Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Кашпур Олена Федорівна

УДК 517.988

ДИСЕРТАЦІЯ

Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

О. Ф. Кашпур

Київ–2023

АНОТАЦІЯ

Кашпур О. Ф. Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи (11 – Математика та статистика). – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ, 2023.

Дисертація присвячена дослідженню та розв'язанню операторних інтерполяційних задач типу Лагранжа, Ерміта, Ерміта-Біркхофа, одержанню оцінок точності інтерполяційних формул у випадку збуреної вихідної інформації про оператор, що апроксимуємо, та дослідженню збіжності інтерполяційних процесів у гільбертовому просторі з мірою, розв'язанню інтерполяційних задач в умовах недовизначеності в скінченновимірному евклідовому просторі, знаходженню умов існування єдиного розв'язку та інваріантної розв'язуваності задачі інтерполяції.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел та додатків.

У першому розділі розглянуто постановки задач інтерполяції операторів та проведено аналіз літературних джерел за темою дисертаційних досліджень.

У другому розділі для інтерполяційної задачі Лагранжа в абстрактному гільбертовому просторі показано, що в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора, але лінійний інтерполяційний процес є збіжним. Доведено, що в сепарабельному гільбертовому просторі з гаусовою мірою похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною. У випадку, коли вузли інтерполя-

ції обрано певним чином доведено, що інтерполяційний процес є збіжним. У гільбертовому просторі з мірою розглянуто інтерполяційні формули Лагранжа для нелінійного оператора та показано, що інтерполянти є асимптотично інваріантними щодо поліномів відповідного степеня. Ці формули є набагато простішими за конструкцією побудови. Знайдено оцінки точності інтерполяції поліноміального та цілого операторів у випадку збуреної вихідної інформації та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якої не покращує точності інтерполяційних формул. Аналогічні теореми доведено для поліноміальних та цілих функціоналів, що визначені на просторах $L_2(0,1)$ та $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ у разі наближеного обчислення скалярних добутків, що присутні в інтерполяційних формулах. Знайдено умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі Лагранжа в скінченновимірному евклідовому просторі в умовах недовизначеності, тобто коли недостатньо вихідної інформації про оператор для побудови єдиного інтерполяційного поліному. При цьому показано, що розв'язок задачі є єдиним та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів при фіксованих інтерполяційних умовах. У лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі досліджена точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Показано, що ця інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

У третьому розділі в лінійному топологічному просторі для оператора однієї змінної знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду. Наведено узагальнення інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних в сенсі визначення умов, за яких має місце континуальність відповідної множини вузлів. Розглянуто приклади таких інтерполянтів.

У четвертому розділі у гільбертовому просторі з мірою побудовано інтерполяційний поліном типу Ерміта у випадку, коли задані значення оператора та його перші диференціали Гато у вузлах, що обрані певним чином. Доведено, що інтерполянт має мінімальну норму на множині інтерполянтів типу Ерміта з фіксованими інтерполяційними умовами та асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня. Для поліноміального оператора побудовано інтерполяційні формули типу Ерміта, Ерміта-Біркхофа та наведено інтерполянт Абеля-Гончарова, які є асимптотично інваріантними щодо поліномів відповідного степеня. Наявність оцінок точності дозволяє застосовувати такі інтерполянти для наближення поліноміальних, цілих та диференційованих операторів. Узагальнено теорему про інтерполянт мінімальної норми на випадок, коли задані диференціали Гато до певного порядку у вузлах інтерполяції. Розглянуто питання про точність та збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора. Показано, що інтерполянти Ерміта для нелінійного оператора асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня.

Розглянуто інтерполяційні задачі Ерміта в скінченновимірному евклідовому просторі у випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато до першого та до другого порядків відповідно у вузлах інтерполяції. Показано, що ці задачі мають єдиний розв'язок мінімальної норми. Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку цих задач в умовах недовизначеності, тобто коли вихідної інформації недостатньо, щоб однозначно побудувати інтерполяційний поліном. У нормованому нескінченновимірному лінійному та в скінченновимірному евклідовому просторах показано, що інтерполяційний поліном Ерміта мінімальної норми містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтерполяційних формул Ерміта на поліномах відповідного степеня. Доведені теореми проілюстровано прикладами. В гільбертовому просторі з мірою доведено теорему про інтерполяційний поліном мінімальної норми типу Ерміта-Біркхофа.

