in \mathbf{H}$.*

Ітераційний крок. *Для $\chi_n \in \mathbf{H}$ обчислюємо*

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{P}_{\mathbf{C}} (\chi_n - \lambda_n \mathbf{A}\chi_n),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|\mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathbf{C}} (\chi_n - \sigma\tau^j \mathbf{A}\chi_n) - \mathbf{A}\chi_n\| \leq \\ \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \|\mathbf{P}_{\mathbf{C}} (\chi_n - \sigma\tau^j \mathbf{A}\chi_n) - \chi_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{P}_{\mathbf{T}_n} (\chi_n - \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{y}_n),$$

де

$$\mathbf{T}_n = \{\mathbf{z} \in \mathbf{H} : (\chi_n - \lambda_n \mathbf{A}\chi_n - \mathbf{y}_n, \mathbf{z} - \mathbf{y}_n) \leq 0\}.$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0,$$

де

$$\begin{aligned} C_n &= \{z \in H : \|z_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n &= \{z \in H : (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Множини Q_n , C_n — замкнені півпростори. Проектування точки на їх перетин $C_n \cap Q_n$ є елементарною задачею, яка має аналітичний розв'язок [36].

Зауваження 4.8. Алгоритм 4.5 утворений введенням процедури динамічного регулювання величини кроку та проектування на опорний для C півпростір в схему гібридного методу [42], який в свою чергу є регуляризацією методу Корпелевич за допомогою проекційної CQ -схеми апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів, що запропонована японськими математиками К. Накаґо та W. Takahashi [40].

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.5. Нехай множина $C \subseteq H$ — опукла і замкнена, оператор $A : H \rightarrow H$ — монотонний, рівномірно неперервний на обмежених множинах. Припустимо, що $VI(A, C) \neq \emptyset$. Тоді послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) , породжені алгоритмом 4.5, сильно збігаються до точки $\bar{z} = P_{VI(A, C)} x_0$.

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C)$. Для послідовностей (x_n) , (y_n) і (z_n) , які породжені алгоритмом 4.5, має місце нерівність

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \theta) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - \theta) \|z_n - y_n\|^2. \quad (4.28)$$

З нерівності (4.28) випливає $z \in C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, $VI(A, C) \subseteq C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тепер за допомогою математичної індукції покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ має місце вкладення $VI(A, C) \subseteq C_n \cap Q_n$. Для $n = 0$ маємо $Q_n = H$. Тому $VI(A, C) \subseteq C_0 \cap Q_0$. Нехай для деякого $k \in \mathbb{N}$ маємо $VI(A, C) \subseteq C_k \cap Q_k$. Тоді існує єдина точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$, така, що $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$. З $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$ випливає $(x_{k+1} - z, x_0 - x_{k+1}) \geq 0$ для всіх $z \in C_k \cap Q_k$. Оскільки $VI(A, C) \subseteq C_k \cap Q_k$, то $VI(A, C) \subseteq Q_{k+1}$. Таким чином, $VI(A, C) \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}$.

Покажемо, що послідовність (x_n) обмежена. Існує єдина точка $\bar{z} \in VI(A, C)$, така, що $\bar{z} = P_{VI(A, C)} x_0$. З $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$ випливає

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z - x_0\| \quad \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Оскільки $\bar{z} \in VI(A, C) \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|\bar{z} - x_0\|. \quad (4.29)$$

Звідки випливає обмеженість (x_n) .

Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (4.30)$$

З $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ та $x_n = P_{Q_n} x_0$, випливає $\|x_{n+1} - x_0\| \geq \|x_n - x_0\|$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Числова послідовність $(\|x_n - x_0\|)$ обмежена та неспадна. Тому існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|$. З іншого боку, оскільки $x_{n+1} \in Q_n$, то $(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \geq 0$ та

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|(x_n - x_0) - (x_{n+1} - x_0)\|^2 = \|x_n - x_0\|^2 - \\ &\quad - 2(x_n - x_0, x_{n+1} - x_0) + \|x_{n+1} - x_0\|^2 = \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 - \\ &\quad - 2(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Звідки випливає (4.30).

Оскільки $x_{n+1} \in C_n$, то $\|z_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|$. Звідки

$$\|z_n - x_n\| \leq \|z_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \leq 2 \|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0. \quad (4.31)$$

Використовуючи нерівність (4.28) отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_n - y_n\|^2 &\leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|z_n - z\|^2}{(1 - \theta)} = \\ &= \frac{(\|x_n - z\| - \|z_n - z\|)(\|x_n - z\| + \|z_n - z\|)}{(1 - \theta)} \leq \\ &\leq \frac{(\|x_n - z\| + \|z_n - z\|)}{(1 - \theta)} \|x_n - z_n\| = O(\|x_n - z_n\|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|z_n - y_n\|^2 &\leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|z_n - z\|^2}{(1 - \theta)} = \\ &= \frac{(\|x_n - z\| - \|z_n - z\|)(\|x_n - z\| + \|z_n - z\|)}{(1 - \theta)} \leq \\ &\leq \frac{(\|x_n - z\| + \|z_n - z\|)}{(1 - \theta)} \|x_n - z_n\| = O(\|x_n - z_n\|), \end{aligned}$$

де $z \in VI(A, C)$. З (4.31) випливає

$$\|x_n - y_n\| \rightarrow 0, \quad (4.32)$$

$$\|z_n - y_n\| \rightarrow 0. \quad (4.33)$$

Із обмеженості (x_n) випливає існування підпослідовності (x_{n_k}) , слабо збіжної до точки $w \in H$. Із (4.32) випливає, що $y_{n_k} \rightharpoonup w$. Отже, $w \in C$. Аналогічно міркуванням теореми 4.4, можна показати, що $w \in VI(A, C)$.

Для $\bar{z} = P_{VI(A,C)}x_0$ з нерівності (4.29) випливає

$$\|x_0 - \bar{z}\| \leq \|x_0 - w\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \|x_0 - \bar{z}\|.$$

Тобто, ми отримали $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| = \|x_0 - w\| = \|x_0 - \bar{z}\|$. Звідки, $x_{n_k} \rightarrow w = \bar{z}$. Отже, $x_n \rightarrow \bar{z}$. З (4.32) і (4.33) випливає $y_n \rightarrow \bar{z}$ і $z_n \rightarrow \bar{z}$, що і треба було довести. \square

З допомогою методу Takahashi–Takeuchi–Kubota [41] можна побудувати такий сильно збіжний алгоритм для розв'язання варіаційної нерівності (4.1).

Алгоритм 4.6. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$ та елемент $x_0 \in H$.*

Ітераційний крок. *Для $x_n \in H$ обчислюємо*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n\| \leq \\ \leq \frac{\theta}{\sigma\tau} \|P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n Ay_n),$$

де

$$T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n Ax_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}.$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0,$$

де

$$C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \quad C_0 = H.$$

Має місце

Теорема 4.6. *Нехай виконані умови A1) та A2). Тоді послідовності (x_n) , (y_n) і (z_n) , породжені алгоритмом 4.6, сильно збігаються до $P_{VI(A,C)}x_0$.*

Доведення. Для послідовностей (x_n) , (y_n) і (z_n) , які породжені алгоритмом 4.6, має місце нерівність (4.28). Покажемо, що алгоритм 4.6 породжує ланцюжок вкладень

$$H = C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots \supseteq VI(A, C).$$

Ясно, що $VI(A, C) \subseteq C_0 = H$. Припустимо, що $VI(A, C) \subseteq C_n$. Нехай $z \in VI(A, C)$. З (4.28) маємо

$$\|z_n - z\| \leq \|x_n - z\|.$$

Отже, $z \in C_{n+1}$. Тому $VI(A, C) \subseteq C_{n+1} \subseteq C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$x_n = P_{C_n}x_0, \quad VI(A, C) \subseteq C_n,$$

то для всіх $z \in VI(A, C)$ має місце нерівність

$$\|x_n - z\|^2 \leq \|x_0 - z\|^2 - \|x_n - x_0\|^2.$$

Звідки

$$\|x_n - x_0\|^2 \leq \|x_0 - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 \leq \|x_0 - z\|^2.$$

Звідки випливає обмеженість зверху послідовності $(\|x_n - x_0\|)$. Оскільки $C_{n+1} \subseteq C_n$, то $\|x_{n+1} - x_0\| \geq \|x_n - x_0\|$. Отже, $(\|x_n - x_0\|)$ — обмежена зверху та неспадна послідовність, тому існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|$.

Покажемо фундаментальність послідовності (x_n) . Для довільного $m \in \mathbb{N}$ маємо (враховуємо $C_{n+m} \subseteq C_n$)

$$\|x_{n+m} - x_n\|^2 = \|x_{n+m} - P_{C_n}x_0\|^2 \leq \|x_0 - x_{n+m}\|^2 - \|x_n - x_0\|^2.$$

Звідки випливає фундаментальність послідовності (x_n) . Таким чином,

$$x_n \rightarrow \bar{z} \in H \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Покажемо, що $\bar{z} \in VI(A, C)$. Оскільки $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\|z_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Звідки

$$\|z_n - x_n\| \leq \|z_n - x_{n+1}\| + \|x_n - x_{n+1}\| \leq 2 \|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0.$$

Використовуючи нерівність (4.28), для всіх $z \in VI(A, C)$ одержимо асимптотичні співвідношення

$$\|x_n - y_n\|^2 = O(\|x_n - z_n\|), \quad \|z_n - y_n\|^2 = O(\|x_n - z_n\|),$$

Звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - z_n\| = 0.$$

З одержаних асимптотик випливає, що $y_n \rightarrow \bar{z}$ та $z_n \rightarrow \bar{z}$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, $\bar{z} \in C$. Аналогічно міркуванням теореми 4.4, можна показати, що

$$\bar{z} \in VI(A, C).$$

Оскільки $x_n = P_{C_n} x_0$ і $VI(A, C) \subseteq C_n$, то

$$(x_n - x_0, z - x_n) \geq 0 \quad \forall z \in VI(A, C).$$

Здійснивши граничний перехід в цій нерівності, одержимо

$$(\bar{z} - x_0, z - \bar{z}) \geq 0 \quad \forall z \in VI(A, C),$$

тобто $\bar{z} = P_{VI(A, C)} x_0$.

Як видно з наведених міркувань послідовності (y_n) та (z_n) сильно збігаються до $\bar{z} = P_{VI(A, C)} x_0$. \square

4.4.2. Варіант для задач з апіорною інформацією

Розглянемо квазінерозтягуючий оператор $S : H \rightarrow H$ з множиною нерухомих точок $F(S)$ та задачу

$$\text{знайти } x \in VI(A, C) \cap F(S). \quad (4.34)$$

Припустимо, що оператор $I - S$ — демізамкнений в нулі та виконується умова АЗ). Для пошуку розв'язків задачі (4.34) розглянемо наступний ітераційний алгоритм.

Алгоритм 4.7. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, елемент $x_0 \in H$, послідовність $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0, 1)$ і послідовність $(\alpha_n) \subseteq (0, 1)$, таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.*

Ітераційний крок. Для $x_n \in H$ обчислюємо

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n\| \leq \\ \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \|P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n)(\delta_n x_n + (1 - \delta_n) SP_{T_n}(x_n - \lambda_n Ay_n)),$$

$$\text{де } T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n Ax_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}.$$

При аналізі алгоритму 4.7 будемо продовжувати використовувати позначення (4.18).

Лема 4.7. Для породжених алгоритмом 4.7 послідовностей (x_n) , (y_n) та (z_n) має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + (1 - \delta_n)(1 - \theta)\|x_n - y_n\|^2 + \\ + (1 - \delta_n)(1 - \theta)\|z_n - y_n\|^2 + \delta_n(1 - \delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 \leq \\ \leq 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z). \end{aligned}$$

де $z \in VI(A, C) \cap F(S)$.

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C) \cap F(S)$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|\alpha_n(x_0 - z) + (1 - \alpha_n)(\delta_n x_n + (1 - \delta_n)Sz_n - z)\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|\delta_n x_n + (1 - \delta_n)Sz_n - z\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z) \leq \\ &\leq \|\delta_n(x_n - z) + (1 - \delta_n)(Sz_n - z)\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z) = \\ &= \delta_n \|x_n - z\|^2 + (1 - \delta_n)\|Sz_n - z\|^2 - \delta_n(1 - \delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 + \\ &\quad + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z) \leq \\ &\leq \delta_n \|x_n - z\|^2 + (1 - \delta_n)\|z_n - z\|^2 - \delta_n(1 - \delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 + \\ &\quad + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Використовуючи лему 4.4 для оцінки доданка $(1 - \delta_n)\|z_n - z\|^2$ в (4.35), при-

ходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \delta_n)(1 - \theta) \|x_n - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - \delta_n)(1 - \theta) \|z_n - y_n\|^2 - \delta_n(1 - \delta_n) \|x_n - Sz_n\|^2 + \\ &\quad + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z). \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. \square

Лема 4.8. *Послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) — обмежені.*

Доведення. Нехай $z \in VI(A, C) \cap F(S)$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\| &\leq \\ &\leq \alpha_n \|x_0 - z\| + (1 - \alpha_n) \delta_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)(1 - \delta_n) \|Sz_n - z\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|x_0 - z\| + (1 - \alpha_n) \delta_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n)(1 - \delta_n) \|z_n - z\|. \end{aligned}$$

Скориставшись нерівністю (4.19), отримаємо

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \alpha_n \|x_0 - z\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - z\| \leq \max\{\|x_0 - z\|, \|x_n - z\|\}.$$

Отже, $\|x_{n+1} - z\| \leq \max\{\|x_0 - z\|, \|x_1 - z\|\}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, послідовність (x_n) — обмежена. Обмеженість послідовностей (y_n) і (z_n) випливає із обмеженості (x_n) і нерівності (4.19). \square

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.7. *Нехай множина $C \subseteq H$ — опукла і замкнена, оператор $A : H \rightarrow H$ — монотоний, рівномірно неперервний на обмежених множинах. Нехай оператор $S : H \rightarrow H$ — квазінерозтягуючий, причому оператор $I - S$ демізамкнений в нулі. Припустимо, що $VI(A, C) \cap F(S) \neq \emptyset$. Тоді послідовності (x_n) , (y_n) та (z_n) , породжені алгоритмом 4.7, сильно збігаються до точки $\bar{z} = P_{VI(A, C) \cap F(S)} x_0$.*

Доведення. Розглянемо елемент $\bar{z} = P_{VI(A, C) \cap F(S)} x_0$. Із леми 4.8 випливає існування такого числа $M > 0$, що

$$|(x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z})| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тоді із нерівності леми 4.7 отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 - \|x_n - \bar{z}\|^2 + (1 - \delta_n)(1 - \theta) \|x_n - y_n\|^2 + \\ + (1 - \delta_n)(1 - \theta) \|z_n - y_n\|^2 + \delta_n(1 - \delta_n) \|x_n - Sz_n\|^2 \leq 2\alpha_n M. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Розглянемо числову послідовність $(\|x_n - \bar{z}\|)$. Можливі два варіанти:

- a) існує номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такий, що $\|x_{n+1} - \bar{z}\| \leq \|x_n - \bar{z}\|$ для всіх $n \geq \bar{n}$;
 b) існує зростаюча послідовність номерів (n_k) така, що

$$\|x_{n_k+1} - \bar{z}\| > \|x_{n_k} - \bar{z}\|$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Спочатку розглянемо варіант a). В цьому випадку існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{z}\| \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$\|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 - \|x_n - \bar{z}\|^2 \rightarrow 0$$

і $\alpha_n \rightarrow 0$, то при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$\|x_n - y_n\| \rightarrow 0, \quad (4.37)$$

$$\|z_n - y_n\| \rightarrow 0, \quad (4.38)$$

$$\|x_n - Sz_n\| \rightarrow 0. \quad (4.39)$$

Із обмеженості послідовності (x_n) випливає існування підпослідовності (x_{n_k}) , яка слабо збігається до точки $w \in H$. Із (4.37) випливає, що (y_{n_k}) слабо збігається до $w \in H$. Отже, $w \in C$. Міркуючи як в доведенні теореми 4.4 отримуємо, що

$$w \in VI(A, C).$$

Залишилось показати, що $w \in F(S)$. Оскільки

$$\|z_n - Sz_n\| \leq \|z_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| + \|x_n - Sz_n\|,$$

то із (4.37), (4.38) та (4.39) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - Sz_n\| = 0.$$

Оператор $I - S$ демізамкнений в нулі. Отже з $z_{n_k} \rightharpoonup w$ та

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{n_k} - Sz_{n_k}\| = 0$$

отримуємо, що $w \in F(S)$.

