



**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И
ГЛОБАЛЬНОГО ИНФОРМАЦИОННОГО
ПРОСТРАНСТВА**

**ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ СБОРНЫХ ГРУЗОВ В
МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ С
ЗАДАННЫМИ ТАРИФАМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ
НА ВРЕМЯ ДОСТАВКИ**

В.А. Васянин, А.Н. Трофимчук, Л.П. Ушакова
itgis@nas.gov.ua

**Семинар «Моделирование и Оптимизация в Транспорте и
Логистике», посвященный памяти Дмитрия Ильича Соломона**

Институт Систем Управления, Азербайджан

Институт математики и информатики, Молдова

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины

25 апреля 2023 года

Работа направлена на повышение эффективности функционирования магистральных транспортных сетей за счет снижения дефицитных ресурсов на основе применения методологии моделирования и проектирования процессов обработки и маршрутизации дискретных потоков сборных грузов и комплекса мер информационно-аналитического обеспечения и автоматизации процедур принятия решений в управлении транспортными потоками [1]. Данная проблематика имеет множество важных применений, так например, на сегодня перевозками дискретных потоков грузов, кроме государственного предприятия «Укрпочта», занимаются многие специализированные курьерские службы, такие как «Новая Почта», «Деливери», «Ночной Экспресс», «Ваша почта» и пр. Широко распространена и международная электронная торговля грузами через Интернет, доставляемыми клиентам по всему миру автомобильным, авиационным и другими видами транспорта. В то же время, практические исследования показывают, что на протяжении последних лет объемы перевозок сборных грузов в контейнерах и на поддонах в транспортных сетях Украины увеличиваются недостаточно интенсивно. Так, например, в США в год перевозится более 15 миллиардов тонн мелкопартионных грузов на общую сумму более 9 триллионов долларов, а доходы от транспортировки таких грузов составляют около 11% от валовой национальной продукции США [2, 3]. Основными причинами этого являются организационно-техническая неподготовленность государственных и частных транспортных предприятий к внедрению современных информационно-аналитических систем, технологий и инструментальных средств автоматизированного проектирования, управления и поддержки принятия решений, в том числе и с использованием ситуационных центров обработки и представления информации. Кроме того, в большинстве существующих в настоящее время автоматизированных транспортных системах не реализованы научно обоснованные методы математического моделирования перевозки сборных грузов в контейнерах и на поддонах и отсутствуют инструментальные средства для управления такими перевозками. В известных подходах к решению многопродуктовых оптимизационных задач проектирования сетей, распределения и маршрутизации потоков обычно используются линейные математические модели, Лагранжевая и LP релаксация исходной задачи, методы ветвей и границ, отсечений и цен, генерации столбцов и т.п. и проверенные на практике разновидности симплекс-метода и метода внутренних точек. Есть и универсальные программные средства решения задач математического программирования со смешанными и целочисленными переменными. Обширный библиографический обзор по математическим моделям, методам и алгоритмам решения многопродуктовых задач (Multicommodity Network Flow Problems, MCNF) можно найти в [4-8]. В одной из немногочисленных работ [9] рассматривается задача маршрутизации сборных тарноштучных грузов в многопродуктовой сети, в которой интегрируются процессы их сортировки и транспортировки и учитываются ограничения на время доставки грузов. При этом в один транспортный блок группируются только такие грузы, у которых совпадают пункты отправления и назначения и временные окна доставки, ограничения на пропускные способности узлов и дуг сети не учитываются. В [10, 11] приводятся многопродуктовые модели маршрутизации с ограничениями на пропускные способности дуг сети и с жесткими (the Hard Transit Time-Constrained, HTC-MCNF) и мягкими (the Soft Ttransit Ttime-Constrained, STC-MCNF) ограничениями на время доставки грузов, но грузы с различными адресами назначения не объединяются в общие транспортные блоки. В отличие от большинства существующих подходов к моделированию и анализу функционирования многопродуктовых сетей, в данной работе рассматриваются дискретные модели транспортных процессов с целочисленными переменными и параметрами, что требует разработки новых комбинаторных методов и алгоритмов решения поставленных задач. В практических задачах должны учитываться процессы сортировки грузов в сортировочных центрах, ограничения на время их доставки потребителю, колебания потоков и нагрузок в отдельных узлах и линиях связи транспортной сети, грузоподъемность транспортных средств, нелинейность приведенных затрат на обработку и транспортировку потоков и многие другие реальные факторы и ограничения. Это приводит к необходимости разработки новых математических моделей, методов, алгоритмов и информационной платформы для управления обработкой, распределением и маршрутизацией потоков сборных грузов и определяет важность исследуемой научно-прикладной проблемы для развития транспортной системы Украины.

В большинстве случаев существующие и проектируемые территориально-распределенные транспортные сети являются многоуровневыми и состоят из децентрализованной распределенной сети (магистральной) и низовых фрагментарных сетей (зональных и внутренних) на нижних уровнях иерархии. Поскольку физическая пространственная структура многих транспортных сетей уже сложилась, в первую очередь, наибольший интерес представляет решение задач тактического (текущего) планирования и оперативного управления, нацеленных главным образом на оптимизацию их функционирования при имеющихся ресурсах. В данной работе рассматриваются транспортные магистральные многопродуктовые сети, для которых характерно наличие множества источников и стоков потоков корреспонденций (продуктов или требований). Под корреспонденцией понимается пара различных узлов сети, между которыми имеется направленный дискретный поток элементов заданной величины, например, неделимых грузов унифицированного размера. В многопродуктовой сети каждый узел может обмениваться корреспонденциями со всеми остальными узлами. Корреспонденции могут быть заданы, например, матрицей дискретных потоков, в которой строки соответствуют узлам-источникам, столбцы — узлам-стокам, а элементы матрицы определяют величину корреспонденций. В магистральной сети все корреспонденции должны транспортироваться в транспортных средствах в транспортных блоках (контейнерах, пленочной упаковке, на поддонах) заданного размера. Размер транспортного блока измеряется количеством вмещающихся в него единиц корреспонденций. Перед транспортировкой грузы в магистральных узлах транспортной сети рассортировываются по адресам их доставки в сортировочных центрах, а затем упаковываются в транспортные блоки.

В работе [12] рассматривается обобщенная задача упаковки и распределения потоков корреспонденций в иерархической сети, решение которой осуществляется в несколько этапов. На первом этапе решается задача выбора иерархической структуры магистральной сети и схемы сортировки корреспонденций в узлах сети и упаковки их в транспортные блоки [13-15]. На втором этапе возникает задача распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков со сборными грузами, которые были сформированы при решении первой задачи [16, 17]. Под сборными грузами как и ранее понимаются объединенные в один транспортный блок тарно-штучные грузы с разными адресами назначения, которые могут не совпадать с адресом назначения транспортного блока. Сборные грузы образуются для максимального сокращения количества транспортных блоков и транспортных средств, необходимых для их упаковки и транспортировки в магистральной сети.

Как правило, в математических моделях, описывающих процессы обработки и транспортировки многопродуктовых потоков затраты связываются с величиной потока по дугам сети или путям передачи потока. Для сетей передачи данных, где дуги ассоциируются с каналами связи, такие постановки оказываются достаточно приемлемыми. В случае же транспортных сетей очень трудно адекватно определить функции транспортных затрат, а значит, и получить в результате решения задачи достоверный ответ. В математической модели задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков, приведенной в работе [16], объемы и пути распределения потоков связываются с множеством искомых «оптимальных» маршрутов транспортных средств или каналов связи. Такая постановка задачи характерна при проектировании новой или реконструкции существующей сети перевозок или сети передачи данных. В этом случае для каждого определенного в результате решения маршрута легко рассчитать требуемые затраты (например, среднегодовые приведенные затраты) и получить более достоверную оценку транспортных затрат для всей сети. Если транспортные услуги предоставляются сторонними транспортными предприятиями (компаниями) или провайдерами сети передачи данных, то задача распределения и маршрутизации потоков упрощается, так как в качестве функций транспортных затрат можно использовать тарифы на перевозку или передачу одного транспортного блока от отправителя к получателю [18].

Целью настоящей работы является построение математической модели задачи маршрутизации транспортных блоков со сборными грузами при использовании заданных тарифов на транспортировку и обработку потоков. Рассматривается сетевая формулировка задачи с заданными тарифами на дугах и в узлах и постановка в виде задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с блочной структурой, связывающими ограничениями и дополнительными ограничениями на время доставки отдельных грузов получателю. Отмечаются особенности решения задачи при использовании известных методов ЦЛП и пакетов прикладных программ.

1. Иерархическая структура сети. Принципы организации сортировки и распределения потоков

В сети выделено три уровня иерархии – магистральный, зональный и внутренний и четыре типа узлов – первого, второго, третьего и четвертого типов. Узлы первого, второго и третьего типа, находящиеся на транспортных магистралях ТС или СПД и соединяющие их участки маршрутов транспортных средств или каналов связи составляют магистральную сеть. Все магистральные узлы имеют свои зоны обслуживания (ЗОУ), которые образуют зональные уровни магистральной сети. Узлы четвертого типа находятся во внутренней зоне обслуживания какого-либо магистрального узла и вместе с ним образуют внутреннюю сеть. Каждый узел в сети имеет название, географические координаты, уникальный индекс и порядковый номер. Каждому узлу можно поставить во взаимно-однозначное соответствие множество индексов (номеров) корреспондирующих с ним других узлов в магистральной и внутренней сети. На рис. 1 показаны фрагменты сетей, а также примеры ЗОУ для узлов первого, второго и третьего типа (где m – узлы четвертого типа).

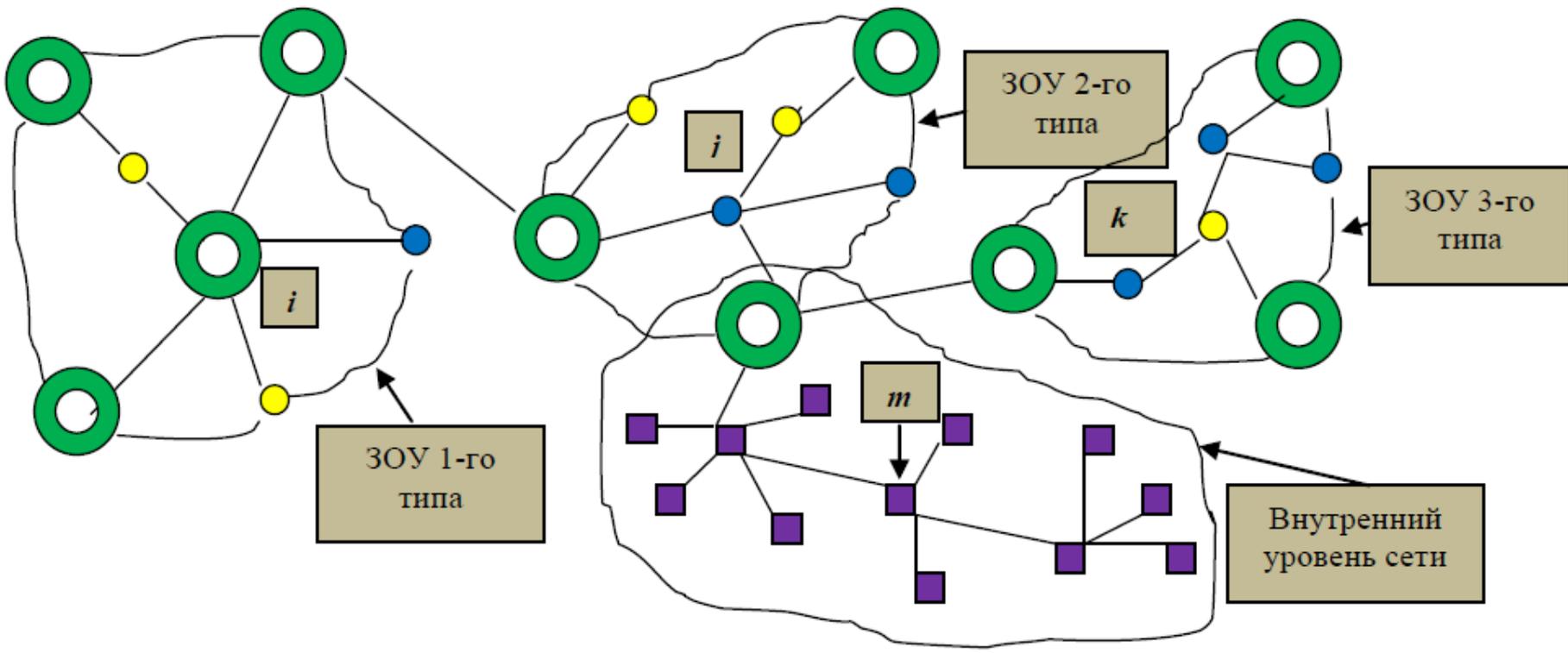
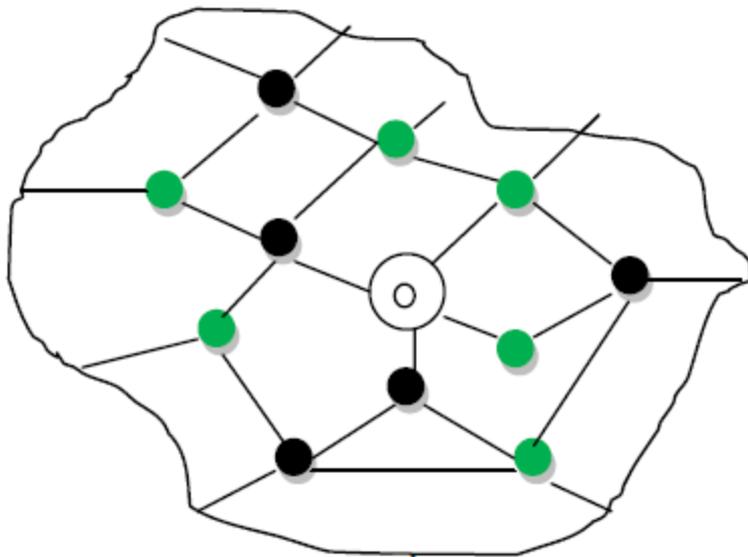
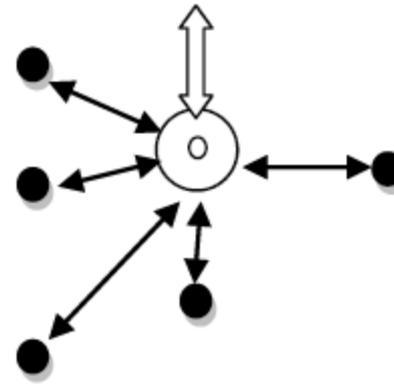