У п'ятому розділі знайдено нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь (еквівалентні теоремі Кронекера-Капеллі) та нерівностей (еквівалентні теоремі С.М.Чернікова), пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах. Знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь. Розглянуто приклади розв'язання задач із застосуванням одержаних результатів.

Ключові слова: нелінійний оператор, поліноміальний оператор, цілий оператор, гільбертовий простір, скінченновимірний евклідів простір, операторна інтерполяція, інтерполяційний поліном Лагранжа, інтерполяційний поліном Ерміта, інтерполяційний поліном Ерміта-Біркхофа, диференціал Гато, мінімальна норма, точність, збіжність інтерполяційного процесу.

ABSTRACT

Kashpur O. F. Interpolation of operators in Hilbert and Euclidean spaces. – Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the speciality 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computational Methods (11 – Mathematics and Statistics). – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis focuses on the solution of Lagrange, Hermite, and Hermite-Birkhoff operator interpolation problems in Hilbert and finite-dimensional Euclidean spaces, and aims to study the interpolation convergence, obtain the accuracy estimation of interpolation formulas when initial information is disturbed, and outline the conditions for the solvability of the interpolation problem in case of under determinacy.

The thesis includes the introduction, five chapters, a list of references, and appendices.

The first chapter reveals the statements of operator interpolation problems and the analysis of the relevant scholarly papers.

The second chapter shows that in general, the interpolation does not converge to the polynomial operator for the Lagrange interpolation problem in the abstract Hilbert space, however, the linear interpolation is convergent. It is proved that in a separable Hilbert space with a Gaussian measure, the interpolation error can be made arbitrarily small. The research ascertains that the interpolation stays convergent when there is a certain choice of interpolation nodes. The paper investigates Lagrange interpolation formulas for a nonlinear operator in a

Hilbert space with a measure and shows that interpolants asymptotically retain polynomials of the corresponding degree. These formulas are much simpler in design and are asymptotically invariant for polynomials of the corresponding degree. The availability of estimation accuracy enables such interpolants to be used for approximating polynomial and integer operators. The study reveals the interpolation accuracy estimation of polynomial and integer operators when initial information is disturbed. Also, the number of interpolation nodes is obtained and shown that its exceeding does not improve the accuracy of interpolation formulas. Similar theorems are proved for polynomial and integer functionals that are defined on the spaces $L_2(0,1)$ and $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ when there is an approximate calculation of scalar products in interpolation formulas. The investigation assumes the conditions for the invariant solvability of the Lagrange interpolation problem in Euclidean space in case of under determinacy, i.e. when there is not enough initial information to construct the interpolation polynomial. Accordingly, it is stated that the solution is the only one and has the minimum norm among all interpolants under fixed interpolation conditions. The study investigates the accuracy of the Lagrange formula on polynomials of the appropriate degree in a linear infinite-dimensional space with a scalar product and in a finite-dimensional Euclidean space, and it shows that this interpolation formula contains fundamental Lagrange polynomials.

In the third chapter, in linear topological space an interpolation Newton-type polynomial of integral form is considered. The chapter proves a theorem concerning the conditions of continual nodes existence for the chosen interpolant. The obtained result for operators of many variables is generalized, and the examples of such interpolants are considered.