Як і при доведенні теореми 4.4 отримуємо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}) \leq 0. \quad (4.40)$$

Із (4.40), нерівності

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \bar{z}\|^2 &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|\delta_n x_n + (1 - \delta_n) S z_n - \bar{z}\|^2 + \\
&\quad + 2\alpha_n (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}) \leq \\
&\leq (1 - \alpha_n) \delta_n \|x_n - \bar{z}\|^2 + (1 - \alpha_n) (1 - \delta_n) \|S z_n - \bar{z}\|^2 + \\
&\quad + 2\alpha_n (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}) \leq \\
&\leq (1 - \alpha_n) \delta_n \|x_n - \bar{z}\|^2 + (1 - \alpha_n) (1 - \delta_n) \|z_n - \bar{z}\|^2 + \\
&\quad + 2\alpha_n (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z}) \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - \bar{z}\|^2 + 2\alpha_n (x_0 - \bar{z}, x_{n+1} - \bar{z})
\end{aligned}$$

і леми 1.11 робимо висновок, що $\|x_n - \bar{z}\| \rightarrow 0$. Із (4.37), (4.38) отримуємо $\|y_n - \bar{z}\| \rightarrow 0$ і $\|z_n - \bar{z}\| \rightarrow 0$.

Вивчимо варіант б). В цьому випадку розглянемо послідовність номерів (m_k) , що володіють властивостями:

- (i) $m_k \nearrow +\infty$;
- (ii) $\|x_{m_k+1} - \bar{z}\| \geq \|x_{m_k} - \bar{z}\|$ для всіх $k \geq n_1$;
- (iii) $\|x_{m_k+1} - \bar{z}\| \geq \|x_k - \bar{z}\|$ для всіх $k \geq n_1$.

Із (ii) випливає

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_{m_k}) (1 - \theta) \|x_{m_k} - y_{m_k}\|^2 + (1 - \delta_{m_k}) (1 - \theta) \|z_{m_k} - y_{m_k}\|^2 + \\
+ \delta_{m_k} (1 - \delta_{m_k}) \|x_{m_k} - S z_{m_k}\|^2 \leq 2\alpha_{m_k} (x_0 - \bar{z}, x_{m_k+1} - \bar{z}) \leq 2\alpha_{m_k} M.
\end{aligned}$$

Звідки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - y_{m_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{m_k} - y_{m_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - S z_{m_k}\| = 0.$$

Міркуваннями подібними до викладених вище, показуємо, що часткові слабкі границі послідовностей (x_{m_k}) , (y_{m_k}) і (z_{m_k}) належать множині $VI(A, C) \cap F(S)$. Із нерівності

$$\begin{aligned}
\|x_{m_k+1} - x_{m_k}\| &= \|\alpha_{m_k} (x_0 - x_{m_k}) + (1 - \alpha_{m_k}) (1 - \delta_{m_k}) (S z_{m_k} - x_{m_k})\| \leq \\
&\leq \alpha_{m_k} \|x_0 - x_{m_k}\| + (1 - \alpha_{m_k}) (1 - \delta_{m_k}) \|S z_{m_k} - x_{m_k}\|.
\end{aligned}$$

випливає $\|x_{m_k+1} - x_{m_k}\| \rightarrow 0$. Далі повторюємо доведення теореми 4.4. \square

Розглянемо тепер операторне рівняння з апіорною інформацією, що задана у вигляді множини нерухомих точок оператора $T : H \rightarrow H$:

$$Ax = 0, \quad x \in F(T). \tag{4.41}$$

Алгоритм 4.7 для задачі (4.41) приймає наступний вигляд.

Алгоритм 4.8. *Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, елемент $x_0 \in H$, послідовність $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0, 1)$ і послідовність $(\alpha_n) \subseteq (0, 1)$, таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.*

Ітераційний крок. *Для $x_n \in H$ обчислюємо*

$$y_n = x_n - \lambda_n A x_n,$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : \|A(x_n - \sigma\tau^j A x_n) - A x_n\| \leq \theta \|A x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n) (\delta_n x_n + (1 - \delta_n) T(x_n - \lambda_n A y_n)).$$

Частковим випадком теореми 4.7 є наступний результат.

Теорема 4.8. *Нехай оператор $A : H \rightarrow H$ — монотонний, рівномірно неперервний на обмежених множинах. Нехай оператор $T : H \rightarrow H$ — квазінерозтягуючий, причому оператор $I - T$ демізамкнений в нулі. Припустимо, що $A^{-1}0 \cap F(T) \neq \emptyset$. Тоді послідовності (x_n) , (y_n) і (z_n) , породжені алгоритмом 4.8, сильно збігаються до точки $\bar{z} = P_{A^{-1}0 \cap F(T)} x_0$.*

Розділ 5

Алгоритм розщеплення для варіаційних нерівностей

При розв'язанні складних задач дослідження операцій та оптимального керування велике значення мають різні декомпозиційні підходи, що дозволяють зводити розв'язання вихідної задачі до розв'язання послідовності задач більш простої структури.

Популярні алгоритми розщеплення для варіаційних нерівностей

$$\text{знайти } x \in C : \exists u \in \sum_i A_i x \text{ і } (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

або більш загальних задач пошуку нулів суми монотонних операторів

$$\text{знайти } x \in H : 0 \in \sum_i T_i x,$$

використовують на кожному кроці резольвенти багатозначних операторів [36]. Явний крок в алгоритмах цитованих робіт використовується тільки для однозначних операторів-доданків. Завдяки неявному характеру ці методи мають достатній запас стійкості, однак обчислення резольвенти часто вимагає великих обчислювальних витрат. Нагадаємо, що резольвентою оператора $A : H \rightarrow 2^H$ називають оператор $J_A = (I + A)^{-1} : H \rightarrow 2^H$. Відомо, що у випадку максимальної монотонності оператора A резольвента J_A є однозначним, всюди заданим та міцно нерозтягуючим (firmly nonexpansive) оператором [36].

В алгоритміці опуклої оптимізації для задач вигляду

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n \rightarrow \min_C$$

з'явилась серія субградієнтних алгоритмів розщеплення явного характеру [43, 44]. Ці схеми варто перенести на випадок варіаційних нерівностей, оскільки інструкція

$$\mathbf{y} := P_C(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in A\mathbf{x}, \quad \lambda > 0,$$

як правило, набагато простіше обчислення значення \mathbf{y} резольвенти оператора $\lambda A_i + N_C$ в точці \mathbf{x} , тобто розв'язання варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } \mathbf{y} \in C : \exists \mathbf{u} \in A_i \mathbf{y} \text{ і } \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{z} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in C.$$

В роботі [45] один з цих алгоритмів адаптовано для варіаційних нерівностей. Також в [45] описано без обґрунтування метод, що узагальнює відомий в оптимізації «incremental subgradient method» [43].

Нижче ми дослідимо згаданий алгоритм розщеплення (декомпозиції) для варіаційних нерівностей з багатозначними максимальними монотонними операторами, що діють у гільбертовому просторі.

5.1. Попередні відомості та постановка задачі

Введемо позначення та сформулюємо задачу. Всюди далі H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком (\cdot, \cdot) та породженою нормою $\|\cdot\|$. Як завжди символом P_K позначимо оператор метричної проекції простору H на замкнену опуклу множину $K \subseteq H$.

Нагадаємо деякі поняття [36]. Нехай $A : H \rightarrow 2^H$ — багатозначний оператор з графіком

$$\Gamma_A = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in H^2 : \mathbf{u} \in A\mathbf{x}\}.$$

Означення 5.1. Оператор $A : H \rightarrow 2^H$ називають монотонним, якщо для всіх $(\mathbf{x}, \mathbf{u}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}) \in \Gamma_A$ виконується нерівність

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0.$$

Означення 5.2. Оператор $A : H \rightarrow 2^H$ називають сильно монотонним з константою $\mu > 0$, якщо для всіх пар точок $(\mathbf{x}, \mathbf{u}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}) \in \Gamma_A$ виконується нерівність

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Означення 5.3. Оператор $A : H \rightarrow 2^H$ називають максимальним монотонним, якщо для довільного монотонного оператора $B : H \rightarrow 2^H$ із співвідношення $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ випливає $\Gamma_A = \Gamma_B$.

Нехай:

- $A_i : H \rightarrow 2^H$ — монотонний оператор, $i = \overline{1, p}$;
- $A = \sum_{i=1}^p A_i$ — максимальний монотонний оператор;
- $C \subseteq \bigcap_{i=1}^p \text{dom}(A_i)$ — замкнена опукла множина.

Варіаційна нерівність з оператором A на множині C формулюється таким чином:

$$\text{знайти } x \in C : \exists u \in Ax \text{ та } (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (5.1)$$

Зауваження 5.1. У вигляді (5.1) можна сформулювати екстремальну задачу

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p \rightarrow \min_C,$$

де f_i — неперервні на H опуклі функції. Тут $A_i = \partial f_i$ — субдиференціал функції f_i :

$$\partial f_i(x) = \{v \in H : f_i(y) - f_i(x) \geq (v, y - x) \quad \forall y \in H\}.$$

Множину розв'язків варіаційної нерівності (5.1) позначимо через $VI(A, C)$. Важливим фактом відносно структури множини розв'язків варіаційної нерівності є наступна

Лема 5.1. Якщо оператор $A : H \rightarrow 2^H$ — максимальний монотонний, то

$$VI(A, C) = \{x \in C : (v, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C \quad \forall v \in Ay\}.$$

Зокрема, множина $VI(A, C)$ опукла та замкнена.

Наша мета полягає в дослідженні явного алгоритму розщеплення для розв'язання варіаційної нерівності (5.1), що узагальнює відомий в опуклій оптимізації «incremental subgradient method» [43].

Під явним ми розуміємо алгоритм, що не містить операцій обчислення резольвент операторів $A_i + N_C$, де N_C — нормальний конус множини C в точці-аргументі, тобто

$$N_{Cx} = \begin{cases} \{w \in H : (w, y - x) \leq 0\}, & x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

5.2. Алгоритм розщеплення

Опишемо алгоритм розщеплення для варіаційної нерівності (5.1) [45].

Зафіксуємо послідовність додатніх чисел (λ_n) , що задовольняє умови:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty. \quad (5.2)$$

Алгоритм 5.1. *Задано $(\lambda_n) \in \ell_2 \setminus \ell_1$.*

Крок 1. *Задаємо $x_1 \in C$; $n := 1$.*

Крок 2. *Починаючи з $y_{(n,0)} = x_n$ послідовно знаходимо елементи:*

$$\begin{aligned} y_{(n,i)} &= P_C \left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)} \right) = \\ &= \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda_n (u_{(n,i)}, y - y_{(n,i-1)}) + \frac{1}{2} \|y - y_{(n,i-1)}\|^2 \right\}, \\ &u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \quad i = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Крок 3. *Якщо $y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)}$ для всіх $i = \overline{1, p}$, то СТОП та $x_n \in VI(A, C)$.
Інакше переходимо на Крок 4.*

Крок 4. *Покладаємо*

$$x_{n+1} = y_{(n,p)},$$

$n := n + 1$, переходимо на Крок 2.

Покажемо, що якщо $y_{(n,i)} = x_n$ для всіх $i = \overline{1, p}$, то $x_n \in VI(A, C)$. Дійсно, нехай $x_n = y_{(n,1)} = P_C(x_n - \lambda_n u_{(n,1)})$. Тоді,

$$(x_n - (x_n - \lambda_n u_{(n,1)}), y - x_n) = \lambda_n (u_{(n,1)}, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Звідки, $(u_{(n,1)}, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C$. Аналогічно отримуємо для всіх $i = \overline{2, p}$ $(u_{(n,i)}, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C$. Звідки, $(u_n, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C$, де $u_n = \sum_{i=1}^p u_{(n,i)} \in \sum_{i=1}^p A_i x_n = A x_n$. Тобто, $x_n \in VI(A, C)$.

Далі розглянемо ситуацію, коли алгоритм 5.1 породжує нескінченну послідовність.

Навіть у випадку $p = 1$, коли алгоритм 5.1 співпадає з класичним «субградієнтним методом», на такому рівні загальності не очікується збіжність послідовності (x_n) . Нашою основною метою є доведення слабкої збіжності в

Н послідовності чезарівських середніх

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

Результати такого типу традиційно називають теоремами чезарівської або ергодичної збіжності [46–48].

Зробимо відносно операторів A_i наступне припущення:

$$\text{множини } \bigcup_{i=1}^p A_i y_{(n,i-1)} \text{ рівномірно обмежені.} \quad (5.3)$$

Зауваження 5.2. Припущення (5.3) — аналог використаного в [43, 44] «subgradient boundedness assumption».

5.3. Основні оцінки

Аналіз збіжності алгоритму почнемо з доведення двох важливих оцінок для послідовностей (x_n) та (z_n) .

Лема 5.2. Для породженої алгоритмом 5.1 послідовності (x_n) та елемента $y \in C$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 &\leq \|x_n - y\|^2 - 2\lambda_n (v, x_n - y) + \\ &\quad + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|u_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \|u_{(n,k)}\|, \end{aligned} \quad (5.4)$$

де $v = \sum_{i=1}^p v_i$, $v_i \in A_i y$, $i = \overline{1, p}$.