Рис. 1

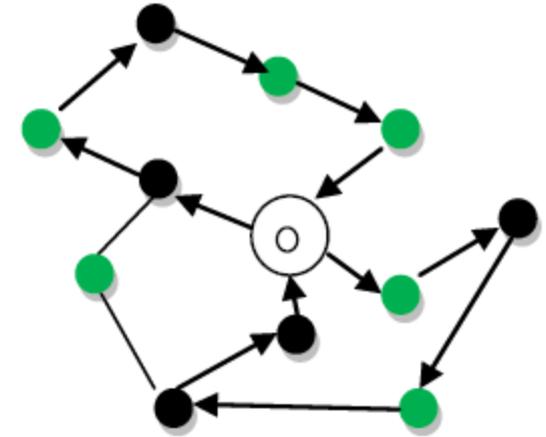
Фрагменты внутриузловой сети, циркулирующие потоки и кольцевые маршруты



а)



б)



в)

а) внутриузловая сеть с центральным магистральным узлом и депо,
 ● - клиенты, ● - дорожные узлы, участки дорог показаны линиями;
 б) входящие и исходящие потоки; в) два циклических маршрута

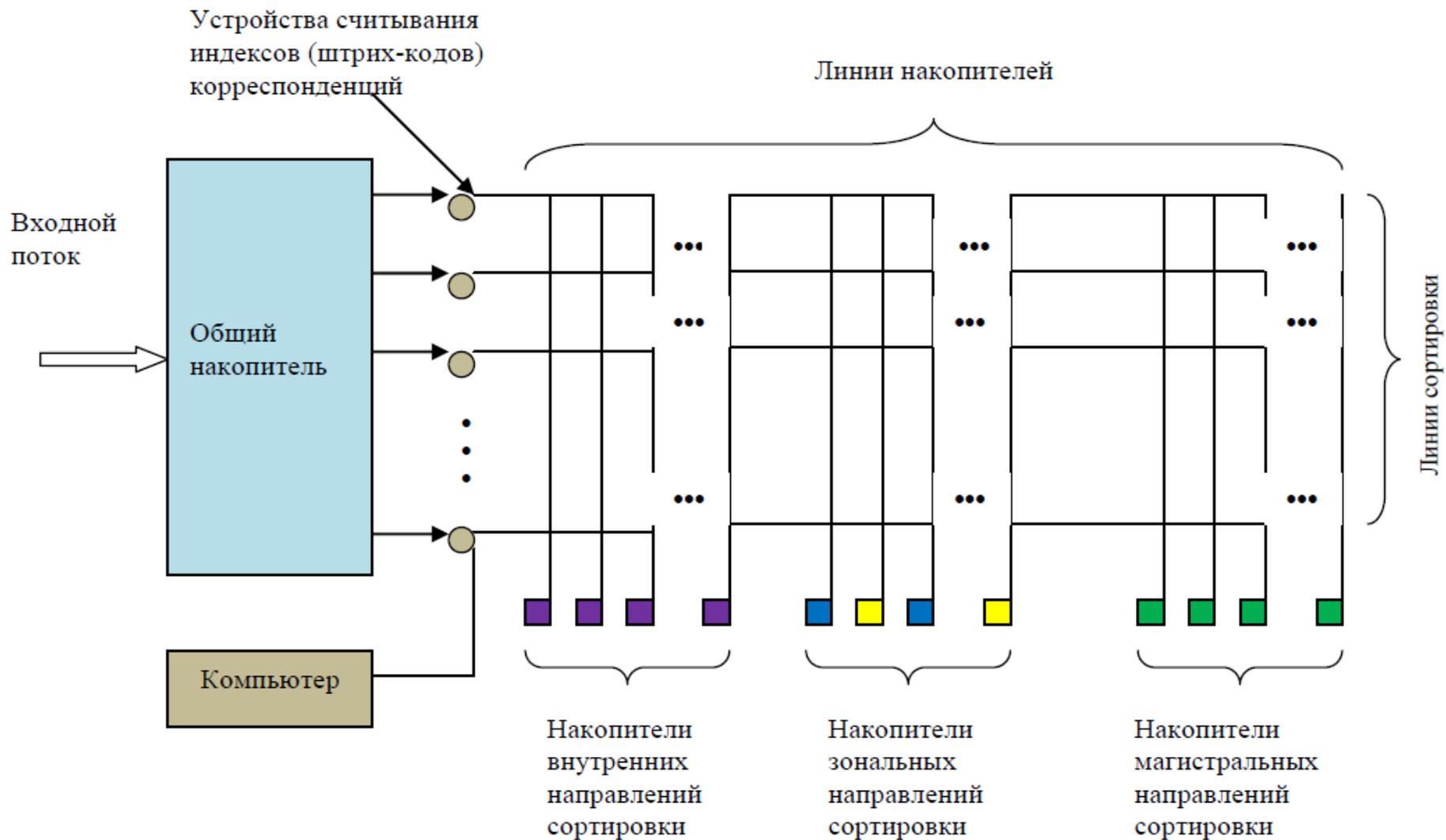
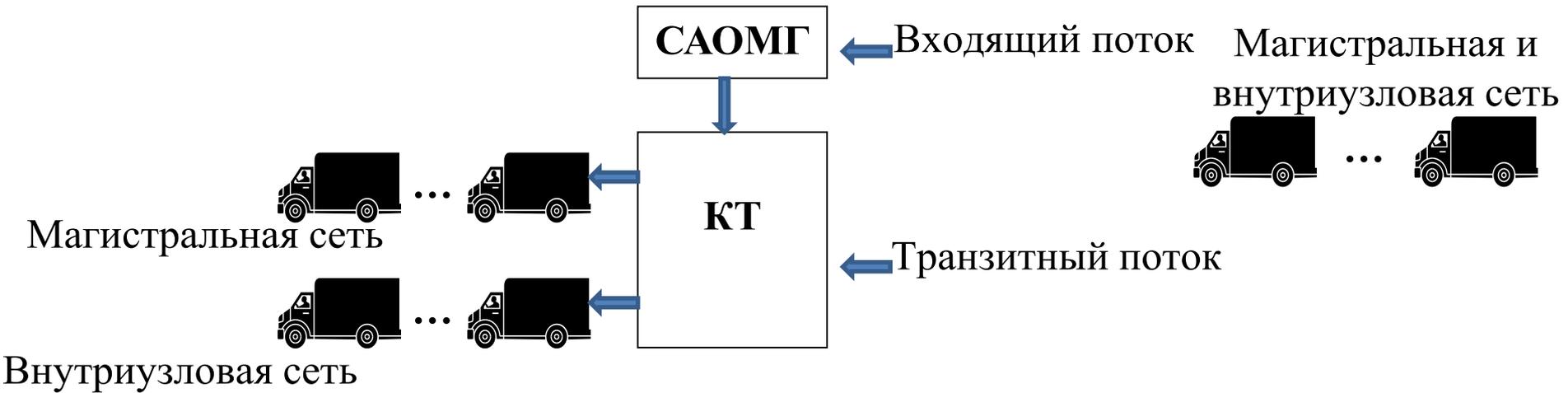


Рис. 2

Схема обработки потоков в магистральном узле



Основные схемы перевозки грузов на проектируемых маршрутах ТС:

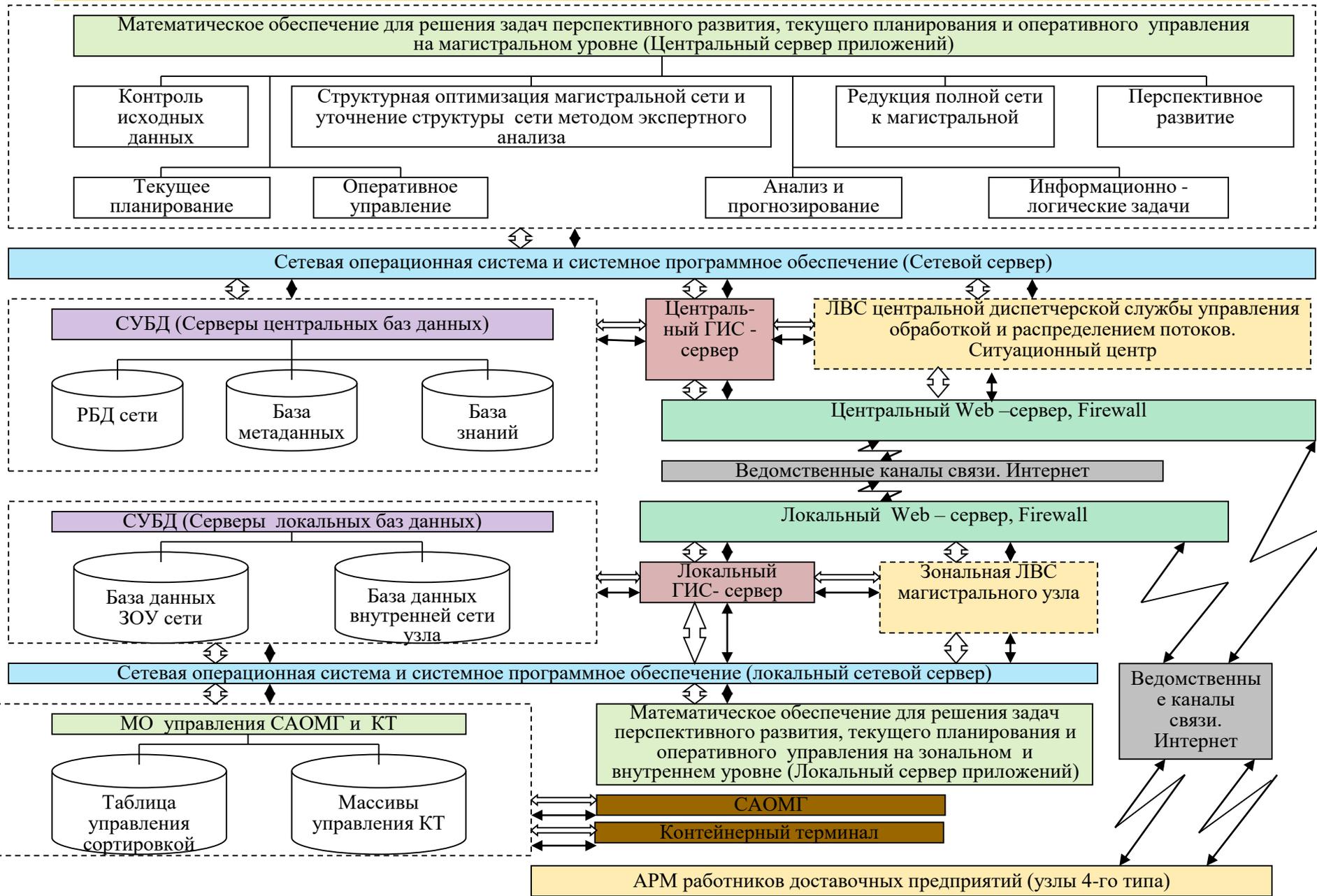
- доставочные маршруты для перевозки грузов из магистрального узла к клиентам;
- сборочные маршруты для перевозки грузов от клиентов к магистральному узлу;
- комбинированные маршруты, на которых разрешено выгружать и погрузить грузы в местах дислокации клиентов;
- маршруты с отдельной (расщепленной) доставкой, сборкой, комбинированные.