The fourth chapter reveals the Hermite interpolation polynomial in Hilbert space with a measure when the operator values are given and its first Gateaux differentials at nodes are chosen in a certain way. It is proved that the interpolant has a minimum norm on the set of Hermite interpolants with fixed interpolation conditions and asymptotically preserves polynomials of the corresponding degree. The theorem on the minimum norm interpolant is generalized for the case when there are Gateaux differentials up to a certain order in the interpolation nodes. Furthermore, the chapter considers the issue of interpolation accuracy and convergence to the second-degree polynomial operator when there is an increase in nodes number. It is shown that Hermite and Hermite-Birkhoff interpolants for a nonlinear and a polynomial operators asymptotically preserve polynomials of the corresponding degree. These formulas are much simpler in design and the availability of estimation accuracy enables such interpolants to be used for approximating polynomial, integer, and differentiable operators. The investigation outlines the Hermite interpolation problems in the Euclidean space when it is given the value of the function of many variables and the value of its corresponding first- and second-order Gateaux differentials in the interpolation nodes. It is also revealed that these problems have a unique minimum norm solution. The study demonstrates the conditions of invariant solvability and problem solutions in case of under-determinacy, i.e. when the initial information lacks sufficiency and thus, prevents interpolation polynomial construction certainty. In the normalized infinite-dimensional linear and finite-dimensional Euclidean spaces, it is shown that the Hermite interpolation polynomial of minimum norm contains fundamental polynomials. The accuracy of Hermite interpolation formulas on polynomials of the corresponding degree is studied. The proven theorems are illustrated with examples. The theorem on the Hermite-Birkhoff interpolant of the minimal norm in a Hilbert space with measure is proved.

The fifth chapter ascertains the new compatibility criteria of the linear system

of equations and inequalities, which are equivalent to Kronecker-Capelli's and Chernikov's theorems correspondingly, and are related to the conditions of existence of a linear interpolation polynomial in Euclidean spaces. The conditions for the existence of the nonlinear (polynomial) equation solution are found. Examples of solving problems using the obtained results are considered.

Key words: nonlinear operator, polynomial operator, integer operator, Hilbert space, Euclidean space, operator interpolation, Lagrange interpolation polynomial, Hermite interpolation polynomial, Hermite-Birkhoff interpolation polynomial, Gateaux differential, minimum norm, accuracy, interpolation convergence.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. Khlobystov V. On Weak Convergence of an Iteration Process with Minimal Norm in a Hilbert Space / V. Khlobystov, E. Kashpur // Journal of Mathematical Sciences. — 2002. — Vol. 109, №4. — P. 1791 – 1794 (Translate from Zhournal obchysluval'noi ta prykladnoi matematyky. — 1998. —Vol. 84, №2. — C. 169 – 175).

2. Хлобистов В. В. До питання про точність інтерполяції в гільбертовому просторі з мірою / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 1999. — №2. — С. 313 – 318.

3. Khlobystov V. V. On accuracy of polynomial interpolation in Hilbert space in case of approximately given values of operator in nodes / V. V. Khlobystov, E. F. Kashpur // Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2002. — №1. — P. 168 – 174 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, №1, 2002, pp. 168 – 174).

4. Хлобыстов В. В. Анализ точности интерполирования целых операторов в гильбертовом пространстве при возмущенных узловых значениях / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №7. — С. 953 – 960.

5. Макаров В. Л. Интегральные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур , Б. Р. Михальчук // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №6. — С. 779 – 790.

6. Khlobystov V. V. On estimates of accuracy of interpolation for polynomial and entire functionals in $L_2(0, 1)$ / V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2004. — №1. — P. 91 – 97 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, № 1, 2004, pp. 91 – 97).

7. Хлобистов В. В. Про точність інтерполювання поліноміальних та цілих функціоналів в $\overset{0}{W}{}_2^1(0, \pi)$ у разі їх наближених вузлових значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2004. — №1. — С. 279 – 286

8. Хлобистов В. В. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №2. — С. 316 – 324.

9. Хлобистов В. В. Операторні інтерполянти в гільбертовому просторі асимптотично точні на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Поповічева // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №4 — С. 242 – 248.

10. Хлобистов В. В. Про множину операторних інтерполянтів, гранично інваріантних щодо поліномів / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2006. — №2 — С. 246 – 252.

11. Кашпур О.Ф. Про точні на поліномах інтерполяційні формули в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева, В. В. Хло-

бистов// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2007. — №1. — С. 168 – 172.