Доведення. Для $y \in C$ и x_{n+1} маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 &= \|P_C (y_{(n,p-1)} - \lambda_n u_{(n,p)}) - y\|^2 \leq \|y_{(n,p-1)} - \lambda_n u_{(n,p)} - y\|^2 = \\ &= \|y_{(n,p-1)} - y\|^2 + \lambda_n^2 \|u_{(n,p)}\|^2 - 2\lambda_n (u_{(n,p)}, y_{(n,p-1)} - y). \end{aligned}$$

Візьмемо $v_p \in A_p y$. Завдяки монотонності оператора A_p отримуємо

$$(u_{(n,p)}, y_{(n,p-1)} - y) \geq (v_p, y_{(n,p-1)} - y).$$

Отже,

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|y_{(n,p-1)} - y\|^2 + \lambda_n^2 \|u_{(n,p)}\|^2 - 2\lambda_n (v_p, y_{(n,p-1)} - y). \quad (5.5)$$

Аналогічно отримуємо нерівності

$$\|\mathbf{y}_{(n,i)} - \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{y}_{(n,i-1)} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda_n^2 \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2 - 2\lambda_n (\mathbf{v}_i, \mathbf{y}_{(n,i-1)} - \mathbf{y}), \quad (5.6)$$

де $\mathbf{v}_i \in \mathbf{A}_i \mathbf{y}$, $i = \overline{1, p-1}$. Ураховуючи (5.6) в (5.5), отримуємо

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2 - 2\lambda_n \sum_{i=1}^p (\mathbf{v}_i, \mathbf{y}_{(n,i-1)} - \mathbf{y}).$$

Маємо, $\sum_{i=1}^p (\mathbf{v}_i, \mathbf{y}_{(n,i-1)} - \mathbf{y}) = (\mathbf{v}, \mathbf{x}_n - \mathbf{y}) + \sum_{i=2}^p (\mathbf{v}_i, \mathbf{y}_{(n,i-1)} - \mathbf{x}_n)$, де $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \mathbf{v}_i \in \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$. Оскільки

$$|(\mathbf{v}_i, \mathbf{y}_{(n,i-1)} - \mathbf{x}_n)| \leq \|\mathbf{v}_i\| \|\mathbf{y}_{(n,i-1)} - \mathbf{x}_n\| \leq \|\mathbf{v}_i\| \lambda_n \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(n,k)}\|,$$

то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 - 2\lambda_n (\mathbf{v}, \mathbf{x}_n - \mathbf{y}) + \\ &\quad + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|\mathbf{v}_i\| \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(n,k)}\|, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. \square

Лема 5.3. Для породженої алгоритмом 5.1 послідовності (\mathbf{x}_n) , послідовності середніх (\mathbf{z}_n) та елемента $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}\|^2}{\sum_{n=1}^m \lambda_n} &\leq 2(\mathbf{v}, \mathbf{y} - \mathbf{z}_m) + \\ &\quad + \frac{\sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2}{\sum_{n=1}^m \lambda_n} + \frac{2 \sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|\mathbf{v}_i\| \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(n,k)}\|}{\sum_{n=1}^m \lambda_n}, \quad (5.7) \end{aligned}$$

де $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{A}_i \mathbf{y}$, $i = \overline{1, p}$.

Доведення. Запишемо нерівність леми 5.2 у вигляді

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 &\leq 2(\mathbf{v}, \lambda_n \mathbf{y} - \lambda_n \mathbf{x}_n) + \\ &\quad + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|\mathbf{v}_i\| \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(n,k)}\|, \quad (5.8) \end{aligned}$$

Сумуючи (5.8) по n від 1 до $m \in \mathbb{N}$, отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 &\leq 2 \left(v, \sum_{n=1}^m \lambda_n y - \sum_{n=1}^m \lambda_n x_n \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|u_{(n,i)}\|^2 + 2 \sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \|u_{(n,k)}\|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Розділивши (5.9) на $\sum_{n=1}^m \lambda_n$, приходимо до нерівності (5.7). \square

5.4. Теорема збіжності алгоритму

5.4.1. Ергодична слабка збіжність алгоритму

Припустимо, що $VI(A, C) \neq \emptyset$. Має місце

Лема 5.4. *Нехай (x_n) – породжена алгоритмом 5.1 послідовність. Тоді для довільного елемента $y \in VI(A, C)$ існує скінченна границя*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|.$$

Зокрема, послідовність (x_n) обмежена.

Доведення. Скористаємось лемами 1.10 та 5.2. В нерівності (5.4) припустимо, що $y \in VI(A, C)$. Нехай $v_i \in A_i y$, $i = \overline{1, p}$. Отримаємо

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|u_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \|u_{(n,k)}\|, \quad (5.10)$$

оскільки

$$(v, x_n - y) \geq 0, \quad v = \sum_{i=1}^p v_i \in Ay.$$

З нерівності (5.10), припущення (5.3) та умови $(\lambda_n) \in \ell_2$ випливає існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$. \square

Обмеженість послідовності (x_n) тягне за собою обмеженість послідовності середніх (z_n) . А з леми 5.3 випливає

Лема 5.5. *Всі слабкі часткові границі послідовності середніх (z_n) належить множині $VI(A, C)$.*

Доведення. Розглянемо слабо збіжну підпослідовність (z_{n_l}) послідовності (z_n) . Нехай $z \in H$ — слабка границя (z_{n_l}) . Ясно, що z належить множині C . Записавши нерівність (5.7) для елементів z_{n_l} , після граничного переходу при $l \rightarrow \infty$, отримаємо

$$(v, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in C \quad \forall v \in Ay,$$

що в силу леми 5.1 рівносильно включенню $z \in VI(A, C)$. \square

Сформулюємо один з основних результатів.

Теорема 5.1. *Справедливі твердження:*

(1) якщо $VI(A, C) \neq \emptyset$, то послідовність середніх за Чезаро (z_n) слабо збігається до деякого елемента $x \in VI(A, C)$;

(2) якщо $VI(A, C) = \emptyset$, то $\|z_n\| \rightarrow +\infty$.

Доведення. З лем 5.4 та 5.5 випливає, що у випадку $VI(A, C) \neq \emptyset$ для згенерованої алгоритмом 5.1 послідовності (x_n) та для множини $F = VI(A, C)$ виконано умови леми 1.8. Отже, послідовність (z_n) слабо збігається до деякого елемента $x \in VI(A, C)$.

Припустимо, що

$$VI(A, C) = \emptyset.$$

Тоді $\|z_n\| \rightarrow +\infty$. Дійсно, інакше послідовність (z_n) має слабку граничну точку z , яка, як було показано вище, належить множині $VI(A, C)$. \square

5.4.2. Сильна збіжність

При деяких додаткових умовах має місце сильна збіжність (x_n) .

Теорема 5.2. *Нехай оператор A_1 сильно монотонний. Тоді породжена алгоритмом 5.1 послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності (5.1).*

Доведення. Нехай $z \in C$ — розв'язок (5.1), A_1 — сильно монотонний оператор з константою $\mu > 0$. При $i \neq 1$ маємо

$$\|y_{(n,i)} - y\|^2 \leq \|y_{(n,i-1)} - y\|^2 + \lambda_n^2 \|u_{(n,i)}\|^2 - 2\lambda_n (v_i, y_{(n,i-1)} - y),$$

де $y \in C$, $v_i \in A_1 y$. Візьмемо $v_1 \in A_1 y$. Завдяки сильній монотонності оператора A_1 отримуємо $(u_{(n,1)}, x_n - y) \geq (v_1, x_n - y) + \mu \|x_n - y\|^2$. Отже,

$$\|y_{(n,1)} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \|u_{(n,1)}\|^2 - 2\lambda_n (v_1, x_n - y) - 2\mu\lambda_n \|x_n - y\|^2.$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y\|^2 &\leq \|x_n - y\|^2 - 2\lambda_n (v, x_n - y) + \\ &+ \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|u_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \|u_{(n,k)}\| - 2\mu\lambda_n \|x_n - y\|^2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

де

$$v = \sum_{i=1}^p v_i \in \sum_{i=1}^p A_i y = Ay.$$

Розглянувши в (5.11) варіант $y = z$, приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} 2\mu\lambda_n \|x_n - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 + \\ &+ \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|u_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \|u_{(n,k)}\|. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Просумувавши (5.12) по n від 1 до N , отримаємо

$$\begin{aligned} 2\mu \sum_{n=1}^N \lambda_n \|x_n - z\|^2 &\leq \|x_1 - z\|^2 - \|x_{N+1} - z\|^2 + \\ &+ \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \left(\sum_{i=1}^p \|u_{(n,i)}\|^2 + 2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \|u_{(n,k)}\| \right). \end{aligned}$$

Звідки випливає

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_n - z\|^2 < +\infty.$$

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$$

та існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$, то маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = 0$. \square

Теорема 5.3. *Нехай оператори $A_i : H \rightarrow 2^H$ максимамальні монотонні ($i = \overline{1, p}$) та*

$$\text{intVI}(A, C) \neq \emptyset.$$

Тоді породжена алгоритмом 5.1 послідовність (x_n) сильно збігається до розв'язку (5.1).

Доведення. Візьмемо елемент $y \in \text{intVI}(A, C)$. Оскільки оператори A_i ло-

кально обмежені [36], то існує така куля

$$B(\mathbf{y}, r) = \{z \in \mathbf{H} : \|z - \mathbf{y}\| \leq r\} \subseteq VI(A, C) \quad (r > 0)$$

та число $M > 0$, що для $\mathbf{w} \in B(\mathbf{y}, r)$ маємо (див. нерівність (5.10))

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{w}\|^2 + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 M \sum_{i=2}^p \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(n,k)}\|.$$

Запишемо для

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{y} - r \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|} \in B(\mathbf{y}, r)$$

попередню нерівність

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}_n\|^2 \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\|^2 + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 M \sum_{i=2}^p \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(n,k)}\|.$$

Цій нерівності можна надати такого вигляду

$$\begin{aligned} 2r \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| &\leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y}\|^2 + \\ &+ \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(n,i)}\|^2 + 2\lambda_n^2 M \sum_{i=2}^p \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(n,k)}\|. \end{aligned}$$

Для довільних $m > n$ маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| &\leq \sum_{l=n}^{m-1} \|\mathbf{x}_{l+1} - \mathbf{x}_l\| \leq \frac{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}\|^2}{2r} + \\ &+ \frac{1}{2r} \sum_{l=n}^{m-1} \lambda_l^2 \left(\sum_{i=1}^p \|\mathbf{u}_{(l,i)}\|^2 + 2M \sum_{i=2}^p \sum_{k=1}^i \|\mathbf{u}_{(l,k)}\| \right). \end{aligned}$$

З припущення (5.3), $(\lambda_n) \in \ell_2$ та леми 5.4 випливає фундаментальність послідовності (\mathbf{x}_n) . Нехай $\mathbf{z} \in \mathbf{H}$ — сильна границя (\mathbf{x}_n) . Тоді послідовність середніх (\mathbf{z}_n) сильно збігається до \mathbf{z} . Включення $\mathbf{z} \in VI(A, C)$ випливає з леми 5.5. \square

5.5. Заключні коментарі

Включивши операцію усереднення в схему обчислень, отримаємо наступний явний алгоритм розщеплення.

Алгоритм 5.2. *Задано $(\lambda_n) \in \ell_2 \setminus \ell_1$.*

Крок 1. *Задаємо $x_1 = z_1 \in C$; $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.*

Крок 2. *Покладаємо $y_{(n,0)} = x_n$ та послідовно знаходимо елементи:*

$$y_{(n,i)} = P_C (y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}), \quad u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \quad i = \overline{1, p}.$$

Крок 3. *Якщо $y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)}$ для всіх $i = \overline{1, p}$, то СТОП та $x_n \in VI(A, C)$.
Інакше переходимо на Крок 4.*

Крок 4. *Покладаємо*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_{(n,p)}, \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \lambda_{n+1}, \\ z_{n+1} &= \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1}, \end{aligned}$$

$n := n + 1$, *переходимо на Крок 2.*

Якщо $VI(A, C) \neq \emptyset$, то послідовність (z_n) , породжена цим алгоритмом, слабо збігається до деякого елемента $x \in VI(A, C)$, інакше $\|z_n\| \rightarrow +\infty$.

Наведемо варіант алгоритму 5.2 для задачі пошуку сідлової точки:

$$\text{знайти } (x, y) \in X \times Y : L(x, \eta) \leq L(x, y) \leq L(\xi, y) \quad \forall (\xi, \eta) \in X \times Y,$$

де X, Y — опуклі замкнені підмножини відповідних гільбертових просторів, $L = \sum_{i=1}^p L_i$, $L_i : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервні опукло-угнуті функції.

Алгоритм 5.3. *Задано $(\lambda_n) \in \ell_2 \setminus \ell_1$.*

Крок 1. *Задаємо $x_1 = \bar{x}_1 \in X$, $y_1 = \bar{y}_1 \in Y$; $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.*

Крок 2. *Покладаємо $\xi_{(n,0)} = x_n$, $\eta_{(n,0)} = y_n$ та послідовно знаходимо елементи:*

$$\xi_{(n,i)} = P_X (\xi_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}), \quad u_{(n,i)} \in \partial_1 L_i (\xi_{(n,i-1)}, \eta_{(n,i-1)}), \quad i = \overline{1, p}.$$

$$\eta_{(n,i)} = P_Y (\eta_{(n,i-1)} + \lambda_n v_{(n,i)}), \quad v_{(n,i)} \in \partial_2 L_i (\xi_{(n,i-1)}, \eta_{(n,i-1)}), \quad i = \overline{1, p}.$$

Крок 3. Якщо $\xi_{(n,i)} = \xi_{(n,i-1)}$ і $\eta_{(n,i)} = \eta_{(n,i-1)}$ для всіх $i = \overline{1, p}$, то **СТОП** та (x_n, y_n) — сідлова точка. Інакше переходимо на Крок 4.

Крок 4. Покладаємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \xi_{(n,p)}, & y_{n+1} &= \eta_{(n,p)}, & \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \lambda_{n+1}, \\ \bar{x}_{n+1} &= \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) \bar{x}_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1}, \\ \bar{y}_{n+1} &= \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) \bar{y}_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} y_{n+1}, \end{aligned}$$

$n := n + 1$, переходимо на Крок 2.

На завершення зауважимо, що цікавою та актуальною проблемою є побудова та обґрунтування схем розщеплення (декомпозиції) для варіаційних нерівностей вигляду:

$$\text{знайти } x \in \bigcap_k F(T_k) : \exists u \in \sum_i A_i x \text{ і } (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \bigcap_k F(T_k), \quad (5.13)$$

де $F(T_k)$ — множина нерухомих точок (квазі)нерозтягуючого оператора T_k . У випадку $A_i \equiv 0$ задача (5.13) переходить в класичну задачу пошуку елемента множини $\bigcap_k F(T_k)$ — спільної нерухомої точки операторів T_k (common fixed point problem), яка має багату алгоритміку [36].

5.6. Задачі

Задача 5.1. Доведіть збіжність наступного методу.

1) Задамо $x_1 \in C$, $(\lambda_n) \in \ell_2 \setminus \ell_1$; покладемо $n := 1$.

2) Для x_n знаходимо елементи:

$$y_{(n,i)} = P_C(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}), \quad u_{(n,i)} \in A_i x_n, \quad i = \overline{1, p}.$$

3) Якщо $y_{(n,i)} = x_n$ для всіх $i = \overline{1, p}$, то **СТОП**. Інакше переходимо на крок 4.

4) Покладаємо

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} y_{n,1} + \frac{1}{p} y_{n,2} + \dots + \frac{1}{p} y_{n,p},$$

$n := n + 1$, переходимо на крок 2.

Розділ 6

Алгоритм з відстанню Брегмана для розв'язання задач рівноважного програмування

У 1980 році Л. Д. Попов [27] запропонував для пошуку сідлових точок опуклих-угнутих функцій, визначених в скінченномірному евклідовому просторі, цікаву модифікацію методу Ерроу¹–Гурвіца². У роботах [28, 49] побудовано кілька модифікацій методу Л. Д. Попова для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними операторами. А в статті [50] запропоновано двоетапний проксимальний алгоритм для розв'язання задач рівноважного програмування. У всіх згаданих методах використовувалися евклідові відстані і проекція. І часто це не дозволяє добре врахувати структуру допустимих множин і ефективно розв'язувати задачі. Можливий вихід із ситуації полягає в більш гнучкому підборі відстані для здійснення проектування на допустиму множину. Однією з перших успішних реалізацій цієї стратегії є відома робота Л. М. Брегмана [51], де запропонований метод типу циклічного проектування для знаходження спільної точки опуклих множин. Ця робота відкрила цілий напрямок у математичному програмуванні та нелінійному аналізі.

У даному розділі ми розглянемо ітераційний метод розв'язання задачі про рівновагу в скінченновимірному просторі. З використанням відстані Брегмана модифіковано двоетапний проксимальний алгоритм з [50]. Аналіз збіжності методу проведено за припущення про існування розв'язку задачі про рівновагу і за умов псевдомонотонності та ліпшицевості біфункції.