Для управления нестационарными процессами обработки и распределения мелкопартионных потоков в сети предложена концепция построения многоуровневой информационно-аналитической системы поддержки принятия решений (ИАС ППР), основанная на комплексном решении задач текущего планирования, оперативного управления и перспективного развития.

Целью создания ИАС ППР является повышение эффективности функционирования транспортных сетей за счет снижения дефицитных материальных, сырьевых, энергетических, финансовых и трудовых ресурсов на основе методологии математического моделирования процессов обработки и распределения дискретных потоков и комплекса мер информационно-аналитического обеспечения и автоматизации процедур принятия решений в управлении потоками.

ИАС ППР представляет собой информационно-картографическую систему на базе инфраструктуры пространственных данных (ИПД), геоинформационного портала (ГИС) и распределенной вычислительной сети, которая функционирует в масштабе реального времени и позволяет эффективно управлять нелинейными и нестационарными процессами обработки и распределения потоков на всех уровнях сети.

Общая схема информационно-аналитической системы поддержки принятия решений



Общие задачи

Контроль исходных данных

Редукция полной сети к магистральной

Анализ и прогнозирование

Информационно-логические задачи

Задачи текущего планирования

Построение маршрутов транспортных средств во внутренней сети магистрального узла

Распределение потоков из узлов 2 и 3 типа в зональных сетях

Упаковка мелкопартионных корреспонденций в транспортные блоки и выбор структуры магистральной сети

Распределение потоков порожних контейнеров (для транспортных сетей)

Распределение и маршрутизация потоков транспортных блоков



Детерминированные и стохастические задачи перспективного развития

Поэтапное развитие узлов и транспортных маршрутов магистральной сети при заданных величинах инвестиций по этапам развития и при их ограниченном объеме на конечный период планирования с оценкой риска вложения инвестиций

Задачи оперативного управления

Анализ очередей в узлах и загрузки транспортных линий связи и выработка управляющих решений

Корректировка схем сортировки потоков мелкопартионных корреспонденций в узлах и схемы транспортировки транспортных блоков при возникновении перегрузок, отказов и т.п.

Оперативный учет и планирование парка транспортных средств для устойчивого управления процессами обработки и транспортировки потоков мелкопартионных корреспонденций и транспортных блоков

Математическая модель физической сети задана связным графом

$$\hat{G}(\hat{N}, \hat{P}) \quad \text{с множеством узлов} \quad \hat{N} = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4, \quad \hat{n} = |\hat{N}|$$

и множеством дуг \hat{P} , $\hat{p} = |\hat{P}|$.

Длины дуг заданы матрицей $\hat{R} = \left\| \hat{r}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}}$, $\hat{r}_{ij} \in R^1$.

Потоки корреспонденций заданы целочисленной матрицей $\hat{A} = \left\| \hat{a}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}}$

Определена магистральная сеть $G(N, P)$, $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, $n = |N|$, $p = |P|$

и внутриузловые сети $\tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k)$, $\tilde{N}_k = \{N_0^k, N_4^k\}$, $N_0^k \in N$, $|N_0^k| = 1$, $N_4^k \subseteq N_4$,

$$n_k = |\tilde{N}_k| = 1 + |N_4^k|, \quad p_k = |\tilde{P}_k|, \quad k = \overline{1, n}, \quad \bigcap_{k=1}^n \tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k) = \emptyset.$$

Для полной сети имеется процедура редукции $\phi: \hat{G}(\hat{N}, \hat{P}) \Rightarrow G(N, P) + \bigcup_{k=1}^n \tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k)$

$$\hat{A} = \left\| \hat{a}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}} \Rightarrow A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}, \quad \tilde{A}_k = \left\| \tilde{a}_{ij}^k \right\|_{n_k \times n_k}, \quad \hat{R} = \left\| \hat{r}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}} \Rightarrow R = \left\| r_{ij} \right\|_{n \times n}, \quad \tilde{R}_k = \left\| \tilde{r}_{ij}^k \right\|_{n_k \times n_k}^{k=1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Значения a_{ij} , $i = \overline{1, n}$ определяют внутриузловые объемы на обработку потоков в магистральной сети.

Задача оптимизации структуры иерархической коммуникационной сети

Требуется определить количественный и качественный состав узлов сети и схему сортировки потоков корреспонденций в каждом узле, при которых максимально снижаются приведенные затраты на функционирование сети. Формально, необходимо для всех возможных комбинаций типов узлов решить задачу (1)-(4). Имеется матрица целочисленных переменных $X = \parallel x_{ij} \parallel_{n \times n}$, начальные значения которой совпадают со значениями матрицы A . Требуется найти минимум функции

$$\sum_{ij \in S} C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i=1}^n C_{sort}^i(x_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{load}^i(u_i), \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \leq h_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{ij}, u_{ij} \geq 0 \text{ и целые } \quad \forall ij \in S. \quad (4)$$

Дополнительные ограничения:

$$t_{ij} \leq T_{ij}, \quad v_{ij} \leq v_{\max}, \quad \forall ij \in S.$$

Где $u_{ij} = \left\lceil \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rceil$, $x_i = a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) + \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$, $q_i = q_{in}^i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ если } x_{ij} \neq 0, \quad \delta_{ij} = 0, \text{ если } x_{ij} = 0, \quad u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji}), \quad i = \overline{1, n}.$$

d_{ij} - длина пути из i в j

S – множество пар индексов (i, j) корреспонденций, определенное на декартовом произведении $n \times n$; $x_{ij} = a_{ij} + \sum_{rs} a_{rs}^*$, если корреспонденция a_{ij} не объединялась ни с какой другой, где $\{a_{rs}^*\}$ – множество корреспонденций, объединенных с корреспонденцией a_{ij} , $x_{ij} = 0$, если корреспонденция a_{ij} объединялась с какой-либо другой или $i = j$; $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$ – нелинейная функция транспортных затрат, зависящая от количества транспортных блоков u_{ij} и длины d_{ij} пути их транспортировки между узлами i и j ; $C_{sort}^i(x_i, q_i)$ – нелинейная функция затрат от суммарного объема $x_i = a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) + \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ и количества направлений сортировки $q_i = q_{in}^i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$ корреспонденций, обрабатываемых в узле i ($\delta_{ij} = 1$, если $x_{ij} \neq 0$, и $\delta_{ij} = 0$, если $x_{ij} = 0$, а q_{in}^i определяет заданное количество направлений сортировки для обработки корреспонденций a_{ii} , $i = \overline{1, n}$); $C_{load}^i(u_i)$ – нелинейная функция затрат от суммарного количества транспортных блоков $u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji})$, обрабатываемых в узле i ; h_i , $i = \overline{1, n}$, – максимальная пропускная способность i -го узла по обработке транзитных корреспонденций. Пропускная способность задается для транзитных потоков, так как исходящие и входящие потоки для каждого узла должны быть обработаны без ограничений. Для узлов второго и третьего типа $h_i = 0$.

При решении задачи также учитываются ограничения на время доставки $t_{ij} \leq T_{ij} \quad \forall ij \in S$ и число транзитных объединений $\nu_{ij} \leq \nu_{\max} \quad \forall ij \in S$ корреспонденций при их транспортировке из узлов отправления в узлы назначения, где T_{ij} и ν_{\max} — соответственно заданное время доставки корреспонденций получателю и максимально допустимое число их транзитных объединений. При расчете времени доставки используются параметры, явно не входящие в модель: заданное время на сортировку корреспонденций (T_a) и время на транзитную перегрузку транспортных блоков в узлах сети (T_b), средняя скорость движения транспортных средств или передачи сообщений (V_{av}) и др. (разд. 3).

Первая составляющая функции (1) определяет транспортные затраты, вторая — затраты на сортировку, а третья — затраты на обработку транспортных блоков. Выражения (2) и (3) представляют условия баланса и ограничения на пропускные способности узлов.

В [6] предложены различные алгоритмы решения задачи (1)-(3), которые основаны на дискретном аналоге метода локального спуска, когда окрестности метрического пространства допустимых решений выбираются из эвристических соображений с учетом особенностей решаемой задачи, а также проведено экспериментальное сравнение их вычислительной эффективности. Решение может выполняться в двух режимах: при экспертном задании и автоматическом выборе типов и зон обслуживания узлов. При экспертном задании структура сети определяется проектировщиками на основании опыта, практических знаний и данных в базе знаний ИАС. В любом случае итеративно будет решаться задача (1)-(3) для различных составов типов узлов до тех пор, пока не будет найдена структура, при которой достигается минимум суммарных приведенных затрат на ее функционирование — минимум целевой функции (1). При решении задачи (1)-(3) на каждой итерации алгоритма сначала нужно распределять исходящие потоки из узлов второго и третьего типа в зональных сетях в соответствии с принципами сортировки. В [7] показано, что такая задача может быть сведена к задаче линейного программирования без учета ограничений на пропускные способности дуг и для ее решения могут быть использованы известные методы. После распределения потоков из узлов второго и третьего типа соответственно преобразовывается матрица потоков A , а в узлах первого типа, находящихся на границе зон обслуживания этих узлов появляются транзитные потоки. Поэтому в процессе решения задачи правые части ограничений (3) для некоторых узлов первого типа будут автоматически увеличены на величину таких транзитных потоков.

Общая схема метода решения задачи включает следующие шаги:

- 1) Начальная структура сети определяется диспетчерами и администраторами на основании опыта, практических знаний и данных в базе знаний, формируется множество $N_{\text{канд}}$ кандидатов (претендентов) в $N_2 \cup N_3$. Всем узлам из $N_{\text{канд}}$ присваивается статус узлов третьего типа;
- 2) Начальные суммарные потоки $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ в узлах сети упорядочиваются по неубыванию их величины. Формируется соответствующий список номеров узлов, причем в начале списка находятся только узлы из множества $N_{\text{канд}}$. Далее, после последнего узла из $N_{\text{канд}}$, следуют узлы первого типа. К множеству узлов из $N_{\text{канд}}$ может быть добавлено указанное число узлов первого типа, расположенных после последнего узла из $N_{\text{канд}}$ и также являющихся потенциальными кандидатами в $N_2 \cup N_3$;
- 3) Алгоритм последовательно, с накоплением, выбирает из списка узлы, включает их во множество $N_2 \cup N_3$ и решает задачу (1)-(4). В процессе решения задачи и исчерпаниии списка кандидатов в $N_{\text{канд}}$, определяется структура сети с минимальным значением функции цели (1). Если по каким-либо причинам множество $N_{\text{канд}}$ не было указано, то алгоритм должен сам упорядочить все узлы сети в списке по неубыванию их суммарных потоков, запросить верхнюю границу числа узлов из множества $N_{\text{канд}}$ и перейти в режим оптимизации.

В процессе решения задачи упаковки сначала распределяются потоки из узлов второго и третьего типа в соответствии с принципами организации сортировки в этих узлах. Для решения такой задачи предложен подход, основанный на преобразовании исходной сети к некоторому специальному виду с меньшим числом дуг. На преобразованной сети формулируется задача целочисленного линейного программирования с блочно-диагональной структурой ограничений и связывающими ограничениями на пропускные способности узлов.

Для точного решения задачи используется метод декомпозиции Данцига-Вулфа, а для приближенного - разработанные автором алгоритмы, основанные на методах построения кратчайших путей.

Помимо структуры сети, основными результатами решения задачи являются потоковые матрицы $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$ и $U = \|u_{ij}\|_{n \times n}$ корреспонденций и транспортных блоков; матрица предварительных оценок времени доставки корреспонденций получателям; справочная матрица объединения потоков корреспонденций. Эти результаты используются как входные данные для решения задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков [8, 9]. Справочная матрица объединения потоков полностью определяет схему сортировки корреспонденций во всех узлах сети и адресует потоки транспортных блоков, которые будут распределены по маршрутам транспортных средств или каналам связи. В узлах реальной транспортной сети или сети передачи данных справочная матрица используется для автоматизированного управления оборудованием, предназначенным для сортировки адресных грузов, или как таблица слияния сообщений в виртуальные контейнеры.