12. Makarov V. L. On continual interpolation nodes for operators in linear topological spaces / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — Novermber, 2010. — Vol. 62, Iss. 04. — C. 564 – 574. (Ukrainian Original Vol. 62, Iss. 04, 2010, pp. 494 – 503).
13. Кашпур О. Ф. Розв'язок інтерполяційних задач типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, О. Д. Трубецкая // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2012. — №4 — С. 122 – 127.
14. Kashpur O.F. Invariance and uniqueness of solutions to polynomial interpolation problems in Euclidean space / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of computational and applied mathematics. — 2015. — Vol. 2, Iss. 119. — P. 8 – 14.
15. Кашпур О. Ф. До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах./ О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов// Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — №10. — С. 10 – 14.
16. Кашпур О. Ф. Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком. / О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — №8. — С. 12 – 17.
17. Kashpur O. F. Lagrange interpolation formula in linear spaces / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of computational and applied mathematics. — 2018. — Vol. 2, Iss. 128. — P. 61 – 67.
18. Makarov V. L. Operator Interpolation and Systems of Linear Equations and Inequalities in Euclidean Spaces / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, O.

F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — april, 2021. — Vol. 72. — №11. — C. 1758 – 1770 (Ukrainian Original Vol. 72, No. 11, November, 2020, pp. 1524 – 1535).

19. Kashpur O. F. Hermite–Birkhoff Interpolation Polynomial of Minimum Norm in Hilbert Space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2021. — Vol. 57, Iss. 5. — C. 803 – 808 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 57, №. 5, 2022, pp. 150 – 156).

20. Кашпур О. Ф. Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь в евклідових просторах/ О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2021. —№1. — С. 74 – 81.

21. Kashpur O. F. Solving Hermite interpolation problem in finite-dimensional Euclidean space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 2. — C. 259 –267 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 2, 2022, pp. 118 – 127).

22. Kashpur O. F. Hermite Interpolation Polynomial for Functions of Several Variables / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 3. — C. 399 – 408 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 3, 2022, pp. 91 – 100).

23. Кашпур О. Ф. Фундаментальні поліноми інтерполяційної формули Ерміта в лінійному нормованому та в евклідових просторах / О. Ф. Кашпур // IX Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика / Computational and Applied Mathematics присвяченої 100-річчю академіка І.І. Ляшка, Київ, Україна, 10 – 11 жовтня 2022 р., Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2022. — №2. — С. 50 – 58 .

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

24. Хлобыстов В. В. О точности интерполирования целых операторов в пространстве $L_2(0,1)$ / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // IX Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, Україна, 16 – 19 травня 2002 р. — С. 387.

25. Хлобистов В. В. Про точність інтерполяції операторних поліномів в гільбертовому просторі у випадку збурених їх значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика"присвячена 80-річчю академіка НАН України І.І.Ляшка Київ, Україна, 9 – 10 вересня 2002 р. — С. 97.

26. Хлобистов В. В. Аналіз точності інтерполяції поліноміальних та цілих функціоналів у випадку наближених вузлових значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // X Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 13 – 15 травня 2004 р. — С. 539.

27. Хлобыстов В. В. Асимптотически инвариантный относительно полиномов интерполянт типа Эрмита в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Міжнародна конференція "Питання оптимізації обчислень"(ПОО – XXXII) присвячено пам'яті академіка В. С. Михалевича, Кацивелі, Україна, 19 – 23 вересня 2005 р. — С. 209.

28. Хлобистов В. В. Про множину операторних інтерполянтів, гранично інваріантних щодо поліномів / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева // XI Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 18 – 20 травня 2006 р. — С. 633.

29. Кашпур О. Ф. Побудова операторних інтерполянтів типу Ерміта, що є асимптотично точними на поліномах / О. Ф. Кашпур // III Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика"присвячена

пам'яті академіка НАН України І. І. Ляшка, Київ, Україна, 11 – 12 вересня 2009 р. — . С. 41.

30. Гаркуша В. И. Вычислительные технологии для задач прогнозирования / В. И. Гаркуша, Е. Ф. Кашпур, А. И. Рыженко, Д. И. Черний // IV Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 8 – 10 вересня 2011 р. — С. 61.

31. Черній Д. І. Технології прогнозування наслідків небезпечних техногенних впливів та катастроф / Д. І. Черній, В. І. Гаркуша, А. Д. Головенко, О. Ф. Кашпур, А. І. Риженко // XVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU – 2011), Skhidnytsia, Ukraine, May 23 –27, 2011. — С. 174 – 176.