¹Кеннет Джозеф Ерроу (Kenneth Joseph Arrow, 23.08.1921, Нью-Йорк — 21.02.2017, Пало-Альто) — видатний американський економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки 1972 року «за новаторський внесок в загальну теорію рівноваги та теорію добробуту». Відомий, як автор теореми Ерроу про неможливість, співавтор моделей Ерроу–Дебре та Ерроу–Ромера. Був прихильником ринкової економіки з помірним державним регулюванням.

²Леонід Соломонович Гурвіч (Leonid Hurwicz, 21.08.1917, Москва — 24.06.2008, Міннеаполіс) — видатний американський економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки 2007 року.

6.1. Постановка задачі

Для непорожньої опуклої замкненої множини $C \subseteq \mathbb{R}^d$ та біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ розглянемо задачу про рівновагу (задачу рівноважного програмування, нерівність Кі Фаня³):

$$\text{знайти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (6.1)$$

де $F(y, y) = 0$ для всіх $y \in C$.

Дослідження задач рівноважного програмування є популярним розділом сучасного прикладного нелінійного аналізу [52]. Формулювання, яке вважають класичним, було наведено ще в роботі Х. Нікайдо⁴ та К. Ісоди 1955 року та пов'язаної з доведенням існування точок рівноваги за Нешем в некооперативних іграх. Як і варіаційна нерівність задача рівноважного програмування це зручна загальна форма запису та метод дослідження різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та оптимізації. Наведемо ряд типових постановок.

- (1) Якщо $F(x, y) = g(y) - g(x)$, де $g : C \rightarrow \mathbb{R}$, то задача (6.1) є задачею умовної мінімізації:

$$g \rightarrow \min_C.$$

- (2) Якщо $F(x, y) = (Ax, y - x)$, де $A : C \rightarrow \mathbb{R}^d$, то задача (6.1) зводиться до класичної варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (6.2)$$

- (3) Нехай C_1, C_2 — опуклі підмножини \mathbb{R}^d , $C = C_1 \times C_2$, $L : C \rightarrow \mathbb{R}$ — опукла-угнута функція. Точка $(x_1, x_2) \in C$ називається сідловою точкою функції L , якщо

$$L(x_1, y_2) \leq L(x_1, x_2) \leq L(y_1, x_2) \quad \forall (y_1, y_2) \in C. \quad (6.3)$$

Покладемо $F(x, y) = L(y_1, x_2) - L(x_1, y_2)$, де $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Тоді задача пошуку сідлової точки (6.3) рівносильна задачі про рівновагу

³Кі Фань (Ku Fan, 19.09.1914, Ханчжоу — 22.03.2010, Санта-Барбара) — видатний американський математик. Докторський ступінь отримав у Парижі. Науковим керівником був Моріс Фреше. Кі Фань зробив фундаментальний внесок в теорію операторів, опуклий аналіз, лінійне та нелінійне програмування, топологію та теорію нерухомих точок. Його роботи, крім впливу на нелінійний функціональний аналіз, знайшли застосування в математичній економіці, теорії ігор та математичній фізиці.

⁴Хукукане Нікайдо (Hukukane Nikaido, 28.06.1923 — 23.08.2001) — японський математик та економіст.

вигляду (6.1):

$$\text{знайти } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{C} : L(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2) - L(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in \mathcal{C}.$$

- (4) Нехай I — скінченна множина індексів. Для кожного $i \in I$ задано множину \mathcal{C}_i та функцію $f_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$, де $\mathcal{C} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Для $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{i \in I} \in \mathcal{C}$ позначимо $\mathbf{x}^i = (\mathbf{x}_j)_{j \in I, j \neq i}$. Точка $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_i)_{i \in I}$ називається рівновагою Неша, якщо для всіх $i \in I$ справедливі нерівності

$$f_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}}^i, \mathbf{y}_i) \quad \forall \mathbf{y}_i \in \mathcal{C}_i.$$

Визначимо функцію $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \in I} (f_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}_i) - f_i(\mathbf{x})).$$

Точка $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}$ є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли $\bar{\mathbf{x}}$ є розв'язком задачі (6.1).

Розглянемо, так звану, дуальну (для задачі (6.1)) задачу про рівновагу [52]:

$$\text{знайти } \mathbf{x} \in \mathcal{C} : F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{C}. \quad (6.4)$$

Множини розв'язків задач (6.1) та (6.4) позначимо \mathcal{S} та \mathcal{S}^* . Теорема про умови, що гарантують непорожність множин \mathcal{S} та \mathcal{S}^* можна знайти в [52]. Множина \mathcal{S}^* опукла та замкнена у випадку, коли функції $F(\mathbf{x}, \cdot)$ опуклі та замкнені (напівнеперервні знизу) на \mathcal{C} , оскільки $\mathcal{S}^* = \bigcap_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} L(\mathbf{y})$, де $L(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C} : F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq 0\}$. Множина \mathcal{S} взагалі може й не бути опуклою. Але, якщо функції $F(\mathbf{x}, \cdot)$ опуклі та замкнені на \mathcal{C} , а функції $F(\cdot, \mathbf{y})$ напівнеперервні зверху на \mathcal{C} , то множина \mathcal{S} опукла та $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$. Крім того, якщо біфункція F псевдомонотонна,⁵ то $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$.

В подальшому будемо припускати, що $\mathcal{S}^* \neq \emptyset$.

6.2. Відстань Брегмана та алгоритм

Нехай $\|\cdot\|$ — деяка норма (не обов'язково евклідова), а (\cdot, \cdot) — стандартний скалярний добуток на \mathbb{R}^d . Нехай $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна

⁵Біфункцію F називають псевдомонотонною якщо для всіх $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ з нерівності $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ випливає $F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq 0$.

та сильно опукла (з параметром $\sigma > 0$ відносно норми $\|\cdot\|$ ⁶) на опуклій множині $O \supseteq C$ функція. Відстань Брегмана (породжена функцією g) [53] на множині O задається формулою

$$D(a, b) = g(a) - g(b) - (\nabla g(b), a - b) \quad \forall a, b \in O.$$

При $g(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$, де $\|\cdot\|_2$ — евклідова норма, маємо

$$D(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2.$$

Для стандартного симплекса

$$\Delta_d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1 \right\}$$

та від'ємної ентропії Больцмана⁷–Шеннона⁸

$$g(x) = \sum_i x_i \ln x_i$$

(вона сильно опукла відносно ℓ_1 -норми на Δ_d [53]) одержимо відстань Кульбака⁹–Лейблера¹⁰ на Δ_d :

$$D(x, y) = \sum_i x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i} \right) \quad \forall x, y \in \Delta_d.$$

Має місце корисна тотожність.

⁶Для функції g має місце нерівність

$$g(a) - g(b) \geq (\nabla g(b), a - b) + \frac{\sigma}{2}\|a - b\|^2 \quad \forall a, b \in O.$$

⁷Людвіг Больцман (Ludwig Eduard Boltzmann, 20.02.1844, Відень — 5.09.1906, Дуїно) — австрійський фізик-теоретик, засновник статистичної механіки та молекулярно-кінетичної теорії.

⁸Клод Елвуд Шеннон (Claude Elwood Shannon, 30.04.1916 — 24.02.2001) — видатний американський математик. Вважається, що саме з його робіт «A Mathematical Theory of Communication» (1948) та «Communication Theory of Secrecy Systems» (1949) починається теорія інформації.

⁹Соломон Кульбак (Solomon Kullback, 3.04.1907, Бруклін — 5.08.1994, Бойнтон Бич) — американський математик та криптоаналітик. В 1930-ті приймав участь у розшифровці кодів таємної японської дипломатичної переписки. Ідея дивергенції Кульбака–Лейблера була вперше докладно викладена у книзі Kullback S. Information Theory and Statistics, John Wiley and Sons, 1959. Після звільнення з АНБ у 1962 році працював в Університеті Джорджа Вашингтона.

¹⁰Річард Лейблер (Richard A. Leibler, 18.03.1914, Чикаго — 25.10.2003, Рестон) — американський математик та криптоаналітик. Працюючи в АНБ, запропонував сумісно з С. Кульбаком міру подібності між розподілами ймовірностей (дивергенцію Кульбака–Лейблера), яка знайшла важливе застосування в теорії інформації. Приймав участь в проєкті «Venona».

Лема 6.1 (3-точкова тотожність). Для довільних \mathbf{a} , \mathbf{b} та \mathbf{c} виконується тотожність

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + D(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\nabla g(\mathbf{b}) - \nabla g(\mathbf{c}), \mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

З сильної опуклості g випливає оцінка

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2. \quad (6.5)$$

З цього моменту будемо розглядати тільки біфункції F , що задовольняють умові:

для всіх $\mathbf{x} \in C$ функція $F(\mathbf{x}, \cdot)$ опукла та замкнена на множині C .

В даному випадку задачі

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\lambda} D(\mathbf{y}, \mathbf{b}) \rightarrow \min_{\mathbf{y} \in C} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C, \lambda > 0)$$

завжди мають єдиний розв'язок. Припустимо можливість їх ефективного розв'язання. Наприклад, це можливо у випадку симплекса Δ_d , лінійності F за другим аргументом та відстані Кульбака–Лейблера. Дійсно, розв'язок задачі

$$\sum_{i=1}^d a_i x_i + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^d x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i} \right) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \Delta_d} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{y} \in \Delta_d, \lambda > 0)$$

має вигляд

$$z_i = \frac{y_i e^{-\lambda a_i}}{\sum_{j=1}^d y_j e^{-\lambda a_j}}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Для наближеного розв'язання задачі про рівновагу (6.1) пропонуємо наступний ітераційний

Алгоритм 6.1. Для $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in C} \left\{ F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{\lambda} D(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right\}, \\ \mathbf{y}_{n+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in C} \left\{ F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{\lambda} D(\mathbf{y}, \mathbf{x}_{n+1}) \right\}, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$.

На кожному кроці алгоритму 6.1 слід розв'язати дві опуклі задачі з сильно опуклими функціями. Правило вибору параметра λ вкажемо нижче.

Зауваження 6.1. Якщо $g(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 6.1 приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_n, \\ y_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_{n+1}, \end{cases}$$

де prox_g — проксимальний оператор [36], що відповідає власній опуклій замкненій функції g :

$$H \ni x \mapsto \text{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} g} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 \right) \in \operatorname{dom} g.$$

Даний, так званий, двоетапний проксимальний метод запропоновано в [50]. У випадку варіаційної нерівності, тобто при $F(x, y) = (Ax, y - x)$, він приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_1 \in C, y_1 \in C, \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n), \end{cases}$$

де P_C — оператор метричного проектування на множину C .

Зауваження 6.2. Для варіаційних нерівностей алгоритм 6.1 можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 \in C, y_1 \in C, \\ x_{n+1} = P_C \left((\nabla g)^{-1}(\nabla g(x_n) - \lambda A y_n) \right), \\ y_{n+1} = P_C \left((\nabla g)^{-1}(\nabla g(x_{n+1}) - \lambda A y_n) \right), \end{cases}$$

де P_C — оператор проектування Брегмана на множину C [51], що задається правилом

$$P_C x = \operatorname{argmin}_{y \in C} D(y, x).$$

Даний метод розроблено в дисертації Ю. В. Маліцького [54].

Перейдемо до вивчення алгоритму 6.1. Перш за все помітимо, що при виконанні для деякого номера $n \in \mathbb{N}$ рівностей

$$x_{n+1} = x_n = y_n \tag{6.6}$$

має місце включення $y_n \in S$ та умова стаціонарності: $y_k = x_k = y_n$ для всіх $k \geq n$. Дійсно, рівність

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_n) \right\}$$

означає

$$F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + \frac{(\nabla g(\mathbf{x}_{n+1}) - \nabla g(\mathbf{x}_n), \mathbf{y} - \mathbf{x}_{n+1})}{\lambda} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{C}.$$

З (6.6) випливає

$$F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{C},$$

тобто $\mathbf{y}_n \in \mathcal{S}$.

Враховуючи це міркування, практичному варіанту алгоритму 6.1 можна надати наступний вигляд.

Алгоритм 6.2. *Задаємо $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{C}$, $\lambda > 0$ та $\varepsilon > 0$.*

Крок 1. *Для \mathbf{x}_n та \mathbf{y}_n обчислюємо*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} \left\{ F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{\lambda} D(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right\}.$$

Крок 2. *Якщо $\max\{\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|, \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n\|\} \leq \varepsilon$, то **СТОП**,¹¹ інакше обчислюємо*

$$\mathbf{y}_{n+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}} \left\{ F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{\lambda} D(\mathbf{y}, \mathbf{x}_{n+1}) \right\}.$$

Крок 3. *Покладаємо $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$ та переходимо на Крок 1.*

Далі будемо припускати, що для всіх номерів $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ умова (6.6) не виконується й перейдемо до обґрунтування збіжності алгоритму 6.1.

6.3. Аналіз збіжності

Для доведення збіжності алгоритму нам буде потрібний такий факт.

Лема 6.2. *Елемент $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ є розв'язком задачі про рівновагу (6.1) тоді й тільки тоді, коли*

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^{-1} D(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \quad (6.7)$$

де $\lambda > 0$.

Доведення. Елемент $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ задовольняє (6.7) тоді й тільки тоді, коли є розв'язком опуклої задачі

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^{-1} D(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}},$$

¹¹Звичайно можна використати також умову $\max\{D(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n), D(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n)\} \leq \varepsilon$.

тобто задовольняє нерівності

$$F(x, y) - F(x, x) + \lambda^{-1} (\nabla g(x) - \nabla g(x), y - x) = F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Таким чином, $x \in S$. □

Аналіз збіжності алгоритму почнемо з доведення важливої нерівності для послідовностей (x_n) та (y_n) , породжених алгоритмом 6.1.

Припустимо, що біфункція F , задовольняє умові: для всіх $x, y, z \in C$ має місце

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a \|x - z\|^2 + b \|z - y\|^2,$$

де a, b — додатні константи (ліпшицевість).

Зауваження 6.3. Умова типу ліпшицевості введена G. Mastroeni [55].