В [10, 11] показано, что при решении задачи выбора структуры сети нелинейная дискретная функция $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$ может быть заменена на функцию удельной стоимости транспортировки потока величиной u_{ij} на расстояние d_{ij} от w_ξ — грузоподъемности транспортного средства или пропускной способности канала связи, измеряемой в транспортных блоках. Например, можно считать, что $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) = u_{ij}(k_1^\xi + k_2^\xi d_{ij}) / w_\xi$ $\forall ij \in S$, где k_1^ξ, k_2^ξ — заданные коэффициенты, $w_\xi \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$, $\xi = \overline{1, \alpha}$, — упорядоченные по возрастанию целые числа, определяющие набор возможных значений грузоподъемности транспортных средств или пропускной способности каналов связи. При этом структура сети не зависит от выбора значения w_ξ , а транспортные затраты рассчитываются только ориентировочно (при заданном значении w_ξ) при распределении сформированных потоков транспортных блоков по кратчайшим путям по лексикографическому критерию: минимум дуг в пути, минимум длины пути [12]. Затраты на обработку транспортных блоков и время доставки корреспонденций получателю также рассчитываются предварительно. Реальные оценки этих затрат и фактическое время доставки могут быть получены только после решения задачи распределения и маршрутизации сформированных транспортных блоков на транспортной сети или сети передачи данных [8, 9].

3. Компьютерная программа оптимизации структуры сети и результаты численного эксперимента

По существу, моделирование иерархической структуры коммуникационной сети представляет собой компьютерную технологию, состоящую из сценариев действий проектировщика и программной системы при выборе структуры, входных данных и параметров проектируемой сети. В ИАС сценарии реализованы в виде многооконного и многослойного графического интерфейса, позволяющего в картографическом виде просматривать структуру сети и ее отдельные фрагменты; исходящие и входящие потоки в узлах сети; значения всех заданных ограничений и параметров оптимизации; результаты оптимизации для различных вариантов решения задачи и пр. Проектировщик в режиме диалога может изменять значения исходных данных и параметров задачи, получать множество решений и выбирать наиболее подходящее. При этом он всегда может сравнить варианты решения по технико-экономическим показателям функционирования сети в зависимости от выбранных параметров и критериев предпочтения. Для экспериментального исследования решения задачи выбора структуры сети и схемы сортировки потоков, а также для обучения диспетчеров работе с программой разработана ее демонстрационная версия [13, 14]. Такая программа включена в состав ИАС и может работать в автономном режиме, когда все необходимые входные данные генерируются датчиком псевдослучайных чисел.

На рис. 3 показана главная форма программы, в которую вводятся входные данные.

Program of optimization of structure of a network and scheme of sorting of flows

To output the protocol of work of the program?
 To enter nodes of 3 types?

Optimize a structure of network?
 To use functions of expenses?

Enter basic data of a network

<input type="text" value="100"/>	Number of nodes in a network	<input type="text" value="1,9,0"/>	Scale of change of value of flows for nodes of 1 type
<input type="text" value="2"/>	Number of outgoing of arcs from each node of a network	<input type="text" value="1,5,0"/>	Scale of change of value of flows for nodes of 3 type
<input type="text" value="80,300"/>	Scale of change of lengths of arcs of a network in km through a comma, for example - 80,300		
<input type="text" value="8000,8000"/>	Scale of change of restrictions on capacities of nodes through a comma, for example - 500,500		
<input type="text" value="99,99"/>	Scale of change of restrictions on time-delivery through a comma, for example - 10,10		
<input type="text" value="40"/>	Capacity of the transport block (virtual container)	<input type="text" value="20.0"/>	Cost of the transport block (virtual container)
<input type="text" value="40"/>	Maximum a loading capacity of the vehicle or a communication channel capacity	<input type="text" value="80.0"/>	Average speed of vehicles in km/h or of transfer on a communication channel-25000 of km/s
<input type="text" value="1.0"/>	Given time of processing of initial flows in network node	<input type="text" value="0.5"/>	A time on a transit overload of transport blocks in network node
<input type="text" value="1.0"/>	Coefficient of forecasting of flows	<input type="text" value="20"/>	Maximum number of merges of flows
<input type="text" value="2"/>	Mode of a conclusion of messages and data of program (1,2,3)		

Демонстрационные программы решения задач оптимизации упаковок и распределения потоков

- [PFC WA.exe](#) - задача оптимизации упаковок
- [MTP WA.exe](#) - задача распределения потоков

Программы составлены на языке *Digital Visual Fortran (DVF)* компании *Digital Equipment Corporation* в среде *Microsoft (MS) Developer Visual Studio (VS) DVF 6.1*.

Сущность процесса преобразования исходных потоков

При решении оптимизационной задачи упаковки над потоками a_{ij} итеративно выполняются следующие преобразования:

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= a_{ik} + a_{ij}, \\ a'_{kj} &= a_{kj} + a_{ij}, \\ y^k_{ij} &= a_{ij}, \\ c_{ij} &= k, a_{ij} = 0. \end{aligned} \quad y^k_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если поток } a_{ij} \text{ сортируется в узле } k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Где k - узел, через который выполняется преобразование; c_{ij} - элементы справочной матрицы сортировки (слияния) потоков $C = \| c_{ij} \|_{n \times n}$, которые определяются так:

$$c_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если поток } a_{ij} \text{ сливается с потоком } a_{ik}, \\ i, & \text{если поток } a_{ij} \text{ непосредственно направляет ся в узел } j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (2)$$

На различных шагах работы алгоритма оптимизации необходимо определять последовательность $\Omega_{ij} = \{(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_m, j)\}$ с промежуточными узлами $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, в которых выполняется дополнительная обработка каждого из потоков a_{ij} и их общее число $v_{ij} = |\{k_1, k_2, \dots, k_m\}|$.

Кроме того, при выборе очередного потока a_{ij} для преобразования (1) может потребоваться нахождение множества других потоков $\{a_{ij}^*\}$, которые уже объединились с потоком a_{ij} на предыдущих итерациях. Элементы матрицы A' определяются следующим образом:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + \{a_{ij}^*\}, & \text{если потоки } \{a_{ij}^*\} \text{ объединены с потоком } a_{ij}, \\ 0, & \text{если поток } a_{ij} \text{ объединен с другим потоком или } i = j. \end{cases}$$

Пример преобразования потока

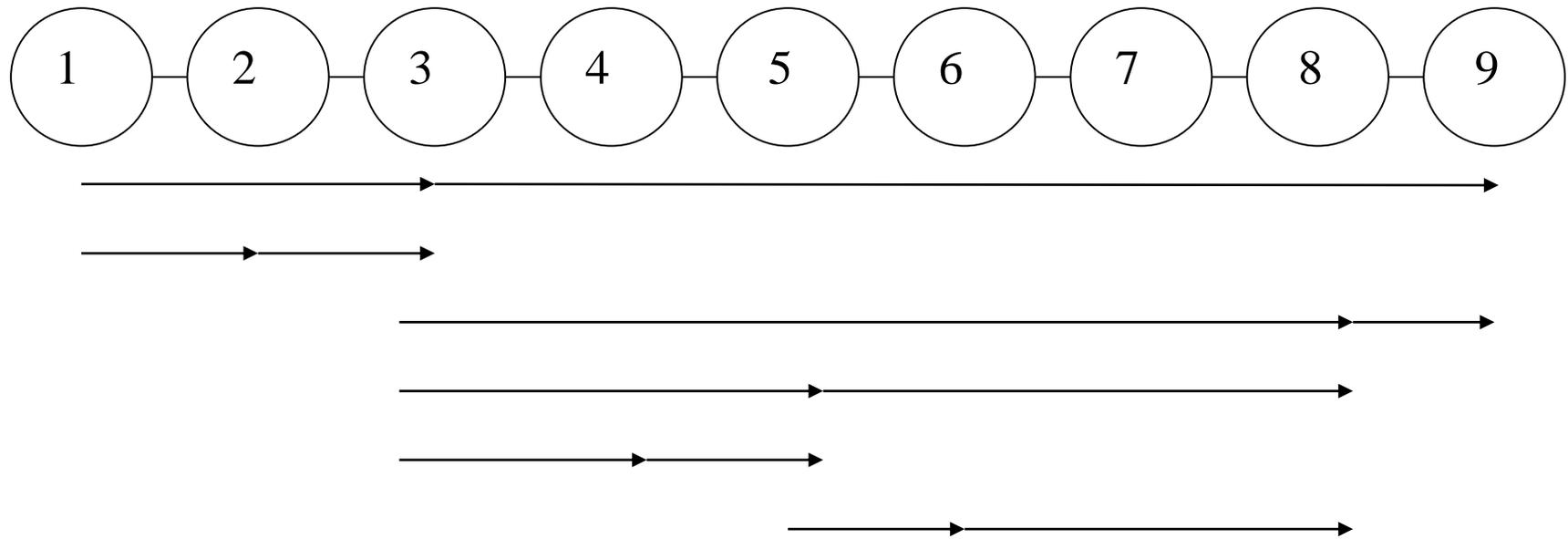


Рис. 1. Пример преобразования потока (1, 9). Поток дополнительно сортируется в узлах: 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Особенностью задачи оптимизации упаковки являются ограничения $t_{ij} \leq T_{ij}$ на время доставки мелкопартионных корреспонденций конечным получателям и ограничения $V_{ij} \leq V_{\max}$ на максимально допустимое число объединений корреспонденций с другими корреспонденциями. При решении задачи упаковки рассчитываются только предварительные значения t_{ij} , так как до решения задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков неизвестны фактические пути следования мелкопартионных корреспонденций от отправителей к получателям.

Предположим, что известна справочная матрица путей транспортировки потоков транспортных блоков $C^* = \|c_{ij}^*\|_{n \times n}$, полученная при построении кратчайших путей в сети G по ступенчатому критерию — минимум транзитных узлов на пути следования потока, минимум длины пути []. Элементы матрица C^* определяются так:

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ k, & \text{если } u_{ij} \text{ следует в узел } j \text{ с перегрузкой в узле } k, \\ i, & \text{если } u_{ij} \text{ следует в узел } j \text{ без перегрузки.} \end{cases}$$

Отметим, что кратчайшие пути, построенные от узла i , представляют собой дерево с корнем в i , которое может быть однозначно описано строкой справочной матрицы C^* , а k является предпоследним узлом на кратчайшем пути от i до j . Поэтому с помощью этой матрицы легко определить число транзитных узлов на пути следования любого потока. Известна также матрица длин построенных путей $D = \|d_{ij}\|_{n \times n}$. Матрицы C^* и D используются при расчете значений функции транспортных затрат $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$. Пусть t_a — заданное время на сортировку мелкопартионных корреспонденций в узле, t_b — среднее время на транзитную перегрузку или перекоммутацию транспортных блоков, V_{av} — средняя скорость движения транспортных средств (км/час) или скорость распространения сигнала по каналам связи (км/с). Требуется рассчитать значения t_{ij} . Для предварительной оценки времени доставки достаточно использовать справочную матрицу объединения корреспонденций $C = \|c_{ij}\|_{n \times n}$ и матрицы C^* и D . Приведем формулу для расчета $t_{ij} \forall ij \in S, i \neq j$:

$$t_{ij} = \begin{cases} 2t_a + d_{ij} / (V_{av}\theta) + \psi_{ij}t_b, & \text{если } c_{ij} = i, \\ t_a(v_{ij} + 2) + \sum_{\xi\eta \in \Omega_{ij}} (d_{\xi\eta} / (V_{av}\theta) + \psi_{\xi\eta}t_b), & \text{если } c_{ij} \neq i, \end{cases}$$

где $\psi_{\xi\eta}$ — число транзитных перегрузок u_{ij} на участке (ξ, η) ; θ — коэффициент нормирования времени (для транспортных сетей $\theta = 24$ часа, для сетей передачи данных $\theta = 1$).

Основные результаты

Т е о р е м а 1. Для любого $a_{ij} \in \{a_{ij} \mid c_{ij} \neq i \ \& \ c_{ij} \neq 0\}$ построение матрицы C в соответствии с (1) позволяет найти последовательность Ω_{ij} и установить число дополнительных обработок потока a_{ij} .