32. Гаркуша В. І. Обчислювальні технології комп'ютерного моделювання / В. І. Гаркуша, О. Ф. Кашпур, А. В. Кузьмін, А. І. Риженко, Д. І. Черній // VII Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 9 – 10 жовтня 2014 р. — С. 37.

33. Кашпур О. Ф. Про інваріантну розв'язуваність задачі інтерполяції функції двох змінних/ О. Ф. Кашпур // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability"(DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 27 – 29, 2015. — С. 74.

34. Kashpur O. F. The interpolation of many-variable functions / O. F. Kashpur // XXXV International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2020), Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, May 11 – 15, 2020. — С. 50 – 51.

35. Kashpur O. F. The interpolation problem ana system of nonlinear equations in Euclidean spaces / O. F. Kashpur // XXXVI International Conference

"Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2021), Skhidnytsia, Ukraine, May 11 – 14, 2021. — C. 43.

36. Kashpur O. F. On the invariance and uniqueness of the solution of Hermite interpolation problems in Euclidean space / O. F. Kashpur // XXXV International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2022), Sheki–Lankaran, Republic of Azerbaijan, November 23 – 25, 2022. — C. 50 – 51.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми.

Задача поліноміальної інтерполяції операторів в абстрактних гільбертових та скінченновимірних евклідових просторах є актуальною проблемою прикладної математики.

Розв'язання задач ідентифікації об'єктів невідомої структури, синтезу оптимальних систем (у формулюванні Н. Вінера) можна розглядати як варіанти задач про наближення операторів у відповідних функціональних просторах. Інтерполяція є одним із методів апроксимації операторів.

Обґрунтуванням наближення поліномами неперервної функції однієї змінної є теорема Вейєрштраса. У подальшому, М. Стоун узагальнив цю теорему на клас неперервних функцій багатьох змінних. Для неперервного функціоналу аналогом теореми Вейєрштраса є теорема Фреше. П. Прентер доведено аналогічну теорему для неперервного оператора, що заданий на дійсному сепарабельному просторі. Для банахових просторів такий результат одержаний В. Істратеску та І. К. Даугаветом. На підставі наведених теорем можна звести вивчення нелінійних систем до їх поліноміального наближення.

Важливість досліджень в області поліноміальної інтерполяції підтверджується багатьма прикладними задачами. На практиці досить часто зустрічаються нелінійні системи, які описуються операторними поліномами. Такі системи знаходять численні застосування в таких галузях як розпізнавання образів, екологія, динаміка урбанізації, економіка, нейрологія, теорії лазерів, інтелектуальному аналізі даних (data mining), балістиці, оптиці, тощо.

Вивчення багатьох нелінійних структур можна звести до їх поліноміального наближення. Відомі аналітичні методи ідентифікації, які розроблено для лінійних систем, можна застосовувати для полілінійних та поліноміальних. Отже, теорію поліноміального наближення можна розглядати як зв'язок між лінійною та нелінійною теоріями.

В теорії наближення операторів розроблено інтерполяційні методи апроксимації функціоналів та операторів як у функціональних, так і у лінійних просторах. Основні результати, що відносяться до цього питання одержано такими авторами, як С. Ю. Ульм, В. В. Полль, У. Портер, П.М. Прентер, П. І. Соболевський, Л. А. Янович, В. Л. Рвачов, О. М. Литвин, В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, P. Kergin, L. Fillipson, C. A. Michelli, I. I. Демків, Р. С. Хапко, А. П. Худяков, G. Allasia .

Зазначимо деякі особливості поліноміальної операторної інтерполяції. Насамперед це неєдиність розв'язку інтерполяційної задачі. На відміну від класичних інтерполяційних формул, операторний інтерполянт не зберігає поліноми відповідного степеня. Властивість збереження багаточленів відповідного степеня має важливе значення при одержанні оцінок точності інтерполяційних формул та дослідженні збіжності інтерполяційних процесів в разі збільшення числа вузлів, а також для побудови квадратурних формул при обчисленні континуальних інтегралів. Саме інтерполяційні поліноми з такою властивістю можна використовувати в задачах ідентифікації, моделювання та для широкого класу задач, що дозволяють звести вивчення нелінійної структури до вивчення його поліноміального наближення.