Має місце

Лема 6.3. Для породжених алгоритмом 6.1 послідовностей (x_n) , (y_n) та елемента $z \in S^*$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} D(z, x_{n+1}) \leq D(z, x_n) - \left(1 - \frac{2\lambda b}{\sigma}\right) D(x_{n+1}, y_n) - \\ - \left(1 - \frac{4\lambda a}{\sigma}\right) D(y_n, x_n) + \frac{4\lambda a}{\sigma} D(x_n, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Доведення. Маємо (двічі використали лему 6.1)

$$\begin{aligned} D(z, x_{n+1}) &= D(z, x_n) - D(x_{n+1}, x_n) + (\nabla g(x_{n+1}) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - z) = \\ &= D(z, x_n) - D(x_{n+1}, y_n) - D(y_n, x_n) - \\ &- (\nabla g(y_n) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - y_n) + (\nabla g(x_{n+1}) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (6.9)$$

З визначення точок x_{n+1} та y_n випливає

$$\lambda F(y_n, z) - \lambda F(y_n, x_{n+1}) \geq (\nabla g(x_{n+1}) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - z), \quad (6.10)$$

$$\lambda F(y_{n-1}, x_{n+1}) - \lambda F(y_{n-1}, y_n) \geq -(\nabla g(x_n) - \nabla g(y_n), y_n - x_{n+1}). \quad (6.11)$$

Застосувавши нерівності (6.10), (6.11) для оцінки скалярних добутків в (6.9), отримуємо

$$\begin{aligned} D(z, x_{n+1}) \leq D(z, x_n) - D(x_{n+1}, y_n) - D(y_n, x_n) + \\ + \lambda \{F(y_n, z) - F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n)\}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

З включення $z \in S^*$ випливає $F(\mathbf{y}_n, z) \leq 0$, а ліпшицевість F гарантує виконання нерівності

$$\begin{aligned} -F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) &\leq \\ &\leq \mathbf{a} \|\mathbf{y}_{n-1} - \mathbf{y}_n\|^2 + \mathbf{b} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Використавши вищенаведені оцінки в (6.12), отримуємо

$$\begin{aligned} D(z, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq D(z, \mathbf{x}_n) - D(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) - D(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) + \\ &\quad + \lambda \mathbf{a} \|\mathbf{y}_{n-1} - \mathbf{y}_n\|^2 + \lambda \mathbf{b} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Член $\|\mathbf{y}_{n-1} - \mathbf{y}_n\|^2$ оцінимо наступним чином

$$\|\mathbf{y}_{n-1} - \mathbf{y}_n\|^2 \leq 2 \|\mathbf{y}_{n-1} - \mathbf{x}_n\|^2 + 2 \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n\|^2.$$

Урахувавши цю оцінку в (6.13), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} D(z, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq D(z, \mathbf{x}_n) - D(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) - D(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) + \\ &\quad + 2\lambda \mathbf{a} \|\mathbf{y}_{n-1} - \mathbf{x}_n\|^2 + 2\lambda \mathbf{a} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n\|^2 + \lambda \mathbf{b} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Оцінивши в (6.14) норми за допомогою нерівності (6.5), одержимо

$$\begin{aligned} D(z, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq D(z, \mathbf{x}_n) - D(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) - D(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) + \\ &\quad + \frac{4\lambda \mathbf{a}}{\sigma} D(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n-1}) + \frac{4\lambda \mathbf{a}}{\sigma} D(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) + \frac{2\lambda \mathbf{b}}{\sigma} D(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n), \end{aligned}$$

а саме, нерівність (6.8). □

Перейдемо безпосередньо до доведення збіжності алгоритму. Додатково припустимо, що біфункція $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ напівнеперервна знизу на $C \times C$ та для всіх $\mathbf{y} \in C$ функція $F(\cdot, \mathbf{y})$ напівнеперервна зверху на C . Зауважимо, що за цих умов $S^* \subseteq S$.

Має місце

Лема 6.4. *Нехай*

$$\lambda \in \left(0, \frac{\sigma}{2(2\mathbf{a}+\mathbf{b})}\right).$$

Тоді всі часткові границі послідовності (\mathbf{x}_n) належать множині S .

Доведення. Нехай $z \in S^*$. Покладемо

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= D(z, \mathbf{x}_n) + \frac{4\lambda \mathbf{a}}{\sigma} D(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n-1}), \\ \mathbf{b}_n &= \left(1 - \frac{4\lambda \mathbf{a}}{\sigma}\right) D(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) + \left(1 - \frac{4\lambda \mathbf{a}}{\sigma} - \frac{2\lambda \mathbf{b}}{\sigma}\right) D(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n). \end{aligned}$$

Нерівність леми 6.3 приймає вигляд

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Тоді з леми 1.9 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D(z, x_n) + \frac{4\lambda a}{\sigma} D(x_n, y_{n-1}))$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{4\lambda a}{\sigma}\right) D(y_n, x_n) + \left(1 - \frac{4\lambda a}{\sigma} - \frac{2\lambda b}{\sigma}\right) D(x_{n+1}, y_n) \right) = 0.$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_{n+1}, y_n) = 0 \quad (6.15)$$

та збіжність числової послідовності $(D(z, x_n))$ для всіх $z \in S^*$. З (6.15) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0 \quad (6.16)$$

та звичайно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0.$$

З нерівності

$$D(z, x_n) \geq \frac{\sigma}{2} \|z - x_n\|^2$$

та (6.16) випливає обмеженість послідовностей (x_n) , (y_n) .

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}) , що збігається до деякої точки $\bar{z} \in C$. Тоді з (6.16) випливає, що $y_{n_k} \rightarrow \bar{z}$ і $x_{n_k+1} \rightarrow \bar{z}$. Покажемо, що $\bar{z} \in S$. Маємо

$$F(y_{n_k}, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_{n_k}) \geq F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{1}{\lambda} D(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \quad \forall y \in C. \quad (6.17)$$

Здійснивши граничний перехід в (6.17), отримаємо

$$\begin{aligned} F(\bar{z}, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, \bar{z}) &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ F(y_{n_k}, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_{n_k}) \right\} \geq \\ &\geq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{1}{\lambda} D(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \right\} = F(\bar{z}, \bar{z}) = 0 \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

Звідки, згідно з лемою 6.2, випливає включення $\bar{z} \in S$. □

Зауваження 6.4. Мають місце асимптотики:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \cdot D(y_n, x_n) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \cdot D(x_{n+1}, y_n) = 0$$

та

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \|y_n - x_n\| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \|x_{n+1} - y_n\| = 0.$$

Уточнимо результат леми 6.4.

Лема 6.5. *Нехай, додатково, $S = S^*$ (наприклад, якщо біфункція F псевдомонотонна на C). Тоді породжені алгоритмом 6.1 послідовності (x_n) , (y_n) збігаються до розв'язку $\bar{z} \in S$ задачі (6.1).*

Доведення. Нехай $\bar{z} \in S = S^*$ та $x_{n_k} \rightarrow \bar{z}$, $y_{n_k} \rightarrow \bar{z}$. Існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{z}, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{g(\bar{z}) - g(x_n) - (\nabla g(x_n), \bar{z} - x_n)\}$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{g(y_n) - g(x_n) - (\nabla g(x_n), y_n - x_n)\} = 0.$$

Оскільки $D(\bar{z}, x_{n_k}) \rightarrow 0$, то $D(\bar{z}, x_n) \rightarrow 0$. Звідки $x_n \rightarrow \bar{z}$ та $y_n \rightarrow \bar{z}$. \square

Сумуючи викладене сформулюємо основний результат.

Теорема 6.1. *Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^d$ — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ виконані умови:*

- 1) $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;
- 2) для всіх $x, y \in C$ з $F(x, y) \geq 0$ випливає $F(y, x) \leq 0$ (псевдомонотонність);
- 3) $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ напівнеперервна знизу на $C \times C$;
- 4) для всіх $x \in C$ функція $F(x, \cdot)$ опукла на C ;
- 5) для всіх $y \in C$ функція $F(\cdot, y)$ напівнеперервна зверху на C ;
- 6) для всіх $x, y, z \in C$ має місце

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a \|x - z\|^2 + b \|z - y\|^2,$$

де a, b — додатні константи (ліпшицевість).

Припустимо, що $S \neq \emptyset$ та $\lambda \in \left(0, \frac{\sigma}{2(2a+b)}\right)$. Тоді породжені алгоритмом 6.1 послідовності (x_n) , (y_n) збігаються до розв'язку $\bar{z} \in S$ задачі (6.1).

Наведемо наприкінці кілька конкретних версій алгоритму 6.1.

Розглянемо варіаційну нерівність на стандартному симплексі:

$$\text{знайти } x \in \Delta_d : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \Delta_d.$$

Обираючи відстань Кульбака–Лейблера, одержуємо таку версію алгоритму:

$$x_i^{n+1} = \frac{x_i^n e^{-\lambda(Ay_n)_i}}{\sum_{j=1}^d x_j^n e^{-\lambda(Ay_n)_j}}, \quad i = 1, \dots, d,$$

$$y_i^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} e^{-\lambda(Ay_n)_i}}{\sum_{j=1}^d x_j^{n+1} e^{-\lambda(Ay_n)_j}}, \quad i = 1, \dots, d,$$

де $(Ay_n)_i \in \mathbb{R}$ — i -та координата вектора $Ay_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$.

У транспортних застосуваннях, машинному навчанні та теорії ігор доводиться працювати з варіаційними нерівностями на прямих добутках масштабованих симплексів:

$$C = \prod_{k=1}^p r_k \Delta_{m_k} \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k},$$

де

$$r_k \Delta_{m_k} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m_k} : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m_k} x_i = r_k \right\}, \quad r_k > 0,$$

тобто із задачами:

$$\text{знайти } x \in \prod_{k=1}^p r_k \Delta_{m_k} : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \prod_{k=1}^p r_k \Delta_{m_k}. \quad (6.18)$$

За сепарабельною функцією

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{m_k} \frac{x_{k,i}}{r_k} \ln \frac{x_{k,i}}{r_k},$$

де

$$x = (x_1, \dots, x_p) = \left(\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,m_1}}_{x_1}, \dots, \underbrace{x_{p,1}, x_{p,2}, \dots, x_{p,m_p}}_{x_p} \right) \in \mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k},$$

побудуємо відстань Брегмана на $C = \prod_{k=1}^p r_k \Delta_{m_k}$:

$$D(x, y) = \sum_{k=1}^p D_k(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{m_k} \frac{x_{k,i}}{r_k} \ln \frac{x_{k,i}}{y_{k,i}}.$$

Алгоритм 6.1 для нерівності (6.18) з таким вибором відстані приймає вигляд:

$$x_{k,i}^{n+1} = r_k \frac{x_{k,i}^n \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,i})}{\sum_{j=1}^{m_k} x_{k,j}^n \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,j})}, \quad k = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, m_k,$$

$$y_{k,i}^{n+1} = r_k \frac{x_{k,i}^{n+1} \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,i})}{\sum_{j=1}^{m_k} x_{k,j}^{n+1} \exp(-\lambda r_k (Ay_n)_{k,j})}, \quad k = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, m_k,$$

де $(Ay_n)_{k,i} = \left(\sum_{t=1}^{k-1} m_t + i\right)$ -та координата вектора $Ay_n \in \mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k}$, $\lambda > 0$.

6.4. Задачі

Задача 6.1. Доведіть 3-точкову тотожність

$$D(a, c) = D(a, b) + D(b, c) + (\nabla g(b) - \nabla g(c), a - b).$$

Задача 6.2. Знайдіть розв'язок екстемальної задачі

$$\sum_{i=1}^d a_i x_i + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^d x_i \ln \left(\frac{x_i}{y_i} \right) \rightarrow \min_{x \in \Delta_d} \quad (a \in \mathbb{R}^d, y \in \Delta_d, \lambda > 0),$$

де $\Delta_d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1\}$.

Розділ 7

Апроксимація нерухомих точок нерозтягуючих операторів

Теорія нерухомих точок є потужним засобом для дослідження нелінійних явищ. Класичні топологічні теореми Брауера, Шаудера та Какутані про існування нерухомих точок мають неконструктивний характер. Природно виділити класи операторів, для яких можна конструктивно знаходити нерухомі точки. Найвідомішим прикладом такого класу є стискаючі відображення. Дійсно, в класичному доведенні теореми Банаха–Пікара–Качіополлі явно конструюється послідовність, що збігається до нерухокої точки. Більш широким є клас нерозтягуючих операторів, теорія яких плідно розвивається з 1965 р.

Гарний вступ до теорії нерозтягуючих операторів з описом основних алгоритмів апроксимації нерухомих точок є в книзі Bauschke та Combettes [36].

У роботі [56] Ф. Браудер доводить теорему про існування нерухокої точки нерозтягуючого оператора, що діє в опуклій замкненій та обмеженій підмножині гільбертового простору, а в [57] він доводить аналогічну теорему для рівномірно опуклих банахових просторів. Ці результати, причому в той самий час, були одержані в роботах Кірка¹ [58] та Гьоде [59].

Основними схемами, що забезпечують апроксимацію нерухомих точок нерозтягуючих операторів (в припущенні їх існування) є алгоритми Красносельського–Манна [61], Гальперна [39, 65–67], гібридний алгоритм Nakajo–Takahashi [40] та алгоритм стягнення (shrinking algorithm) Takahashi–Takeuchi–Kubota [41].

У даному розділі ми розглянемо питання існування нерухомих точок нерозтягуючих операторів, що діють в гільбертових просторах, та основні методи

¹Вільям Артур Кірк (William Arthur Kirk) — американський математик. Займається нелінійним функціональним аналізом, геометрією банахових та метричних просторів. Зробив значний внесок в метричну теорію нерухомих точок.

апроксимації нерухомих точок. Ці методи слід трактувати як шаблони для більш спеціалізованих алгоритмів.

7.1. Теорема Браудера

Нехай E — лінійний нормований простір із нормою $\|\cdot\|$, $C \subseteq E$.

Означення 7.1. Оператор $T : C \rightarrow E$ називатимемо нерозтягуючим, якщо

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

Позначимо через $F(T)$ множину нерухомих точок оператора T , тобто

$$F(T) = \{x \in C : Tx = x\}.$$

Зауваження 7.1. Множина нерухомих точок $F(T)$ нерозтягуючого оператора T , що діє в просторі E , може бути порожньою. Дійсно, якщо $Tx = x + y$ ($y \in E \setminus \{0\}$), то $F(T) = \emptyset$.

Для нерозтягуючих операторів, що діють у гільбертових просторах, множина $F(T)$ має відносно просту будову.

Лема 7.1. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Тоді множина $F(T)$ опукла та замкнена.*

Доведення. З неперервності T випливає замкненість $F(T)$. Покажемо опуклість множини $F(T)$. Нехай $x, y \in F(T)$, $\alpha \in [0, 1]$. Тоді для $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ маємо

$$\begin{aligned} \|z - Tz\|^2 &= \|z\|^2 - 2\alpha(x, Tz) - 2(1 - \alpha)(y, Tz) + \|Tz\|^2 = \\ &= \|z\|^2 + \alpha \|x - Tz\|^2 - \alpha \|x\|^2 - \alpha \|Tz\|^2 + \\ &+ (1 - \alpha) \|y - Tz\|^2 - (1 - \alpha) \|y\|^2 - (1 - \alpha) \|Tz\|^2 + \|Tz\|^2 \leq \\ &\leq \|z\|^2 + \alpha \|x - z\|^2 - \alpha \|x\|^2 + (1 - \alpha) \|y - z\|^2 - (1 - \alpha) \|y\|^2 = \\ &= \|z\|^2 - 2\alpha(x, z) - 2(1 - \alpha)(y, z) + \|z\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Отже, $z = Tz$. □

У випадку довільного банахового простору множина нерухомих точок нерозтягуючого оператора може бути неопуклою. Розглянемо простір \mathbb{R}^2 з нор-

мою $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ та оператор $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданий формулою

$$Tx = (|x_2|, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ясно, що оператор T нерозтягуючий, $(1, 1)$, $(1, -1)$ — нерухомі точки оператора T . Однак відрізок, що з'єднує $(1, 1)$ та $(1, -1)$, не містить інших нерухомих точок оператора T ($F(T) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = |x_2|\}$).

Зауваження 7.2. Лема 7.1 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів.

Означення 7.2. Нехай C — непорожня підмножина банахового простору E , $F : C \rightarrow E$. Оператор F називатимемо демізамкненим, якщо для довільної послідовності точок $x_n \in C$ із $x_n \rightarrow x \in C$ та $Fx_n \rightarrow y$ випливає, що $Fx = y$.

Лема 7.2. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Тоді оператор $I - T$ є демізамкненим.

Доведення. Нехай (x_n) — така послідовність точок із C , що $x_n \rightarrow x \in C$ та $x_n - Tx_n \rightarrow y \in H$. Покажемо, що $(I - T)x = y$.

Має місце нерівність

$$\|x_n - Tx - y\| \leq \|x_n - Tx_n - y\| + \|Tx_n - Tx\| \leq \|x_n - Tx_n - y\| + \|x_n - x\|.$$

Звідси випливає

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|.$$

Припустимо, що $x \neq Tx + y$. Тоді з леми Опяла випливає, що

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\|.$$

Отримали абсурдну нерівність

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\|.$$

Отже, $x - Tx = y$. □

Зауваження 7.3. Цей результат, відомий під назвою *принцип демізамкненості Браудера*, є одним з фундаментальних результатів теорії нерозтягуючих операторів.