Покажем, что определение Ω_{ij} сводится к построению и последующему прохождению в глубину бинарного дерева с корнем в вершине (i,j) . Для этого рассмотрим пример. Пусть поток $(1,9)$ был подвергнут преобразованиям так, как показано на рис.1. Тогда элементы матрицы C , отражающие это преобразование будут следующими :

$$c_{19} = 3, c_{13} = 2, c_{12} = 1, c_{23} = 2,$$

$$c_{39} = 8, c_{89} = 8, c_{38} = 5, c_{35} = 4,$$

$$c_{34} = 3, c_{45} = 4, c_{58} = 6, c_{56} = 5, c_{68} = 6.$$

Зная эти элементы, легко построить дерево с корнем в $(1,9)$, описывающее преобразование потока $(1,9)$ (рис.2). При построении дерева сначала строятся левые поддеревья до тех пор, пока не будет найден элемент $c_{ij} = i$, затем происходит возврат на уровень выше и строятся правые поддеревья. Для любого корня правого поддерева процесс построения поддеревьев может быть продолжен, если для этого корня соответствующий $c_{ij} \neq i$.

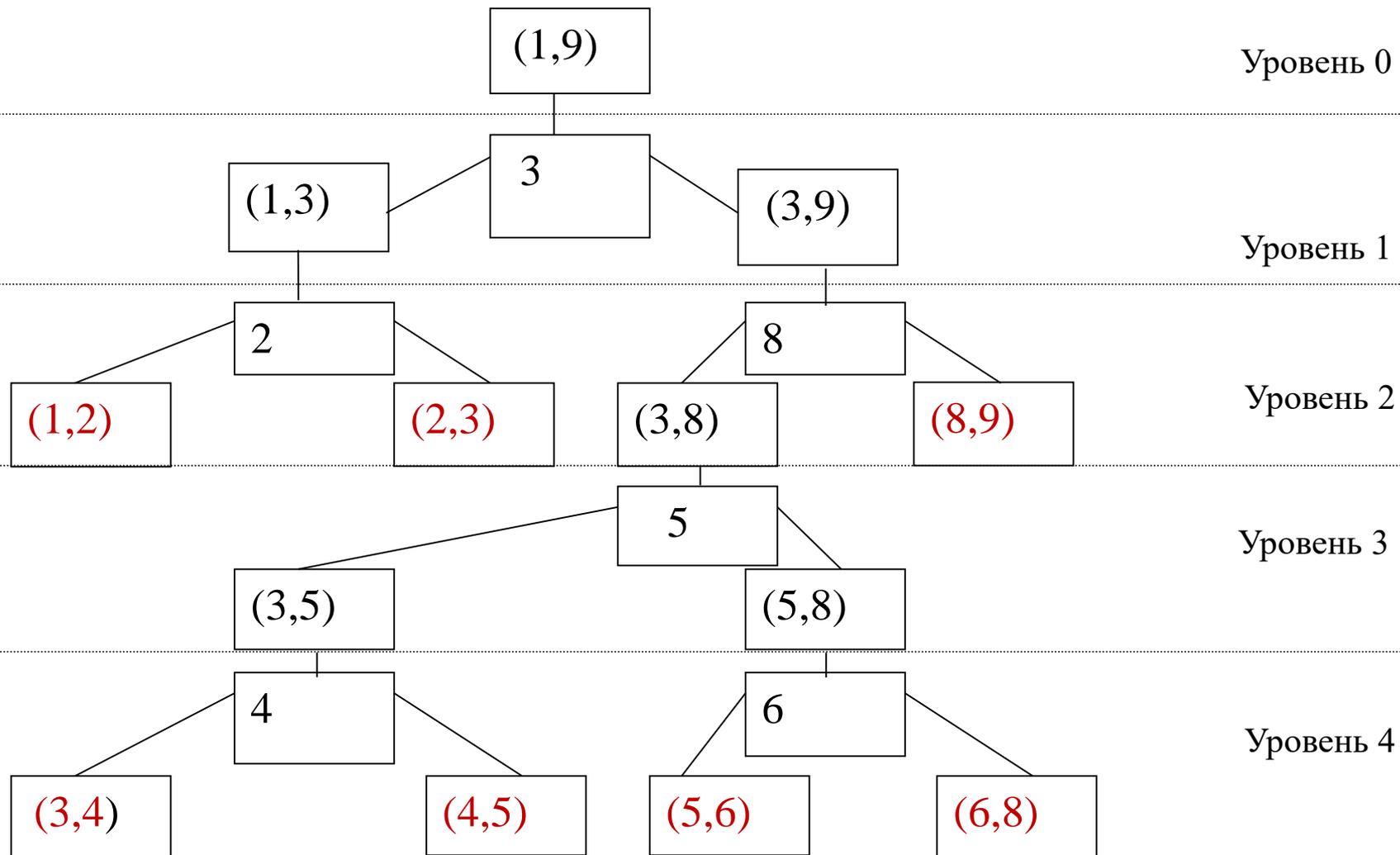


Рис. 2. Дерево преобразования потока (1, 9). Поток дополнительно сортируется в узлах: 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Л е м м а. Листья бинарного дерева, построенного прохождением в глубину с использованием элементов матрицы C , порождают последовательность Ω_{ij} при их просмотре слева направо.

Доказательство леммы следует из правил построения бинарного дерева и того факта, что для каждого листа дерева соответствующий $c_{ij} = i$. Последовательность листьев $c_{i,k_1}, c_{k_1,k_2}, c_{k_{m-1},k_m}, c_{k_m,j}$ дает искомую последовательность $\Omega_{ij} = (\{i,k_1\}, \{k_1,k_2\}, \dots, \{k_m,j\})$. Для примера на рис. 1 такая последовательность будет следующей:

$$\Omega_{19} = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,8), (8,9)\}.$$

Утверждение леммы позволяет построить эффективный алгоритм построения и прохождения бинарного дерева, в котором поддеревья генерируются в порядке их просмотра (Приложение 1. Алгоритм Д1).

При работе со справочной матрицей слияния потоков в основном алгоритме оптимизации при выборе очередного потока a_{ij} для преобразования (1) может потребоваться нахождение множества других потоков $\{a^*_{ij}\}$, которые уже были слиты с потоком a_{ij} на предыдущих итерациях, так как преобразование a_{ij} приводит к увеличению времени доставки потока адресату не только для a_{ij} , но и для множества $\{a^*_{ij}\}$. Оказывается, что для определения множества $\{a^*_{ij}\}$ для любого a_{ij} , достаточно воспользоваться справочной матрицей C , формируемой согласно (2).

Т е о р е м а 2. Для любого потока a_{ij} , над которым выполняется преобразование (1), множество $\{a_{ij}^*\}$ может быть определено из справочной матрицы C . Задача определения $\{a_{ij}^*\}$ эквивалентна построению некоторого дерева поиска и прохождению его снизу вверх.

Любой поток может быть представлен в дереве поиска самым нижним подкорнем с двумя листьями: левым – (i,k) и правым – (k,j) , где k узел, через который выполняется преобразование потока a_{ij} . Из построения C ясно, что для первых потоков, охватывающих a_{ij} , будут выполняться условия:

$$c_{\xi j} = i, \xi = 1, n, \quad (3)$$

$$c_{i\xi} = j, \xi = 1, n, \quad (4)$$

причем (3) означает охват слева, а (4) - охват справа. Для дерева поиска выполнение (3) означает, что для a_{ij} найден левый подкорень, находящийся на уровень выше, а выполнение (4), - что найден правый верхний подкорень. Поскольку в (3) и (4) $\xi = 1, n$, то может найтись несколько левых и правых подкорней, находящихся на одном уровне дерева. Это говорит о том, что строимое дерево не является бинарным. Для каждого вновь полученного подкорня процесс построения новых подкорней продолжается до тех пор, пока будут выполняться условия (3) или (4). Число дополнительных обработок, определяющее время t_{ij} доставки любого потока, представленного подкорнем в дереве поиска, может быть получено с использованием процедуры построения и прохождения бинарного дерева в глубину.

Таким образом, как только найден очередной подкорень (k,l) , для него необходимо построить бинарное дерево, определяющее последовательность Ω_{kl} , исходя из которой для соответствующего потока a_{kl} может быть рассчитано время доставки.

На основании доказанных утверждений построен рекурсивный алгоритм, осуществляющий построение дерева исчерпывающего поиска для определения множества $\{a^*_{ij}\}$ (Приложение 1. Алгоритм Д2). В алгоритме на всех уровнях рекурсии и для каждого вновь найденного подкорня выполняется исчерпывающий поиск новых подкорней, для которых справедливо (3) или (4). Это означает, что для любого потока a_{ij} алгоритм корректно строит множество потоков $\{a^*_{ij}\}$, которые были слиты с потоком a_{ij} на предыдущих итерациях основного алгоритма оптимизации.

На рис. 3 показан пример дерева поиска для определения потоков, охватывающих поток a_{58} , который преобразовывается через узел 6. Как видно из рисунка, для подкорня $(5,8)$ найдены подкорни: $(3,8)$, $(3,9)$, $(1,9)$. Соответствующие им последовательности Ω_{38} , Ω_{39} , Ω_{19} строятся прохождением бинарного дерева в глубину:

$$\Omega_{38} = \{(3,4), (4,5), (5,6), (6,8)\}, \quad \Omega_{39} = \{\Omega_{38}, (8,9)\}, \quad \Omega_{19} = \{(1,2), (2,3), \Omega_{39}\}.$$

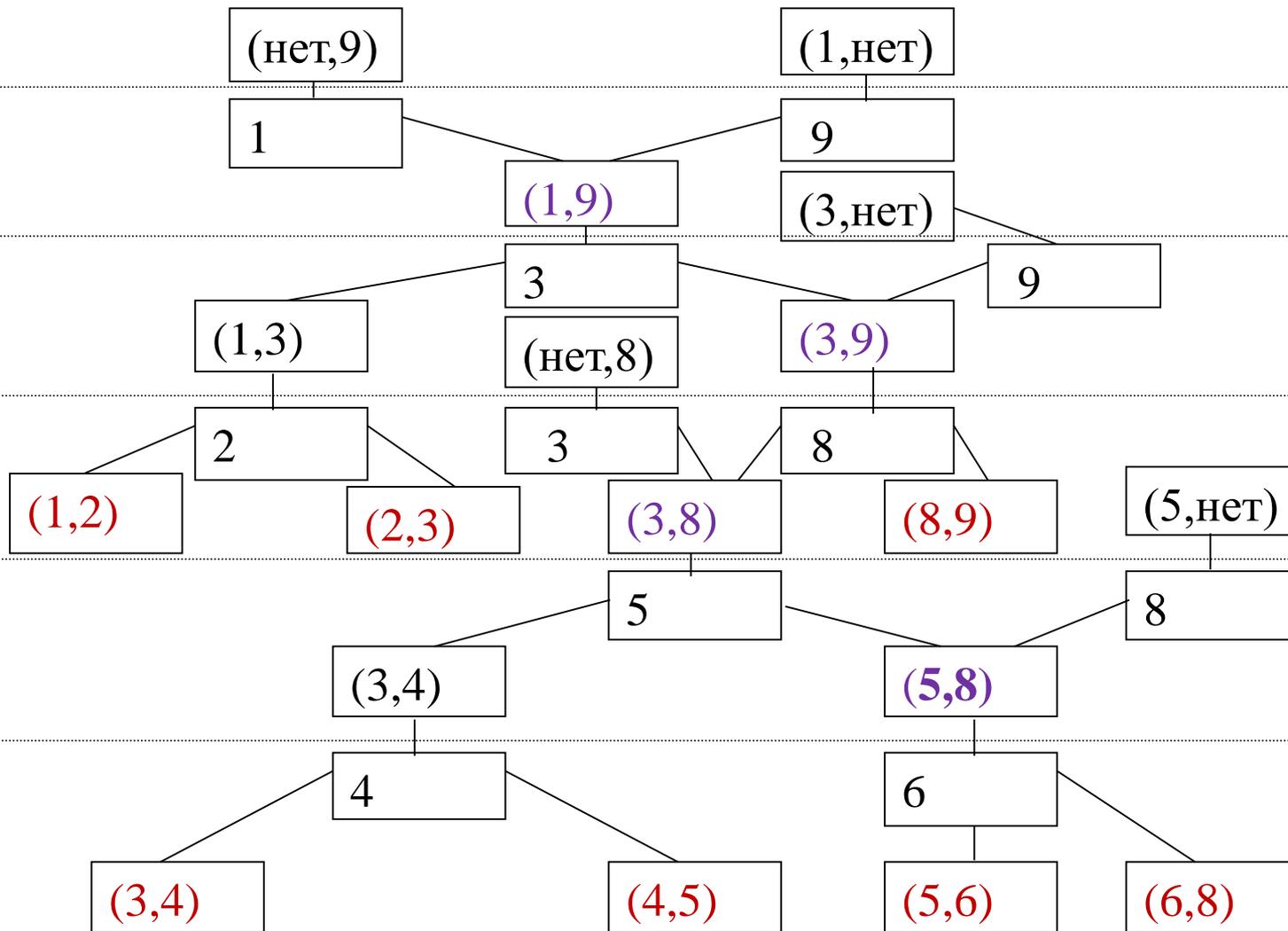


Рис. 3. Дерево поиска потоков, слитых с потоком (5, 8), который преобразовывается через узел 6.

Задача распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков

Задано: $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$, $A' = \| a'_{ij} \|_{n \times n}$, $\tilde{A} = \| \tilde{a}_{ij} \|_{n \times n}$, $\tilde{a}_{ij} = \left\lceil \frac{a'_{ij}}{\omega} \right\rceil$, $\{m_k\}$, $k = \overline{1, l}$.

Построим $G(N, P) \Rightarrow G_M(N, P_M)$ транзитивным замыканием узлов всех маршрутов из $\{m_k\}$.

На сети $G_M(N, P_M)$ требуется минимизировать функцию:

$$\sum_{k=1}^l C_{tr}^k \left(\left(\sum_{\eta^\xi \in q_k} \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta^\xi} \right), d_k \right) + \sum_{\beta=1}^n C_{load}^\beta \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \right) \quad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\beta\alpha} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} & \text{при } i = \alpha, \\ 0 & \text{при } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ -\tilde{a}_{ij} & \text{при } j = \alpha, \text{ для } \alpha = \overline{1, n}, ij \in S; \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) - \sum_{j=1}^n (\tilde{a}_{\beta j} + \tilde{a}_{j\beta}) \leq 2b_\beta, \quad \beta = \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta^\xi} \leq W_{\eta^\xi}^k \text{ для всех } \eta^\xi \in q_k, k = \overline{1, l}; \quad (4)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \leq b_\alpha^k, \quad \alpha \in v_k, k = \overline{1, l}; \quad (5)$$

$$t_{av} = 1/\tilde{a}_\Sigma \sum_{k=1}^l \sum_{\eta^\xi \in q_k} f_{\eta^\xi}^k / (W_{\eta^\xi}^k - f_{\eta^\xi}^k) \leq T_{\max}, \text{ где } \tilde{a}_\Sigma = \sum_{ij \in S} \tilde{a}_{ij}, f_{\eta^\xi}^k = \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta^\xi}; \quad (6)$$

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} \geq 0, u_{ij,k}^{\eta^\xi} \geq 0 - \text{целые числа.} \quad (7)$$

Предполагается, что имеется оператор $\Phi : u_{ij,k}^{\alpha\beta} \Rightarrow \{u_{ij,k}^{\eta\xi}\}$, $p_{\alpha\beta} \in P_M$, $p_{\eta\xi} \in P$, $ij \in S$, $k = \overline{1, l}$, отображающий поток по маршрутной дуге маршрута m_k в сети G_M на соответствующее подмножество дуг маршрута m_k в сети G и учитываются ограничения $t_{ij} \leq T_{ij}$, $ij \in S$.

К задаче могут быть добавлены ограничения на запрет разветвления потоков:

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij}, & \text{если поток проходит по дуге } \alpha\beta \in m_k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Задача (1)-(8) относится к классу многоэкстремальных дискретных задач и является NP-трудной. В связи со сложностью сформулированной задачи предложен метод сведения ее решения к последовательному решению некоторой совокупности линейных многомерных задач о ранце со связывающими ограничениями. Идея преобразования задачи основана на том, что уменьшение значения целевой функции (1) можно достичь при максимальном увеличении значений $u_{ij,k}^{\eta\xi}$ на всех дугах (участках) $\eta\xi$ маршрутов $\{m_k\}$ при распределении всех потоков в сети G_M по критерию: минимум транзитных перегрузок, при равенстве числа транзитных перегрузок — минимум длины пути. В результате получим некоторый аналог двойственной задачи к задаче (1)-(8) при исключении из явного рассмотрения нелинейных функций затрат C_{tr}^k и C_{load}^β

Преобразованная задача имеет вид:

Для решения преобразованной задачи разработаны алгоритмы, существенно использующие специфику структуры задачи, абстрактные типы данных и приемы, характерные для эвристических алгоритмов решения многомерной задачи о ранце [1, 2]. В преобразованной задаче требуется минимизировать количество наиболее «дешевых» загруженных маршрутов из множества $\{m_k\}$ при максимальной загрузке дуг (участков) этих маршрутов. Под «дешевыми» маршрутами понимаются такие маршруты, у которых самые низкие приведенные затраты на транспортировку потоков. Для транспортных сетей характерна зависимость функций затрат от рабочего парка и грузоподъемности транспортных средств на маршруте, а для сетей передачи данных — от пропускной способности и длины каналов связи. Поэтому для реальных сетей приведенные затраты будут одинаковыми как для максимально загруженного маршрута, так и слабо загруженного или вообще не загруженного. При решении задачи верхняя граница количества маршрутов во множестве $\{m_k\}$ не фиксируется — после решения задачи она может оказаться больше заданной, в случае, если в процессе решения будет разрешено вводить новые маршруты при невозможности распределения всех потоков.

1. *Васянин В.А.* Задача распределения и маршрутизации транспортных блоков со смешанными вложениями и ее декомпозиция // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 1. — С. 144-156.
2. *Васянин В.А., Ушакова Л.П.* Структуры данных и процедуры редукции маршрутов в задачах распределения потоков в коммуникационных сетях // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць. — Київ, 2014. — Вип. 14. — С. 192-205.

Program of optimization of distribution and routing of flows

- To output the protocol of work of the program? The reduction of routes is necessary?
- To design a new routes?

Enter basic data and parameters

- The maximum number of new routes entered at the solution of a problem
- Scale of change of a loading capacity of vehicles or capacity of a communication
- The lower bound of restrictions on an exchange of transport blocks in nodes of routes
- Scale of change of restrictions on a capacity of nodes
- Mode of a conclusion of messages and data of program (1,2,3)
- Mode of weakening of restrictions of a task (1,2,3)

To start the program

Exit

Help

Демонстрационные программы решения задач оптимизации упаковок и распределения потоков

- [PFC WA.exe](#) - задача оптимизации упаковок
- [MTP WA.exe](#) - задача распределения потоков

Программы составлены на языке *Digital Visual Fortran (DVF)* компании *Digital Equipment Corporation* в среде *Microsoft (MS) Developer Visual Studio (VS) DVF 6.1*.

Задача распределения и маршрутизации потоков с заданными тарифами в узлах и на дугах

Как правило в математических моделях, описывающих процессы обработки и транспортировки многопродуктовых потоков затраты связываются с величиной потока по дугам сети или путям передачи потока. Для сетей передачи данных, где дуги ассоциируются с каналами связи, такие постановки оказываются достаточно приемлемыми. В случае же транспортных сетей очень трудно адекватно определить функции транспортных затрат, а значит, и получить в результате решения задачи достоверный ответ. В математической модели задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков, приведенной в предыдущем подразделе, объемы и пути распределения потоков связываются с множеством искомых «оптимальных» маршрутов транспортных средств или каналов связи. Такая постановка задачи характерна при проектировании новой или реконструкции существующей сети перевозок или сети передачи данных. В этом случае для каждого определенного в результате решения маршрута легко рассчитать требуемые затраты (например, среднегодовые приведенные затраты) и получить более достоверную оценку транспортных затрат для всей сети. Если транспортные услуги предоставляются сторонними транспортными предприятиями (компаниями) или провайдерами сети передачи данных, то задача распределения потоков упрощается, так как в качестве функций транспортных затрат можно использовать тарифы на перевозку или передачу одного транспортного блока от отправителя к получателю.

Вернемся к постановке задачи маршрутизации. Предположим, что услуги по транспортировке транспортных блоков из узлов i в узлы j оказывают Q транспортных предприятий. Без потери общности предположим, что все транспортные предприятия могут оказывать услуги по транспортировке потоков между всеми парами узлов в сети. Пусть $G(N, P)$ — мультисеть с $|N| = n$ узлами и $|P| = l$, $l \leq Q(n^2 - n)$ ориентированными дугами. Для всех Q предприятий, занумерованных индексом $k = 1, 2, \dots, Q$ заданы тарифы $C_{tr,k}^{\alpha\beta}$ на транспортировку единицы потока и ограничения $W_{\alpha\beta}^k$ на провозные возможности из узла α в узел β , $\alpha, \beta = \overline{1, n}$, $\alpha \neq \beta$. Для узлов сети заданы тарифы C_{load}^{α} на обработку единицы потока и ограничения b_{α} на величину транзитного потока в узле α , $\alpha = \overline{1, n}$. Транспортные тарифы $C_{tr,k}^{\alpha\beta}$ и тарифы на обработку транспортных блоков в узлах сети C_{load}^{α} должны быть приведены к одной шкале и определять, например, среднегодовые приведенные затраты. Кроме того, заданы ограничения на время доставки получателю отдельных грузов из i в j , $ij \in S$, где S — множество индексов ij корреспондирующих потоков.

Пусть $u_{ij,k}^{\alpha\beta}$ — неизвестный поток транспортных блоков из i в j , проходящий по дуге $\alpha\beta \in \{q_k\}$, где $\{q_k\}$ — множество дуг k -го предприятия, $|\{q_k\}| \leq n^2 - n$. Требуется минимизировать затраты на транспортировку и обработку транспортных блоков при всех заданных ограничениях, т.е. найти минимум функции

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\alpha\beta \in \{q_k\}} C_{tr,k}^{\alpha\beta} \cdot \left(\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^n C_{load}^{\alpha} \cdot \left(\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \right) \quad (3)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n u_{ij,k}^{\beta\alpha} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} & \text{при } i = \alpha, \\ 0 & \text{при } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ -\tilde{a}_{ij} & \text{при } j = \alpha, \text{ для } \alpha = \overline{1, n}, ij \in S, \end{cases} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq \alpha}}^n (\tilde{a}_{\alpha j} + \tilde{a}_{j\alpha}) \leq 2b_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} \leq W_{\alpha\beta}^k \quad \forall \alpha\beta \in \{q_k\}, k = \overline{1, Q}, \quad (6)$$

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} \geq 0 - \text{целые числа}, \quad (7)$$

и ограничениях $t_{ij} \leq T_{ij}$, $ij \in S$ на время доставки отдельных грузов a_{ij} получателю. В конкретных случаях решения задачи к указанным ограничениям могут быть добавлены ограничения на запрет разветвления потоков:

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij}, & \text{если поток проходит по дуге } \alpha\beta \in \{q_k\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Задача (3)-(7) максимально содержит до $n(n^2 - n) + n + Q(n^2 - n) + Q(n^2 - n)^2 = Q(n^2 - n)[(n^2 - n) + 1] + n(n^2 - n) + n$ ограничений (4) + (5) + (6) + (7) и до $Q(n^2 - n)^2$ переменных. Нетрудно видеть, что ограничения (4) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq \alpha}}^n \tilde{a}_{\alpha m} = \sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\beta\alpha} - \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq \alpha}}^n \tilde{a}_{m\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n},$$

а для ограничений (5) упростить за-

пись: $\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq \alpha}}^n \tilde{a}_{\alpha m} \leq b_{\alpha}$, $\alpha = \overline{1, n}$. Тогда максимальное количество ограничений зада-

чи сократится до $Q(n^2 - n)[(n^2 - n) + 1] + 2n$.

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ С ТАРИФАМИ К ЗАДАЧЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Преобразуем (по Карпу [22]) задачу с тарифами (3)-(7) в целочисленную задачу линейного программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями, когда в качестве матрицы коэффициентов ограничений выступает матрица инцидентности узлы-дуги ориентированного графа. Для этого рассмотрим расширенную сеть $\tilde{G}(\tilde{N}, \tilde{P})$, в которой каждый узел сети G заменен двумя — левым и правым, причем каждая пара узлов «левый - правый» в сети \tilde{G} имеет номера i и $i+n$, где i — номер узла в сети G (рис. 1). Все дуги, входящие в узел сети G , заменяются на дуги, входящие в левый узел сети \tilde{G} ; дуги, выходящие из узла сети G , заменяются на дуги, выходящие из правого узла сети \tilde{G} .