Теорема 7.1 (F. Browder, [56]). Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена обмежена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Тоді

$$F(T) \neq \emptyset.$$

Доведення. Можемо вважати, що $0 \in C$. Розглянемо оператор $\lambda T : C \rightarrow C$, де $\lambda \in (0, 1)$. За теоремою Банаха рівняння

$$x = \lambda T x$$

має єдиний розв'язок $x_\lambda \in C$.

З обмеженості множини C випливає, що

$$\|x_\lambda - T x_\lambda\| = (1 - \lambda) \|T x_\lambda\| \leq (1 - \lambda) \text{diam}(C) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 1.$$

Оберемо збіжну до 1 послідовність $\lambda_n \in (0, 1)$ таку, що

$$x_{\lambda_n} \rightarrow \bar{x} \in C.$$

З леми 7.2 випливає, що $\bar{x} \in F(T)$. □

Зауваження 7.4. Доведена теорема не випливає з відомої теореми Шаудера–Тихонова,² оскільки нерозтягуючий оператор може не бути неперервним у слабкій топології.

Зазначимо, що теорема 7.1 не правильна для випадку довільного банахового простору. Дійсно, розглянемо в просторі c_0 нескінченно малих послідовностей з нормою $\|x\| = \max_n |x_n|$ оператор

$$Tx = (1, x_1, x_2, \dots),$$

де $x = (x_1, x_2, \dots)$. Оператор T нерозтягуючий та відображає одиничну замкнену кулю $B \subseteq c_0$ у себе. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots)$ — нерухома точка T у B . Тоді $(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots)$. Звідси випливає, що $x = (1, 1, \dots) \notin c_0$.

Зауваження 7.5. Теорема 7.1 справедлива для рівномірно опуклого банахового простору. Питання про її справедливість для довільного рефлексивного простору досі відкрите.

Має місце цікавий результат.

²Нехай C — непорожня компактна опукла підмножина локально опуклого простору E , $T : C \rightarrow C$ — неперервний оператор. Тоді $F(T) \neq \emptyset$.

Теорема 7.2 (W. O. Ray, [60]). *Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла необмежена підмножина гільбертового простору H . Тоді існує нерозтягуючий оператор $T : C \rightarrow C$ такий, що $F(T) = \emptyset$.*

Доведення. Оскільки множина C необмежена, то існує елемент $y \in H$ такий, що

$$C_n = \{x \in C : (x, y) \geq n\} \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що множини C_n опуклі та замкнені.

Нехай P_{C_n} — оператор метричного проектування простору H на множину C_n . Оператор P_{C_n} нерозтягуючий. Зафіксуємо елемент $x \in C$. Побудуємо послідовність (λ_n) додатних чисел таку, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|P_{C_n} x\| < +\infty$. Тоді ряд $\sum \lambda_n P_{C_n} z$ абсолютно збіжний при кожному $z \in C$. Отже, оператор $T : C \rightarrow C$, заданий формулою

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{C_n},$$

коректно визначений та нерозтягуючий.

Покажемо, що $F(T) = \emptyset$, від супротивного. Нехай $z \in C$ — нерухома точка оператора T :

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{C_n} z.$$

Якщо $z \in C_n \setminus C_{n+1}$, то $P_{C_k} z = z$ для $k \leq n$ і $(P_{C_k} z, y) > (z, y)$ для $k > n$. Тоді

$$\begin{aligned} (z, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (P_{C_k} z, y) = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (z, y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (P_{C_k} z, y) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (z, y) = (z, y). \end{aligned}$$

Звідси очевидно, що T не має нерухомих точок в C . □

Нехай $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор, що діє в гільбертовому просторі H . Почнемо розбирати питання апроксимації нерухомих точок оператора T .

Якщо оператор $T : H \rightarrow H$ стискаючий, то його єдину нерухома точку можна знайти за допомогою методу послідовних наближень (простої ітерації)

$$x_{n+1} = Tx_n. \tag{7.1}$$

У випадку нерозтягуючого оператора T (навіть з єдиною нерухомою точкою) процес (7.1) може виявитись розбіжним для всіх початкових наближень, відрізнених від $x_0 \in F(T)$. Приклад:

обертання круга $B = \{x : \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ навколо нуля на кут $\pi/2$ радіан.

Однак, розглядаючи замість (7.1) процеси вигляду

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{Tx_0 + Tx_1 + \dots + Tx_n}{n+1},$$

можна побудувати збіжні алгоритми обчислення нерухомих точок.

Але спочатку отримаємо пов'язаний з методом (7.1) критерій існування нерухомої точки нерозтягуючого оператора T .

Теорема 7.3. *Нехай H — гільбертовий простір, $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Операторне рівняння*

$$x - Tx = 0 \tag{7.2}$$

має розв'язок тоді й тільки тоді, коли для деякого $x_0 \in H$ послідовність (x_n) , що визначена формулою $x_{n+1} = Tx_n$, $n \geq 0$, обмежена.

Доведення. Нехай $x \in H$ — розв'язок рівняння (7.2). Тоді

$$\|x_{n+1} - x\| = \|Tx_n - Tx\| \leq \|x_n - x\|.$$

Звідси випливає обмеженість (x_n) .

Навпаки, нехай послідовність (x_n) обмежена. Побудуємо множини

$$C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B(x_k, d),$$

де $d = \text{diam}\{x_n\}$. Множини C_n непорожні, опуклі та мають властивість

$$T(C_n) \subseteq C_{n+1}.$$

Нехай

$$C = \text{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Множина C є замкненою, опуклою та обмеженою. Оскільки $T(C) \subseteq C$, то за теоремою 7.1 оператор T має нерухому точку в C . \square

7.2. Ергодична теорема Байона

Твердження про граничну поведінку послідовності середніх вигляду

$$\frac{x + Tx + T^2x + \dots + T^{n-1}x}{n}$$

називають операторними ергодичними теоремами. Розглядають також інші процедури усереднення. Перша операторна ергодична теорема (для лінійних ізометричних операторів гільбертового простору) була сформульована та доведена Дж. фон Нейманом³.

Ергодичні теореми для нелінійних відображень — багата на глибокі результати та цікаві проблеми галузь функціонального аналізу, що активно розвивається більше 40 років.

Ми доведемо лише класичну ергодичну теорему Байона для нелінійних нерозтягуючих операторів, що діють у гільбертовому просторі. Ця теорема стала джерелом численних узагальнень і уточнень.

Теорема 7.4 (J. V. Baillon). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Якщо $F(T) \neq \emptyset$, то для довільного $x \in C$ послідовність середніх за Чезаро*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

слабко збігається до деякого елемента $y \in F(T)$.

Доведення. Нехай $F(T) \neq \emptyset$. Позначимо

$$x_k = T^k x \quad (x_0 = x), \quad y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Для довільного $p \in F(T)$ маємо

$$\|x_n - p\| = \|Tx_{n-1} - Tp\| \leq \|x_{n-1} - p\|.$$

³Джон фон Нейман (англ. John von Neumann, угор. Neumann Janos Lajos, нім. Johann von Neumann, 28.12.1903, Будапешт — 8.02.1957, Вашингтон) — видатний американський математик угорського походження. З 1930 року працював у США. Зробив значний внесок у квантову фізику, функціональний аналіз, теорію множин, інформатику та математичну економіку. Приймав участь в Манхеттенському проєкті. Відомий як засновником теорії ігор разом із Оскаром Моргенштерном. Автор «архітектури фон Неймана», яка використовується в сучасних комп'ютерах.

Таким чином, існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R},$$

а послідовності (x_n) , (y_n) і (Ty_n) обмежені.

Покажемо, що всі часткові слабкі границі (які існують) послідовності (y_n) є нерухомими точками оператора T . Для цього, беручи до уваги демізамкненість оператора $I - T$ (лема 7.2), достатньо довести, що

$$\|y_n - Ty_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (7.3)$$

Для $u \in H$ маємо

$$\|y_n - u\|^2 = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x_k - u) \right\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_k - u, x_i - u).$$

Оскільки

$$2(x_k - u, x_i - u) = \|x_k - u\|^2 + \|x_i - u\|^2 - \|x_k - x_i\|^2,$$

то

$$2\|y_n - u\|^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - u\|^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|x_k - x_i\|^2. \quad (7.4)$$

Обравши у (7.4) $u = y_n$, отримаємо

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|x_k - x_i\|^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2.$$

Поклавши у (7.4) $u = Ty_n$, дістанемо

$$\begin{aligned} \|y_n - Ty_n\|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - Ty_n\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2 = \\ &= \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \|Tx_{k-1} - Ty_n\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \|x_{k-1} - y_n\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2 = \\ &= \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2 - \frac{1}{n} \|x_{n-1} - y_n\|^2 \leq \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2. \end{aligned}$$

Остаточно маємо оцінку

$$\|y_n - Ty_n\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Ми довели, що для довільного $p \in F(T)$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$ та всі часткові слабкі границі послідовності (y_n) належать множині $F(T)$. Покажемо, що звідси випливає слабка збіжність послідовності (y_n) до деякого елемента $y \in F(T)$. Для цього спочатку розглянемо дві точки $p_1, p_2 \in F(T)$. Маємо $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \in F(T)$ та

$$\left\| \frac{p_1 + p_2}{2} - x_n \right\|^2 = \|x_n - p_1\|^2 + \left\| \frac{p_1 - p_2}{2} \right\|^2 + (x_n - p_1, p_1 - p_2).$$

Отже, існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - p_1, p_1 - p_2) = l \in \mathbb{R}$. За теоремою Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - p_1, p_1 - p_2) = l.$$

Нехай $a \in F(T)$, $b \in F(T)$ – дві слабкі часткові границі послідовності (y_n) . Тоді

$$(a - b, p_2 - p_1) = 0, \quad \forall p_1, p_2 \in F(T). \quad (7.5)$$

Поклавши у (7.5) $p_2 = a$, $p_1 = b$, отримаємо $\|a - b\|^2 = 0$. Отже, послідовність (y_n) слабо збігається до деякого елемента множини $F(T)$. \square

Зауваження 7.6. Якщо $F(T) = \emptyset$, то для довільного $x \in C$ маємо

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x \right\| \rightarrow +\infty.$$

Дійсно, інакше послідовність середніх $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ має слабо збіжні підпослідовності, які внаслідок демізамкненості оператора $I - T$ та (7.3) є нерухомими точками оператора T .

Також Байон одержав уточнення теореми 7.4.

Теорема 7.5. *Нехай виконано умови теореми 7.4. Припустимо, що*

$$C = -C \text{ та } T(-x) = -Tx \quad \forall x \in C.$$

Тоді для довільного $x \in C$ послідовність середніх за Чезаро $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ сильно збігається до деякого елемента $y \in F(T)$.

7.3. Метод Красносельського–Манна

Розглянемо один з найпопулярніших ітераційних методів пошуку нерухомих точок — метод Красносельського–Манна. Він є джерелом багатьох ефективних алгоритмів оптимізації.

Перші варіанти методу розглядались ще в середині ХХ ст. У 1953 р. для задачі пошуку нерухомої точки неперервної функції $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Манн запропонував ітераційний процес (mean value method): $x_0 \in [0, 1]$,

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1}x_n + \frac{1}{n+1}f(x_n). \quad (7.6)$$

Ці ітерації можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n+1}.$$

Через два роки М. А. Красносельський⁴ [61] запропонував для пошуку нерухомих точок нерозтягуючого оператора $T : C \rightarrow C$ (C — опукла замкнена обмежена підмножина банахова простору E) процес: $x_0 \in C$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}.$$

Він довів його сильну збіжність для компактних нерозтягуючих операторів T , що діють у рівномірно опуклих банахових просторах.

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що

$$F(T) \neq \emptyset.$$

Ітераційний метод Красносельського – Манна має такий вигляд.

⁴Марк Олександрович Красносельський (27.04.1920, Старокостянтинів — 13.02.1997, Москва) — радянський і російський математик, один з творців сучасного нелінійного функціонального аналізу. Народився в Старокостянтиніві (Україна). Закінчив фізико-математичний факультет Київського університету в 1942 році в евакуації (в Казахстані). У 1946 році переїхав до Києва, де працював в Інституті математики Академії наук Української РСР (до 1952 року). М.А. Красносельський був учнем видатного математика М.Г. Крейна. У 1948 році захистив кандидатську дисертацію, а в 1950 р. — докторську дисертацію по топологічним методам нелінійного аналізу. У 1953 році М.А. Красносельський переїхав до Воронежа, де протягом наступних 15 років очолював кафедру функціонального аналізу Воронежського університету. У 1968 році переїхав з Воронежа до Москви та вступив на роботу в Інститут автоматики і телемеханіки (з 1969 року — Інститут проблем управління, ПУ) АН СРСР. В інституті організував лабораторію «Математичних методів аналізу складних систем». У 1990 р перейшов на роботу в Інститут проблем передачі інформації АН СРСР (ІПП). Серед його учнів тільки докторів фізико-математичних наук понад 30 осіб. Похований на Хованському кладовищі в Москві.

Алгоритм 7.1. Для заданого $x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n,$$

де (α_n) — послідовність чисел з $[0, 1]$.

Теорема 7.6. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Нехай послідовність чисел $\alpha_n \in [0, 1]$ задовольняє умову

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = +\infty. \quad (7.7)$$

Тоді згенерована алгоритмом 7.1 послідовність (x_n) слабо збігається до деякої точки з $F(T)$.

Доведення. Для довільного $p \in F(T)$ маємо

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \alpha_n \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|.$$

Таким чином, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$, а послідовність (x_n) обмежена.

Покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \quad (7.8)$$

Оцінимо зверху $\|x_{n+1} - p\|^2$, де $p \in F(T)$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|x_n - p + (1 - \alpha_n)(Tx_n - x_n)\|^2 = \\ &= \|x_n - p\|^2 + 2(1 - \alpha_n)(x_n - p, Tx_n - x_n) + \\ &+ (1 - \alpha_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2 = \|x_n - p\|^2 - (1 - \alpha_n) \|Tx_n - x_n\|^2 - \\ &- (1 - \alpha_n) \|p - x_n\|^2 + (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\|^2 + \\ &+ (1 - \alpha_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|Tx_n - x_n\|^2. \end{aligned}$$

Звідси

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k(1 - \alpha_k) \|Tx_k - x_k\|^2 \leq \|x_0 - p\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.9)$$

З (7.9) і (7.7) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \quad (7.10)$$

Маємо

$$\|x_{n+1} - x_n\| = (1 - \alpha_n) \|Tx_n - x_n\|.$$

Урахуємо цю рівність під час оцінки зверху $\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\|$:

$$\begin{aligned} \|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \|Tx_{n+1} - Tx_n\| + \alpha_n \|Tx_n - x_n\| \leq \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \alpha_n \|Tx_n - x_n\| = \|Tx_n - x_n\|. \end{aligned} \quad (7.11)$$

З (7.11) випливає існування $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| \in \mathbb{R}$. Разом із (7.10) це гарантує виконання (7.8). Ураховуючи демізамкненість оператора $I - T$, обмеженість (x_n) і (7.8), робимо висновок, що всі часткові слабкі границі послідовності (x_n) є нерухомими точками оператора T .