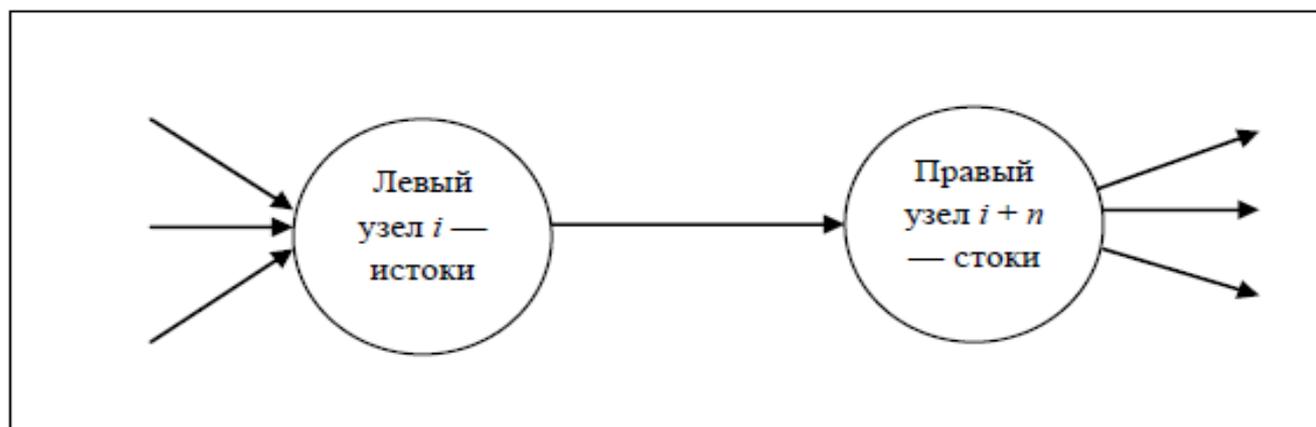


Рис. 1. Фрагмент расширенной сети \tilde{G}

Каждый левый и правый узлы сети \tilde{G} соединяются фиктивной дугой, стоимость транспортировки единицы потока по которой является стоимостью обработки единицы потока в расщепленном узле. На сети \tilde{G} источниками потоков выступают левые узлы, а в качестве стоков — правые. Пусть $\tilde{n} = n + n$ — число узлов расширенной сети, $\tilde{l} \leq Q(n^2 - n) + n$ — число ее дуг.

Для формулировки задачи определим следующие матрицы и векторы. Построим матрицу инцидентности $E = \| e_{ij} \|_{\tilde{i} \times \tilde{j}}$ узлы-дуги для расширенной сети так, чтобы первые n ее строк соответствовали номерам узлов источников (левым узлам), а первые n столбцов — фиктивным дугам. Остальные n строк в матрице E соответствуют узлам стокам (правым узлам), а $\tilde{l} - n$ столбцов — заданным дугам. Матрица E имеет вид, показанный на рис. 2.

Дуги		1	n	$n+1$...	\tilde{l}
Узлы источники	1	-1	0	...	0	{1,0}	...	{1,0}
	...	0	-1	...	0	{1,0}	...	{1,0}
	...	0	...	-1	0	{1,0}	...	{1,0}
	n	0	...	0	-1	{1,0}	...	{1,0}
Узлы стоки	$n+1$	1	0	...	0	{-1,0}	...	{-1,0}
	...	0	1	...	0	{-1,0}	...	{-1,0}
	...	0	...	1	0	{-1,0}	...	{-1,0}
	$2n$	0	...	0	1	{-1,0}	...	{-1,0}

Рис. 2. Структура матрицы инцидентности

В каждом столбце матрицы есть только два ненулевых элемента с противоположными знаками, а фигурные скобки означают, что элемент матрицы может принимать только одно из двух значений. Эту матрицу будем использовать для записи условий сохранения потоков в узлах

сети. Элементы матрицы $e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } j \text{ направлена к узлу } i, \\ -1, & \text{если дуга } j \text{ направлена от узла } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Пусть $V^i = \left\| v_{\xi}^i \right\|_{\bar{n}}^T$ — векторы-столбцы $v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i$ потребностей узлов в потоках \tilde{a}_{ij} , $j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, которые выходят из узлов $i = \overline{1, n}$, где знак « T » означает транспонирование, а

$$v_{\xi}^i = \begin{cases} -\sum_{m=1}^n \tilde{a}_{im}, & \text{если } \xi = i, \\ \tilde{a}_{ij}, & \text{если } \xi = j + n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \\ i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, \xi = \overline{1, \tilde{n}}. \end{cases}$$

Введем переменные $X^i = \left\| x_{\mu}^i \right\|_i^T$ — векторы-столбцы неизвестных потоков $x_1^i, x_2^i, \dots, x_l^i$ по дугам сети $\mu = \overline{1, \tilde{l}}$ от исходящих потоков из узлов i , $i = \overline{1, n}$. Тогда условия сохранения потоков для всех потоков, исходящих из узла i запишутся в виде

$$E[\tilde{n}, \tilde{l}]X^i[\tilde{l}] = V^i[\tilde{n}], \quad i = \overline{1, n}.$$

Для записи ограничений на пропускные способности узлов и дуг сети определим векторы-столбцы $B = \| b_i \|_l^T$ и $F = \| f_i \|_l^T$, где b_i и f_i , $i = \overline{1, \tilde{l}}$ — суть целые неотрицательные числа. В векторе B в первых n элементах сохраняются значения ограничений на обработку транзитных потоков в узлах сети, а в остальных $\tilde{l} - n$ элементах записываются значения ограничений на провозные возможности транспортных предприятий. Вектор F формируется следующим образом: $F = (\sum_{j=1}^n (\tilde{a}_{1j} + \tilde{a}_{j1}), \dots, \sum_{j=1}^n (\tilde{a}_{nj} + \tilde{a}_{jn}), 0, \dots, 0)^T$ и содержит n первых ненулевых значений и $\tilde{l} - n$ нулей с позиции $n + 1$.

Пусть $C^i = \| c_j^i \|_j$, $i = \overline{1, n}$ — векторы-строки, в которых первые n элементов c_1^i, \dots, c_n^i определяют тарифы на обработку единицы потока в узлах сети с номерами $1, \dots, n$, а остальные элементы $c_{n+1}^i, \dots, c_{\tilde{l}}^i$ определяют тарифы на транспортировку единицы потока по дугам с номерами от $n + 1$ до \tilde{l} . Не теряя общности рассуждений, предположим, что тарифы на транспортировку одного транспортного блока не зависят от источника потока (все потоки однородны, т.е. все транспортные блоки имеют одинаковый размер) и для транспортного предприятия k , $k = \overline{1, Q}$ определяются только узлом отправления i и узлом назначения j . Примем $C^i = C$, $i = \overline{1, n}$ и сформируем только одну вектор-строку тарифов. Тарифы на обработку одного транспортного блока не связаны с транспортными предприятиями и могут отличаться для разных типов узлов сети.

Окончательно сформулированная задача примет вид: найти

$$\min C[\tilde{l}] \cdot \sum_{i=1}^n X^i[\tilde{l}], \quad (9)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n X^i[\tilde{l}] - F[\tilde{l}] \leq B[\tilde{l}], \quad (10)$$

$$E[\tilde{n}, \tilde{l}] X^i[\tilde{l}] = V^i[\tilde{n}], \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

$$X^i[\tilde{l}] \geq 0, i = \overline{1, n} \text{ и целые,} \quad (12)$$

и дополнительных ограничениях на время доставки корреспонденций потребителям (8).

Ограничение на запрет разветвления потоков запишем в виде

$$x_{\mu}^i = \sum_{j=\overline{1, n}} \tilde{a}_{ij}, \text{ если } \tilde{a}_{ij} \text{ проходит по дуге } \mu, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu = \overline{1, \tilde{l}}.$$

Задача (9)-(12) содержит $2n+1$ векторных ограничений и до $(Q(n^2 - n) + n) \cdot n$ переменных и по сравнению с задачей (3)-(7) максимально содержит до $n + Q(n^2 - n) + n(n + Q(n^2 - n)) + n(n + Q(n^2 - n)) = Q(n^2 - n)(2n + 1) + 2n^2 + n \ll Q(n^2 - n)[(n^2 - n) + 1] + 2n$ не векторных ограничений (10) + (11) + (12). Так, например, при $Q=10$ и $n=100$ в задаче (3)-(7) может быть до 980100000 ($\sim 10 \times 10^9$) переменных и до 980199200 ($\sim 1 \times 10^9$) ограничений, а в задаче (9)-(12) — до 9910000 ($\sim 10 \times 10^6$) переменных и до 19919100 ($\sim 20 \times 10^6$) ограничений.

Известно, что обе задачи (3)-(7) и (9)-(12) являются NP-трудными, поскольку их соответствующие задачи распознавания являются NP-полными [21, 22]. Покажем, что любая индивидуальная задача распознавания (3)-(7) (т.е. задача с ответом "да" или "нет") может быть преобразована в индивидуальную задачу распознавания (9)-(12) за полиномиальное время. Для этого приведем один из возможных способов формирования по входным данным задачи (3)-(7) матрицы инцидентности $E[\tilde{n}, \tilde{l}]$, векторов сохранения потоков $V^i[\tilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$, вектора тарифов C и векторов $F[\tilde{l}]$ и $B[\tilde{l}]$ для задачи (9)-(12).

Пусть $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$ и трехмерная $D = \| d_{ijk} \|_{n \times n \times Q}$ — целочисленные матрицы потоков и тарифов Q предприятий. Подматрица $D = \| d_{ijk} \|_{n \times n \times 1}$ на главной диагонали содержит тарифы на обработку единицы потока в соответствующем узле, главные диагонали подматриц для $k = 2, 3, \dots, Q$ содержат нули. Все остальные элементы d_{ijk} матрицы D содержат тарифы на транспортировку единицы потока из i в j предприятия k , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, $k = \overline{1, Q}$. Если предприятие k не оказывает услуги по транспортировке из i в j , то $d_{ijk} = 0$, а соответствующая дуга из i в j для предприятия k отсутствует. Задана также трехмерная целочисленная матрица $W = \| w_{ijk} \|_{n \times n \times Q}$ провозных возможностей Q предприятий в тех же единицах измерения потока — транспортных блоках. Подматрица $W = \| w_{ijk} \|_{n \times n \times 1}$ на главной диагонали содержит заданные значения ограничений на пропускные способности узлов по обработке транзитных потоков, главные диагонали подматриц для $k = 2, 3, \dots, Q$ содержат нули. Другие элементы w_{ijk} матрицы W содержат заданные значения ограничений на провозные возможности предприятий из i в j , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, $k = \overline{1, Q}$. Все ненулевые и нулевые элементы матрицы W строго соответствуют ненулевым и нулевым элементам матрицы D и наоборот.

Приведем алгоритм формирования входных данных для индивидуальной задачи (9)-(12).

Алгоритм 1. Преобразование задачи и формирование $E[\tilde{n}, \tilde{l}]$, $V^i[\tilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$, C , $F[\tilde{l}]$, $B[\tilde{l}]$

1. $E \leftarrow 0$; $V \leftarrow 0$; $F \leftarrow 0$; $l \leftarrow 0$.
2. Для $\{ i \mid i = \overline{1, n} \}$ выполнить пп. 3-17.
3. $s \leftarrow 0$.
4. Для $\{ j \mid j = \overline{1, n} \}$ выполнить пп. 5-16.
5. $f_i \leftarrow f_i + a_{ij} + a_{ji}$.
6. Если $i \neq j$, то перейти к п. 7, иначе перейти к п. 12.
7. $v_{j+n, i} \leftarrow a_{ij}$.
8. Для $\{ k \mid k = \overline{1, Q} \}$ выполнить пп. 9-11.
9. Если $d_{jik} \neq 0$, то перейти к п. 10, иначе перейти к п. 11.
10. $l \leftarrow l + 1$; $e_{i, n+l} \leftarrow 1$; $e_{j+n, n+l} \leftarrow -1$; $c_{n+l} \leftarrow d_{jik}$; $b_{n+l} \leftarrow w_{jik}$.
11. Перейти к п. 8. Конец цикла по k
12. Для $\{ m \mid m = \overline{1, n} \}$ выполнить пп. 13-14.
13. $s \leftarrow s + a_{im}$.
14. Перейти к п. 12. Конец цикла по m
15. $v_{i, j} \leftarrow -s$; $e_{i, j} \leftarrow -1$; $e_{i+n, j} \leftarrow 1$; $c_i \leftarrow d_{ij1}$; $b_i \leftarrow w_{ij1}$.
16. Перейти к п. 4. Конец цикла по j
17. Перейти к п. 2. Конец цикла по i
18. Конец алгоритма.

В записи алгоритма векторы $V^i[\tilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$ представлены матрицей $V = \| v_{ij} \|_{n \times n}$.

Из алгоритма видно, что временная сложность преобразования любой индивидуальной задачи (3)-(7) в индивидуальную задачу (9)-(12) составляет в худшем случае $O[n((n-1)Q+n)] = O[(Q+1)n^2 - Qn]$.

Сформулируем основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Любая индивидуальная задача (3)-(7) может быть преобразована в индивидуальную задачу целочисленного линейного программирования (9)-(12) за полиномиальное время $O[(Q+1)n^2 - Qn]$.

Доказательство. Анализ шагов 2 - 17 алгоритма 1 делает прозрачным доказательство теоремы, поскольку он корректно преобразует входные данные любого экземпляра задачи (3)-(7) во входные данные задачи (9)-(12), а именно корректно формирует $E[\tilde{n}, \tilde{l}]$, $V^i[\tilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$, C , $F[\tilde{l}]$, $B[\tilde{l}]$ из матриц A , D и W , которые полностью определяют сетевые потоки и структуру ориентированной мультисети $G(N, P)$ с $|N| = n$ узлами и $|P| = l \leq Q(n^2 - n)$ дугами.

Следствие 3.1. Если существует допустимое (не обязательно оптимальное) решение исходной задачи (3)-(7), то оно совпадает с решением преобразованной задачи (9)-(12).

ВЫВОДЫ

В докладе рассмотрена задача маршрутизации потоков сборных грузов в многопродуктовой транспортной сети с заданными тарифами, ограничениями на пропускную способность дуг, узлов и время доставки отдельных грузов. Доказана теорема о том, что любая индивидуальная задача в сетевой постановке может быть за полиномиальное время преобразована в индивидуальную задачу целочисленного линейного программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями, когда в качестве матрицы коэффициентов выступает матрица инцидентности узлы-дуги ориентированного графа. Векторно-матричная запись задачи позволяет использовать программно-аппаратную архитектуру CUDA (Compute Unified Device Architecture) параллельных вычислений на графических процессорах GPU (Graphics Processing Unit) и значительно (в перспективе в десятки и сотни раз) сократить время ее решения [23, 24]. Для решения преобразованной задачи без учета ограничений на время доставки отдельных грузов получателю возможно применение известных методов и пакетов программ, однако для установления пределов их эффективности и анализа получаемых решений необходимо проведение вычислительного эксперимента на общедоступных серверах, таких как NEOS с языками алгебраического моделирования AIMMS, AMPL, GAMS и решателями Gurobi, Linear Program Solver, Simplex OPTIMA, CPLEX, MINTO и т.д.

При решении задачи с учетом ограничений на время доставки отдельных грузов получателю существующие методы и пакеты программ не могут быть непосредственно применены — необходимо проведение дополнительных исследований по возможной их модификации и доработке на основе предложенного способа построения справочной матрицы объединения потоков и эффективных алгоритмов, позволяющие определять узлы объединения и объединенные потоки для всех корреспондирующих пар узлов в многопродуктовой сети.

ПРИЛОЖЕНИЕ.АЛГОРИТМЫ Д1 И Д2 ДЛЯ РАБОТЫ СО СПРАВОЧНОЙ МАТРИЦЕЙ

Подходы, использованные при доказательстве теоремы 1 и леммы 1, позволяют разработать эффективный алгоритм построения и прохождения бинарного дерева, в котором поддеревья генерируются в порядке их просмотра. Пусть $St(\xi)$ – стек, обслуживаемый по правилу «последний пришел – первый вышел», где ξ – указатель текущего размещения стека; $F(m)$ — вектор, в котором формируется последовательность узлов $\{i, k_1, k_2, \dots, k_m, j\}$; « \wedge » – знак конъюнкции (логического «и»); « \vee » – знак дизъюнкции (логического «или»).

Алгоритм Д1. Построение и прохождение бинарного дерева

1. $m \leftarrow 1$; $F(m) \leftarrow i$. 2. $\xi \leftarrow 1$; $St(\xi) \leftarrow j$. 3. $k \leftarrow i$; $l \leftarrow j$.
4. Если $c_{kl} \neq k \wedge ((a_{kl} \neq 0 \wedge \xi = 1) \vee a_{kl} = 0)$, то выполнить пп. 5-7, иначе перейти к п. 8.
5. $\xi \leftarrow \xi + 1$. 6. $St(\xi) \leftarrow c_{kl}$. 7. $l \leftarrow c_{kl}$; перейти к п. 4.
8. $m \leftarrow m + 1$. 9. $F(m) \leftarrow l$. 10. Если $\xi > 1$, то перейти к п. 11, иначе к п. 14.
11. $k \leftarrow St(\xi)$. 12. $l \leftarrow St(\xi - 1)$. 13. $\xi \leftarrow \xi - 1$; перейти к п. 4.
14. $v_{ij} \leftarrow m - 2$. 15. Стоп.

В пункте 4 алгоритма дополнительное условие $((a_{kl} \neq 0 \wedge \xi = 1) \vee a_{kl} = 0)$ введено для ограничения роста бинарного дерева в случае, если для вновь найденного подкорня (k, l) $a_{kl} \neq 0$. После работы алгоритма значение v_{ij} равно числу транзитных узлов от i до j , в которых выполняется дополнительная обработка потока a_{ij} .

Приведем рекурсивную процедуру построения дерева исчерпывающего поиска для определения множества $\{a_{ij}^*\}$.

Алгоритм Д2. Построение дерева исчерпывающего поиска

1. ВХОД (i, j) рекурсивный.
2. $k \leftarrow i; l \leftarrow j$.
3. Для $\{ \xi \mid \xi = \overline{1, n} \}$ выполнить пп. 4-14.
4. Если $c_{\xi l} = k \wedge a_{\xi l} = 0$, то перейти к п.5, иначе к п. 9.
5. $\{a_{ij}^*\} \leftarrow \{a_{ij}^*\} \cup a_{\xi l}$. Используя алгоритм 1 определить $\Omega_{\xi l}$ и $\nu_{\xi l}$.
6. Вычислить $t_{\xi l}$.
7. Если $(t_{\xi l} > T_{\xi l} \vee \nu_{\xi l} > \nu_g)$, то $\eta \leftarrow \eta + 1$.
8. Вызвать ВХОД (ξ, l) .
9. Если $c_{k\xi} = l \wedge a_{k\xi} = 0$, то перейти к п. 10, иначе к п. 14.
10. $\{a_{ij}^*\} \leftarrow \{a_{ij}^*\} \cup a_{k\xi}$. Используя алгоритм 1 определить $\Omega_{k\xi}$ и $\nu_{k\xi}$.
11. Вычислить $t_{k\xi}$.
12. Если $(t_{k\xi} > T_{k\xi} \vee \nu_{k\xi} > \nu_g)$, то $\eta \leftarrow \eta + 1$.
13. Вызвать ВХОД (k, ξ) .
14. Перейти к п. 3.
15. ВЫХОД.

В пунктах 4 и 9 введены дополнительные условия $a_{\xi l} = 0$ и $a_{k\xi} = 0$ для случая, когда в матрице C есть элементы $c_{ij} = k$, $k \neq j$, а соответствующие им потоки $a_{ij} \neq 0$, что может привести к закливанию алгоритма. В приведенном алгоритме: k, l, ξ — рекурсивные переменные, для которых генерируются поколения данных при каждом новом вхождении в процедуру; « \cup » — знак объединения множеств; t_{ij} — расчетное время доставки потоков адресату; v_{ij} — определяет число промежуточных узлов, в которых выполняется дополнительная обработка соответствующего потока; v_{\max} — допустимое число дополнительных обработок; η — признак нарушения ограничений на заданное время доставки T_{ij} или число дополнительных обработок потока v_{\max} . Значение η показывает число таких нарушений.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Васянин В.А. Методология проектирования многопродуктовых коммуникационных сетей с дискретными потоками: дис. ... докт. техн. наук. 01.05.02. Киев, 2017. 497 с. URL: https://itgip.org/wp-content/uploads/2017/03/dis_Vas.pdf.
2. The freight story: A national perspective on enhancing freight transportation. Federal Highway Administration. 2005. Freight Management and Operations. URL: http://ops.fhwa.dot.gov/freight/freight_analysis/freight_story/.
3. US international trade and freight transportation trends. United States Department of Transportation: Bureau of Transportation Statistics. 2003. URL: <http://www.bts.gov>.
4. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. Integer multicommodity flow problems. In: Network Optimization. Pardalos P.M., Hearn D.W., Hager W.W. (Eds.). *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. 1997. Vol. 450. P. 17–31. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59179-2_2.
5. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. *Operations Research*. 2000. Vol. 48, N 2. P. 318–326. <https://doi.org/10.1287/opre.48.2.318.12378>.
6. Encyclopedia of optimization. Second Ed. Floudas C.A., Pardalos P.M. (Eds.). New York: Springer, 2009. 4626 p.
7. Wang I-L. Multicommodity network flows: a survey, part I: applications and formulations. *International Journal of Operations Research*. 2018. Vol. 15, N 4. P. 145–153. [https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15\(4\).0001](https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0001).
8. Wang I-L. Multicommodity network flows: a survey, part II: solution methods. *International Journal of Operations Research*. 2018. Vol. 15, N 4. P. 155–173. [https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15\(4\).0002](https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0002).
9. Cohn A., Root S., Wang A., Mohr D. Integration of the load matching and routing problem with equipment balancing for small package carriers. *Transportation Science*. 2007. Vol. 41, Iss. 2. P. 238–252. <https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0174>.
10. Hellsten E., Koza D.F., Contreras I., Cordeau J.F., Pisinger D. The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem. *Computers & Operations Research*. 2021. Vol. 136. 105511. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105511>.

11. Trivella A., Corman F., Koza D.F., Pisinger D. The multi-commodity network flow problem with soft transit time constraints: Application to liner shipping. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2021. Vol. 150. 102342. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102342>.
12. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A. Simulation of packing, distribution and routing of small-size discrete flows in a multicommodity network. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 7. P. 15–30. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30>.
13. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Optimization algorithms for packing of small-lot correspondence in communication networks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 2. P. 258–268. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9822-5>.
14. Трофимчук А.Н., Васянин В.А. Компьютерное моделирование иерархической структуры коммуникационной сети с дискретными многопродуктовыми потоками. *УСУМ*. 2016. № 2. С. 48–57. <https://doi.org/10.15407/usim.2016.02.048>.
15. Трофимчук А.Н., Васянин В.А., Ушакова Л.П. Исследование задачи оптимизации иерархической структуры разреженной и плотной коммуникационной сети. *Проблемы управления и информатики*. 2021. № 1. С. 5–21.
16. Vasyanin V.A. Problem of distribution and routing of transport blocks with mixed attachments and its decomposition. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 2. P. 56–69. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i2.60>.
17. Васянин В.А. Компьютерное моделирование распределения и маршрутизации дискретных многопродуктовых потоков в коммуникационной сети. *УСУМ*. 2016. № 3. С. 43–53. <https://doi.org/10.15407/usim.2016.03.043>.
18. Васянин В.А., Трофимчук А.Н., Ушакова Л.П. Экономико-математические модели задачи распределения потоков в многопродуктовой коммуникационной сети. *Математичне моделювання в економіці*. 2016. № 2. С. 5–21. URL: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/131848>.
19. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Complexity of one packing optimization problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 1. P. 76–84. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9802-9>.
20. Васянин В.А. Справочная матрица слияния потоков в задачах оптимизации упаковок на многопродуктовых сетях. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2014. № 3. С. 42–49. URL: <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/85552/05-Vasyanin.pdf?sequence=1>.

21. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982. 416 с.
22. Even S., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM J. Comput.* 1976. Vol. 5, Iss. 4. P. 691–703. <https://doi.org/10.1137/0205048>.
23. NVIDIA Developer. URL: <https://developer.nvidia.com/cuda-zone>.
24. Best Practices Guide (PDF) — v11.6.2 (older) — Last updated March 24, 2022. URL: https://docs.nvidia.com/cuda/pdf/CUDA_C_Best_Practices_Guide.pdf.

V.A. Vasyanin, O.M. Trofymchuk, L.P. Ushakova

THE PROBLEM OF GROUPAGE CARGO ROUTING IN A MULTICOMMODITY TRANSPORT NETWORK WITH GIVEN TARIFFS AND RESTRICTIONS ON THE DELIVERY TIME

Abstract. The paper considers a network formulation of the problem of optimizing the routing of groupage cargo flows in a transport network with given tariffs for the transportation and processing of flows and restrictions on the throughput of arcs, nodes and the delivery time of individual goods to the recipient. To calculate the delivery time, a method is proposed for generating a reference matrix for combining the flows of individual cargoes and efficient algorithms that allow one to determine the nodes of the union and the combined flows for all corresponding pairs in a multi-commodity network. It is proved that the problem with tariffs in a network setting can be transformed in polynomial time to an integer linear programming problem with a block structure and binding constraints. Peculiarities of solving the transformed problem with the use of well-known methods of integer programming and application software packages are noted.

Keywords: mathematical models of flow distribution and routing in multicommodity networks, optimization problems with discrete flows and parameters.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