Покажемо, що (x_n) слабо збігається до деякого елемента $y \in F(T)$. Нехай $a, b \in F(T)$ — дві слабкі часткові границі послідовності (x_n) . Припустимо, що $a \neq b$, $x_{n_k} \rightharpoonup a$, $x_{n_l} \rightharpoonup b$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - a\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - b\| = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - b\| < \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - a\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|. \end{aligned}$$

Ця нерівність указує на те, що $a = b$. Отже, послідовність (x_n) слабо збіжна. \square

Зауваження 7.7. З (7.9) випливає нерівність (при обмеженій множині $C \subseteq H$):

$$\|Tx_n - x_n\| \leq \frac{\text{diam}(C)}{\sqrt{\sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - \alpha_k)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

7.4. Метод Гальперна

Почнемо з фундаментальної теореми Ф. Браудера про апроксимацію нерухомих точок нерозтягуючих операторів у гільбертовому просторі.

Теорема 7.7 (F. Browder, [62]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset$, $y \in C$. Тоді для довільного $t \in (0, 1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$ такий, що*

$$x_t = ty + (1 - t)Tx_t.$$

При $t \rightarrow 0$ напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до точки $P_{F(T)}y$, де $P_{F(T)}$ — оператор метричного проектування на множину $F(T)$.

Доведення. Оскільки $F(T)$ — непорожня замкнена опукла множина, то існує точка $y_0 = P_{F(T)}y \in F(T)$. Для довільного $t \in (0, 1)$ оператор $ty + (1-t)T$ стискаючий і відображає множину C в себе. Тому він має єдину нерухому точку $x_t \in C$.

Покажемо, що напрямленість $\{x_t\}$ обмежена. Для $p \in F(T)$ має місце нерівність

$$\|x_t - p\| \leq (1-t)\|Tx_t - p\| + t\|y - p\| \leq (1-t)\|x_t - p\| + t\|y - p\|.$$

Звідси $\|x_t - p\| \leq \|y - p\|$. Тобто напрямленість $\{x_t\}$ обмежена, а разом з нею обмежена й напрямленість $\{Tx_t\}$. Крім того, маємо

$$\|x_t - Tx_t\| = t\|Tx_t - y\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0. \quad (7.12)$$

Оберемо довільну збіжну до нуля послідовність чисел $t_n \in (0, 1)$ і покажемо, що (x_{t_n}) містить підпослідовність, яка сильно збігається до $y_0 = P_{F(T)}y$. Оскільки послідовність (x_{t_n}) обмежена, то можна вважати, що $x_{t_n} \rightharpoonup \bar{x} \in C$. Із (7.12) випливає включення $\bar{x} \in F(T)$.

Перемноживши скалярно тотожність $x_t - \bar{x} = (1-t)(Tx_t - \bar{x}) + t(y - \bar{x})$ та $x_t - \bar{x}$, використавши нерівність Шварца, отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \|x_t - \bar{x}\|^2 &= (1-t)(Tx_t - \bar{x}, x_t - \bar{x}) + t(y - \bar{x}, x_t - \bar{x}) \leq \\ &\leq (1-t)\|x_t - \bar{x}\|^2 + t(y - \bar{x}, x_t - \bar{x}). \end{aligned}$$

Звідси

$$\|x_t - \bar{x}\|^2 \leq (y - \bar{x}, x_t - \bar{x}).$$

Зокрема,

$$\|x_{t_n} - \bar{x}\|^2 \leq (y - \bar{x}, x_{t_n} - \bar{x}). \quad (7.13)$$

З нерівності (7.13) та $x_{t_n} \rightharpoonup \bar{x}$ випливає, що $x_{t_n} \rightarrow \bar{x}$.

Тепер покажемо, що $\bar{x} = y_0$. Оскільки $x_t \in$ нерухомою точкою оператора $ty + (1-t)T$, то

$$x_t - y = -\frac{1-t}{t}(x_t - Tx_t).$$

Для $x \in F(T)$, ураховуючи монотонність оператора $I - T$, отримуємо

$$\begin{aligned} (x_t - y, x_t - x) &= -\frac{1-t}{t}(x_t - Tx_t, x_t - x) = \\ &= -\frac{1-t}{t}((I - T)x_t - (I - T)x, x_t - x) \leq 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Здійснивши в нерівності (7.14) граничний перехід при $t = t_n \rightarrow 0$, доходимо висновку, що \bar{x} задовольняє нерівність

$$(\bar{x} - y, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in F(T),$$

що рівносильно рівності $\bar{x} = y_0$.

Покажемо, що й уся напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до $y_0 = P_{F(T)}y$. Для цього припустимо, що $x_{s_n} \rightarrow y_1$, де $s_n \rightarrow 0$. Оскільки $y_1 \in F(T)$, то

$$(y_0 - y, y_0 - y_1) \leq 0. \quad (7.15)$$

Міняючи місцями y_0 та y_1 , отримуємо

$$(y_1 - y, y_1 - y_0) \leq 0. \quad (7.16)$$

Склавши (7.15) та (7.16), дістаємо

$$(y_0 - y_1, y_0 - y_1) \leq 0,$$

тобто $y_0 = y_1$. □

Твердження 7.1. *Нехай у теоремі 7.7 маємо $F(T) = \emptyset$. Тоді*

$$\|x_t\| \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Доведення. Дійсно, інакше існує слабо збіжна послідовність (x_{t_n}) , де $(0, 1) \ni t_n \rightarrow 0$. Її границя z має належати множині $F(T)$ (унаслідок (7.12)). □

Таким чином, апроксимації Ф. Браудера мають властивість В. П. Маслова⁵: збіжність алгоритму рівносильна існуванню розв'язку задачі⁶.

У 2004 р. отримано узагальнення апроксимаційної теореми Браудера.

Теорема 7.8 (Н. К. Ху, [64]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset$, $f : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор. Тоді для довільного $t \in (0, 1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$ такий, що $x_t = tf(x_t) + (1 - t)Tx_t$. При $t \rightarrow 0$ напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до точки \bar{x} такої, що $\bar{x} = P_{F(T)}f(\bar{x})$.*

⁵Віктор Павлович Маслов (15.06.1930, Москва) — видатний російський фізик та математик, спеціаліст в галузі математичної фізики, академік РАН, д.ф.-м.н., професор. Виховувався в родині історика та філософа Бориса Федоровича Поршнева. Відомий як спеціаліст в галузі математичної фізики, диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, механіки та квантової фізики. Розробив асимптотичні методи, що широко застосовуються в квантовій механіці, теорії поля, статистичній фізиці.

⁶Уперше на важливість цієї властивості вказано у [63].

Доведення. Теорему 7.8 легко отримати з теореми 7.7 такими міркуваннями. Уведемо допоміжну напрямленість $\{y_t\}$ за допомогою рівняння

$$y_t = tf(\bar{x}) + (1-t)Ty_t, \quad t \in (0, 1).$$

За теоремою 7.7 маємо

$$y_t \rightarrow P_{F(T)}f(\bar{x}) = \bar{x} \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Для доведення теореми 7.8 достатньо показати, що

$$\|y_t - x_t\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

З оцінки

$$\begin{aligned} \|y_t - x_t\| &= \|t(f(\bar{x}) - f(x_t)) + (1-t)(Ty_t - Tx_t)\| \leq \\ &\leq \alpha t \|\bar{x} - x_t\| + (1-t) \|y_t - x_t\|, \end{aligned}$$

де $\alpha \in [0, 1)$ — коефіцієнт стискання оператора f , отримуємо

$$\|y_t - x_t\| \leq \alpha \|\bar{x} - x_t\| \leq \alpha \|\bar{x} - y_t\| + \alpha \|y_t - x_t\|.$$

Звідси $\|y_t - x_t\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \|\bar{x} - y_t\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. □

Описана апроксимація має на меті поліпшення вихідної задачі. Задачу

$$x_t = ty + (1-t)Tx_t \tag{7.17}$$

можна розв'язувати стандартним методом послідовних наближень, оскільки оператор $ty + (1-t)T$, на відміну від оператора T , є стискаючим. Однак ітерації, що апроксимують розв'язок (7.17) при фіксованому $t \neq 0$, узагалі кажучи, не апроксимують елемент $P_{F(T)}y$ при збільшенні номера ітерації.

Побудувати послідовність, що сильно збігається до $P_{F(T)}y$, можна за допомогою такої конструкції. Нехай $t_0 \in (0, 1)$ та $x_0 \in C$ фіксовані. Беручи x_0 за початкову точку, зробимо один крок методу послідовних наближень розв'язання задачі $x = t_0y + (1-t_0)Tx$. Отримаємо точку

$$x_1 = t_0y + (1-t_0)Tx_0.$$

Оберемо тепер $t_1 \in (0, t_0)$ і з парою t_1, x_1 виконаємо аналогічну дію. Отримаємо точку x_2 і т. д.

Описаний метод запропонував Б. Гальперн у 1967 р. Виявляється, удається так апріорно задати послідовність $t_n \rightarrow 0$, що описана ітераційна процедура

буде сильно збігатись до $P_{F(T)}y$ (якщо $F(T) \neq \emptyset$). Перейдемо до вивчення цієї схеми.

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$. Розглянемо таку ітераційну процедуру.

Алгоритм 7.2. Задаємо $x_0 \in C$ та $y \in C$, генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n y + (1 - \alpha_n)Tx_n,$$

де (α_n) — послідовність чисел з $(0, 1)$.

Уперше збіжність цього ітераційного алгоритму дослідив у 1967 р. Б. Гальперн [39]. Він показав, що умови

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n &= +\infty \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

є необхідними для сильної збіжності побудованої послідовності (x_n) до нерухомих точок нерозтягуючих операторів T , та отримав достатні умови сильної збіжності. Зокрема, Б. Гальперн довів збіжність алгоритму 7.2 при $\alpha_n = \frac{1}{(n+1)^q}$, де $q \in (0, 1)$.

У 1977 р. майбутній філдсовський лауреат П.–Л. Ліонс⁷ [65] покращив результат Б. Гальперна, довівши сильну збіжність алгоритму 7.2, якщо послідовність задовольняє умови (7.18) та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1}^2} = 0. \quad (7.19)$$

Зазначимо, що умови Б. Гальперна та П.–Л. Ліонса не задовольняє числова послідовність $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$.

У 1992 р. Р. Віттман [66] довів сильну збіжність алгоритму 7.2 до нерухомої точки оператора T за виконання умов (7.18) та

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty. \quad (7.20)$$

⁷П'єр-Луї Ліонс (Pierre-Louis Lions, 11.08.1956, Грасс) — видатний французький математик. Син Жака-Луї Ліонса. Отримав медаль Філдса у 1994 році. Займається теорією нелінійних рівнянь в частинних похідних, теорією ігор середнього поля.

Нарешті, у 2002 р. Х. К. Ксу сформулював теорему про сильну збіжність алгоритму 7.2 за виконання умов (7.18) та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 0. \quad (7.21)$$

Досі відкритим⁸ залишається питання: чи є (7.18) достатньою умовою сильної збіжності алгоритму 7.2 для довільного нерозтягуючого оператора $T: C \rightarrow C$?

Теорема 7.9 (Н. К. Ху, [67]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T: C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$, $y \in C$. Нехай послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови:*

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$,
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$,
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 0$.

Тоді згенерована алгоритмом 7.2 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $P_{F(T)}y$.

Доведення. Покажемо спочатку обмеженість послідовності (x_n) . Для $p \in F(T)$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\| + \alpha_n \|y - p\| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|y - p\| \leq \max\{\|x_n - p\|, \|y - p\|\}. \end{aligned}$$

Звідси індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \{\|x_0 - p\|, \|y - p\|\}, \quad n \geq 0.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена, а разом з нею — також послідовність (Tx_n) .

Покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \quad (7.22)$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \quad (7.23)$$

⁸Точніше, у січні 2021-го ми вважаємо його таким.

Використаємо лему 1.9 про числові послідовності. Маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| &= \\ &= \|(\alpha_n - \alpha_{n-1})(\mathbf{y} - T\mathbf{x}_{n-1}) + (1 - \alpha_n)(T\mathbf{x}_n - T\mathbf{x}_{n-1})\| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \cdot \|\mathbf{y} - T\mathbf{x}_{n-1}\|. \end{aligned}$$

З леми 1.9 про числові послідовності випливає (7.22). Тепер ми можемо отримати (7.23) із (7.22).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_n - T\mathbf{x}_n\| &\leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\| + \|\mathbf{x}_{n+1} - T\mathbf{x}_n\| = \\ &= \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\| + \alpha_n \|\mathbf{y} - T\mathbf{x}_n\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Доведемо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{x}_n, \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{y}) \leq 0. \quad (7.24)$$

Виділимо з (\mathbf{x}_n) підпослідовність (\mathbf{x}_{n_k}) таку, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{x}_n, \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{y}).$$

Можна вважати, що $\mathbf{x}_{n_k} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$. Із (7.23) випливає включення $\tilde{\mathbf{x}} \in F(T)$. Тому одержуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{y}) = (\mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y} - \mathbf{y}) \leq 0,$$

чим і доводимо (7.24).

Покажемо тепер, що

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y}\|^2 &\leq (1 - \alpha_n) \|\mathbf{x}_n - \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y}\|^2 + \\ &+ 2\alpha_n (\mathbf{y} - \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y}, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Застосувавши до одержаної рекурентної нерівності (7.25) лему 1.9 про числові послідовності, робимо висновок, що $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{P}_{F(T)}\mathbf{y}\| \rightarrow 0$. \square

Зауваження 7.8. Розглянута схема є узагальненням усереднення за Чезаро. Дійсно, якщо T — лінійний оператор, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ та $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$, то породжена алгоритмом Гальперна послідовність має вигляд $\mathbf{x}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k \mathbf{y}$, а за умови $\|T\| \leq 1$ послідовність (\mathbf{x}_n) сильно збігається до $\mathbf{P}_{N(I-T)}\mathbf{y}$. Отже, з теореми 7.9 випливає ергодична теорема фон Неймана.

У 1996 р. Н. Н. Vauschke в [68] запропонував циклічний алгоритм Гальперна, який будував послідовність, що сильно збігається до спільної нерухокої точки скінченної кількості нерозтягуючих операторів. Також А. Moudafi [69] та І. Yamada [70] запропонували узагальнення схеми Гальперна (алгоритм 7.2) для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонними операторами на множині нерухомих точок нерозтягуючих операторів.

7.5. Гібридний метод

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що

$$F(T) \neq \emptyset.$$

Відомо, що у загальному випадку метод Красносельського–Манна лише слабо збігається до нерухокої точки. Існує декілька сильно збіжних його модифікацій. Однією з найпопулярніших є CQ -метод (відомий під назвою «гібридний метод»), що запропонований у 2003 р. японськими математиками К. Накаґо та W. Takahashi [40]. Розглянемо цей метод.

Алгоритм 7.3. Для заданого $x_0 = x \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

де (α_n) — послідовність чисел із $[0, \alpha]$ для деякого $\alpha \in [0, 1)$.

Множини Q_n, C_n опуклі та замкнені. Опуклість C_n випливає з того, що нерівність $\|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|$ рівносильна нерівності $\|y_n - x_n\| + 2(y_n - x_n, x_n - z) \leq 0$. Отже, множини $C_n \cap Q_n$ замкнені та опуклі для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нехай $p \in F(T)$. З нерівності

$$\|y_n - p\| \leq \alpha_n \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) \|T x_n - p\| \leq \|x_n - p\|$$

випливає $p \in C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отже, $F(T) \subseteq C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тепер за допомогою математичної індукції покажемо, що послідовність

(x_n) коректно визначена та для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ має місце вкладення

$$F(T) \subseteq C_n \cap Q_n.$$

Для $n = 0$ маємо $x_0 = x \in C$ і $Q_n = C$. Тому $F(T) \subseteq C_0 \cap Q_0$. Нехай для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ маємо $F(T) \subseteq C_k \cap Q_k$. Тоді існує єдина точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$ така, що $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$. Із $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$ випливає

$$(x_{k+1} - z, x_0 - x_{k+1}) \geq 0 \quad \forall z \in C_k \cap Q_k.$$

Оскільки $F(T) \subseteq C_k \cap Q_k$, то $F(T) \subseteq Q_{k+1}$. Таким чином,

$$F(T) \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}.$$

Покажемо, що послідовність (x_n) обмежена. Існує єдина точка $z_0 \in F(T)$ така, що $z_0 = P_{F(T)} x_0$. Із $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$ випливає

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z_0 - x_0\| \quad \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Оскільки $z_0 \in F(T) \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z_0 - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (7.26)$$

Звідси випливає обмеженість (x_n) .

Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (7.27)$$

Із $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ та $x_n = P_{Q_n} x_0$ випливає

$$\|x_{n+1} - x_0\| \geq \|x_n - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Числова послідовність $(\|x_n - x_0\|)$ обмежена та неспадна. Тому існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|$. З іншого боку, оскільки $x_{n+1} \in Q_n$, то $(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \geq 0$ та

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|(x_n - x_0) - (x_{n+1} - x_0)\|^2 = \\ &= \|x_n - x_0\|^2 - 2(x_n - x_0, x_{n+1} - x_0) + \|x_{n+1} - x_0\|^2 = \\ &= \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 - 2(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \leq \\ &\leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Звідси випливає (7.27).

Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \quad (7.28)$$

Із $x_{n+1} \in C_n$ випливає

$$\begin{aligned} \|Tx_n - x_n\| &= \frac{1}{1 - \alpha_n} \|y_n - x_n\| \leq \frac{1}{1 - \alpha_n} (\|y_n - x_{n+1}\| + \\ &\quad + \|x_{n+1} - x_n\|) \leq \frac{2}{1 - \alpha_n} \|x_{n+1} - x_n\|. \end{aligned}$$

Ураховавши (7.27), отримуємо (7.28).

Розглянемо довільну підпослідовність (x_{n_k}) , що слабо збігається до деякої точки $w_0 \in C$. Ураховавши демізамкненість оператора $I - T$ та (7.28), робимо висновок, що $w_0 \in F(T)$. Для $z_0 = P_{F(T)}x_0$ із (7.26) випливає

$$\|x_0 - z_0\| \leq \|x_0 - w_0\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \|x_0 - z_0\|.$$

Таким чином, ми отримали $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - x_{n_k}\| = \|x_0 - w_0\| = \|x_0 - z_0\|$. Звідси $x_{n_k} \rightarrow w_0 = z_0$. Отже, $x_n \rightarrow z_0$.

Має місце

Теорема 7.10 (Накаґо–Тakahashi, [40]). *Породжена алгоритмом 7.3 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z_0 = P_{F(T)}x_0$.*

7.6. Метод стиснення

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$.

У 2008 р. W. Takahashi, Y. Takeuchi та R. Kubota [41] запропонували такий алгоритм (shrinking algorithm).

Алгоритм 7.4. Для заданого $x_0 = x \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \quad C_1 = C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \end{cases}$$

де (α_n) — послідовність чисел із $[0, \alpha]$ для деякого $\alpha \in [0, 1)$.

Припустимо, що $C_n \neq \emptyset$ та $F(T) \subseteq C_n$. Маємо

$$\|y_n - z\| \leq \alpha_n \|x_n - z\| + (1 - \alpha_n) \|Tx_n - z\| \leq \|x_n - z\| \quad \forall z \in F(T).$$

Отже, $F(T) \subseteq C_{n+1}$. Отримали ланцюжок вкладень

$$C = C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots \supseteq F(T) \neq \emptyset$$

і коректність визначення послідовності (x_n) .

Нехай $z_0 = P_{F(T)}x_0$. Має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &= \min_{y \in C_n} \|y - x_0\| \leq \min_{y \in C_{n+1}} \|y - x_0\| = \\ &= \|x_{n+1} - x_0\| \leq \min_{y \in F(T)} \|y - x_0\| = \|z_0 - x_0\|. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Отже, існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|$.

Для $k > l$ маємо

$$\|x_k - x_l\|^2 = \|x_k - x_0\|^2 - \|x_l - x_0\|^2 + 2(x_0 - x_l, x_k - x_l).$$

Урахувавши $x_l = P_{C_l}x_0$ та $x_k \in C_l$, отримаємо

$$\|x_k - x_l\|^2 \leq \|x_k - x_0\|^2 - \|x_l - x_0\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k > l \rightarrow \infty.$$

Отже, послідовність (x_n) фундаментальна. Таким чином, існує елемент $x \in C$ такий, що $x_n \rightarrow x$.

Покажемо, що $x \in F(T)$. Оскільки $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\begin{aligned} \|Tx_n - x_n\| &= \frac{1}{1 - \alpha_n} \|y_n - x_n\| \leq \frac{1}{1 - \alpha_n} (\|y_n - x_{n+1}\| + \\ &\quad + \|x_{n+1} - x_n\|) \leq \frac{2}{1 - \alpha_n} \|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

З неперервності оператора T випливає рівність $Tx = x$.

Здійснивши граничний перехід у (7.29), отримаємо

$$\|x - x_0\| \leq \min_{y \in F(T)} \|y - x_0\|.$$

Звідси $x = z_0 = P_{F(T)}x_0$.

Таким чином, має місце

Теорема 7.11 (Takahashi–Takeuchi–Kubota, [41]). *Породжена алгоритмом 7.4 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z_0 = P_{F(T)}x_0$.*

7.7. Задачі

Задача 7.1. Покажіть, що лема 7.1 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів.

Задача 7.2. Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору H , $T_1, T_2, \dots, T_m : C \rightarrow C$ — нерозтягуючі оператори, причому $\bigcap_{n=1}^m F(T_n) \neq \emptyset$. Доведіть, що для довільного набору $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ додатніх чисел з $\sum_{n=1}^m \lambda_n = 1$ оператор

$$Tx = \sum_{n=1}^m \lambda_n T_n x \quad (x \in C)$$

є нерозтягуючим та $F(T) = \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$.

Задача 7.3. Нехай C — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Припустимо, що послідовність точок $x_n \in C$ має властивості:

- 1) $\forall p \in F(T) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$.

Доведіть, що послідовність (x_n) слабо збігається до точки з $F(T)$.

Задача 7.4. Отримайте ергодичну теорему для послідовності середніх

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T^k x}{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k},$$

де (λ_n) — така послідовність додатних чисел, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, T — нерозтягуючий оператор, що відображає опуклу замкнену множину C гільбертового простору H у себе, $x \in C$.

Задача 7.5. Функція $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ задовольняє умову

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1].$$

Для $x_0 \in [0, 1]$ покладемо $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$. Доведіть, що $x_n \rightarrow y \in [0, 1]$ і $f(y) = y$.

Задача 7.6. Доведіть, що задана (7.6) послідовність збігається до нерухокої точки неперервної функції $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Задача 7.7. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset$, $f : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор. Покажіть, що для довільного $t \in (0, 1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$, такий, що

$$x_t = T(tf(x_t) + (1 - t)x_t).$$

Доведіть, що при $t \rightarrow 0$ напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до точки \bar{x} , такої, що $\bar{x} = P_{F(T)}f(\bar{x})$.

Задача 7.8. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор з $F(T) \neq \emptyset$, $f : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор. Для заданого $x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tx_n,$$

де послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$. Доведіть, що згенерована послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z \in F(T)$, такої, що $z = P_{F(T)}f(z)$.

Задача 7.9. Нехай $T_i : C \rightarrow C$ — злічений набір нерозтягуючих операторів, що діють у замкненій опуклій підмножині C гільбертового простору H , $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$. Розглянемо схему:

$$x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n,$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $x_1 \in C$ і $a \in C$. Доведіть, що послідовність (x_n) сильно збігається до $P_F a$.

Задача 7.10. Нехай оператор $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий, оператор $A : H \rightarrow H$ — ліпшицевий та сильно монотонний із сталими $L > 0$, $l > 0$, відповідно. Оператор $T_\alpha : H \rightarrow H$ задано рівністю

$$T_\alpha x = Tx - \alpha A T x, \quad \alpha \in [0, +\infty).$$

Доведіть, що для довільного $\mu \in (0, \frac{2l}{L^2})$ маємо

$$\|T_\alpha x - T_\alpha y\| \leq \left(1 - \frac{\tau}{\mu}\alpha\right) \|x - y\| \quad \forall x \in H \quad \forall y \in H,$$

де $\alpha \in [0, \mu]$, $\tau = 1 - \sqrt{1 - 2l\mu + L^2\mu^2} \in (0, 1]$.

Задача 7.11. Нехай оператор $T : H \rightarrow H$ — незтягуючий, оператор $A : H \rightarrow H$ — ліпшицевий та сильно монотонний. Розглянемо ітераційну схему:

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ x_{n+1} = y_n - \alpha_n Ay_n, \end{cases}$$

де послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$. Доведіть, що породжена послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in F(T).$$

Література

- [1] Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. 73. P. 591–597.
- [2] Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis*. 2008. Vol. 16. P. 899–912.
- [3] Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: Мир, 1972.
- [4] Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983.
- [5] Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Москва: Наука, 1988.
- [6] Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. Москва: Наука, 1972.
- [7] Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. Киев: Наук. думка, 1988.
- [8] Patriksson M. *Nonlinear programming and variational inequality problems: A unified approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [9] Гловински Р., Лионс Ж.–Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. Москва: Мир, 1979.
- [10] Экланд И., Тетам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. Москва: Мир, 1979.
- [11] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. Москва: Мир, 1988.

- [12] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972.
- [13] Bensusan A. Points de Nash dans le cas de fonctionnelles quadratiques et jeux différentiels linéaires à N personnes. *SIAM Journal on Control*. 1974. No. 12. P. 460–499.
- [14] Dafermos S. Traffic equilibria and variational inequalities. *Transportation Science*. 1982. Vol. 16. P. 231–240.
- [15] Nagurney A. *Network economics: A variational inequality approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [16] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неревенства в механике и физике. Москва: Наука, 1980.
- [17] Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. Москва: Изд-во МГУ, 1989.
- [18] Goldstein A. A. Convex programming in Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc*. 1964. Vol. 70. P. 709–710.
- [19] Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1966. Т. 6. № 5. С. 787–823.
- [20] Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. *Экономика и математические методы*. 1976. № 4. С. 747–756.
- [21] Антипин А. С. О методе выпуклого программирования, использующем симметрическую модификацию функции Лагранжа. *Экономика и математические методы*. 1976. № 6. С. 1164–1173.
- [22] Nadezhkina N., Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2006. Vol. 128. P. 191–201.
- [23] Зыкина А. В., Меленьчук Н. В. Двухшаговый экстраградиентный метод для вариационных неравенств. *Изв. вузов. Матем.* 2010. № 9. С. 82–85.
- [24] Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. 148. P. 318–335.

- [25] Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47. Issue 4. P. 631–639.
- [26] Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Optimization*. 2000. Vol. 38. P. 431–446.
- [27] Попов Л. Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек. *Математические заметки*. 1980. Т. 28, № 5. С. 777–784.
- [28] Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50. Issue 2. P. 271–277.
- [29] Malitsky Yu. Projected Reflected Gradient Methods for Monotone Variational Inequalities. *SIAM Journal on Optimization*. 2015. Vol. 25. P. 502–520.
- [30] Malitsky Y., Tam M. K. A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity. arXiv preprint arXiv:1808.04162. 2018.
- [31] Csetnek E. R., Malitsky Y., Tam M. K. Shadow Douglas–Rachford Splitting for Monotone Inclusions. arXiv preprint arXiv: 1903.03393. 2019.
- [32] Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551. 2018.
- [33] Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51. Issue 5. P. 757–765.
- [34] Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47. Issue 7. P. 31–46.
- [35] Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

- [36] Bauschke H. H., Combettes P. L. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. New York: Springer, 2011.
- [37] Еремин И. И., Мазуров В. Д. *Нестационарные процессы математического программирования*. Москва: Наука, 1979.
- [38] Нурминский Е. А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48, № 12. С. 2121–2128.
- [39] Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 957–961.
- [40] Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* 2003. V. 279. P. 372–379.
- [41] Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 341. P. 276–286.
- [42] Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings. *SIAM J. Optim.* 2006. Vol. 16. P. 1230–1241.
- [43] Nedic A., Bertsekas D. P. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization. *SIAM J. Optim.* 2001. Vol. 12, No. 1. P. 109–138.
- [44] Bertsekas D. P. Incremental proximal methods for large scale convex optimization. *Math. Program., Ser. B.* 2011. 129. P. 163–195.
- [45] Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2013. № 2 (112). С. 42–52.
- [46] Bruck R. E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1977. 61. P. 159–164.
- [47] Немировский А. С., Юдин Д. Б. Чезаровская сходимость градиентного метода аппроксимации седловых точек выпукло-вогнутых функций. *Доклады АН СССР.* 1978. т. 239, вып. 5. 1056–1059.

- [48] Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1979. 72. P. 383–390.
- [49] Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems. *Journal of Global Optimization*. 2015, Volume 61. Issue 1. P. 193–202.
- [50] Ведель Я. И., Семенов В. В. Новый двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задачи о равновесии. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2015. № 1 (118). С. 15–23.
- [51] Брэгман Л. М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1967. №3. С. 620–631.
- [52] Kassay G., Radulescu V.D. *Equilibrium Problems and Applications*. London: Academic Press, 2019.
- [53] Beck A. *First-Order Methods in Optimization*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017.
- [54] Малицький Ю. В. Ефективні проєктивні методи для варіаційних нерівностей та задач структурної оптимізації. Автореферат дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. Київ, 2015. 20 с.
- [55] Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. *Publication del Dep. di Mathematica Dell'Universita di Pisa*. 2000. 3. P. 1244–1258.
- [56] Browder F. E. Fixed-point theorems for noncompact mapping in Hilbert space. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1965. Vol. 53. P. 1272–1276.
- [57] Browder F. E. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 1965. 54. P. 1041–1044.
- [58] Kirk W. A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. *Amer. Math. Monthly*. 1965. 72. P. 1004–1006.
- [59] Göhde D. Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung. *Math. Nachr.* 1965. 30. P. 251–258.
- [60] Ray W. O. The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1980. Vol. 258. N. 2. P. 531–537.

- [61] Красносельский М. А. Два замечания о методе последовательных приближений. УМН. 1955. Том 10. Выпуск 1(63). С. 123–127.
- [62] Browder F. E. Convergence of approximants of fixed points of nonexpansive non-linear mappings in Banach spaces. Arch. Rational Mech. Anal. 1967. Vol. 24. P. 82–90.
- [63] Маслов В. П. Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса. УМН. 1968. Т. 23. № 3. С. 183–184.
- [64] Xu H. K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 298. P. 279–291.
- [65] Lions P.-L. Approximation de points fixes de contractions. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B. 1977. 284. P. A1357–A1359.
- [66] Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. Arch. Math. 1992. Vol. 58. P. 486–491.
- [67] Xu H. K. Iterative algorithms for nonlinear operators. J. London Math. Soc. 2002. P. 240–256.
- [68] Bauschke H. H. The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1996. Vol. 202. P. 150–159.
- [69] Moudafi A. Viscosity Approximation Methods for Fixed-Points Problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. Vol. 241. No. 1. P. 46–55.
- [70] Yamada I. The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings. Studies in Computational Mathematics. 2001. Vol. 8. P. 473–504.

Інформація про автора



Семенов Володимир Вікторович — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Лауреат Державної премії України в галузі освіти (2018).