Одним із важливих аспектів поліноміальної інтерполяції є конструктивна побудова операторного інтерполянта, аналіз точності та питання збіжності інтерполяційних процесів. Незначна кількість публікацій в цій області насамперед обумовлена неабиякими труднощами дослідження таких наближень.

У роботах В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова побудовано основи загальної теорії поліноміальної операторної інтерполяції в абстрактних гільбертових та векторних просторах. Авторами розглянуто інтерполяційні операторні задачі типу Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа: конструктивно побудовано всю множину інтерполянтів, одержано необхідні та достатні умови існування операторного інтерполяційного поліному, описано всю множину операторних інтерполяційних поліномів відповідного степеня та із цієї множини виділено підмножину інтерполянтів, що зберігають багаточлени відповідного степеня, знайдено оцінки точності та досліджено збіжність деяких інтерполяційних процесів. Оскільки в цих роботах побудовано всю множину інтерполянтів заданого степеня у довільному векторному просторі, то результати робіт авторів, що наведені вище, є частинний випадком результатів одержаних В. Л. Макаровим та В. В. Хлобистовим.

При розв'язанні задач, пов'язаних із точністю інтерполяції, у випадку довільної нелінійності апроксимуючого оператора, результати мають у більшості випадків теоретичний інтерес та малоефективні на практиці. Якщо розглянути поліноміальну інтерполяцію у гільбертовому просторі, то можна отримати більш вагомі результати. Зауважимо, що при розв'язанні прикладних задач поширені випадки, коли інформація про оператор, що апроксимуємо, є збуреною, а отже постає питання про точність інтерполяційних формул та вплив неусувної похибки на розв'язок задачі.

На практиці здебільшого не вистачає інформації про досліджуємий об'єкт. Як відомо, в скінченновимірному евклідовому просторі для існування єдиного розв'язку інтерполяційної задачі потрібно виконання певних співвідношень між числом вузлів та степенем полінома, тому застосувати класичні інтерполяційні формули без додаткових обмежень для такого випадку неможливо. До того ж, узагальнення класичних інтерполяційних формул для функцій багатьох змінних у разі співпадіння кількості вузлів інтерполяції та розмірності простору поліномів, на якому шукаємо розв'язок, призводить до громіздких формул, які є складними за реалізацією. Отже, в скінченновимірному евклідовому просторі потребує вирішення проблеми знаходження розв'язку інтерполяційної задачі в умовах недовизначеності.

Все вище викладене пояснює актуальність та важливість теорії поліноміальної операторної інтерполяції у гільбертовому та в скінченновимірному евклідовому просторах та доцільність її подальшого розвитку, а саме: вирішення проблеми пошуку розв'язку інтерполяційних задач в умовах недовизначеності, знаходження умов існування єдиного розв'язку та інваріантної розв'язуваності поставленої задачі в скінченновимірному евклідовому просторі; знаходження оцінок точності інтерполяційних формул та дослідження збіжності інтерполяційних процесів у гільбертовому просторі з мірою у випадку збуреної вихідної інформації про оператор, що апроксимуємо, знаходження інтерполянтів, які мають властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня.

Ця дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку результатів робіт В. Л. Макарова та В. В. Хлобистова та одержанню нових результатів, що пов'язані з поліноміальною операторною інтерполяцією.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана в рамках науково-дослідної роботи № 97059 "Теорія інтерполяції нелінійних операторів в гільбертових просторах"(номер державної реєстрації 0197U003075, термін виконання 1998 – 2000 р.р.) на кафедрі методів обчислювального експерименту факультету кібернетики, науково-дослідної роботи № 16КФ015-02 «Теорія і методи розробки інтелектуальних інформаційних технологій та систем» (державний номер рестрації 0116U006378, термін виконання 2023-2025 рр.) на кафедрі математичної інформатики факультету комп'ютерних наук та кібернетики, держбюджетної теми № 022БФ015-03 «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони» (державний номер реєстрації 0122U002026, термін виконання 2023 р.) на кафедрі обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є розвиток теорії поліноміальної операторної інтерполяції в гільбертових та в скінченновимірних евклідових просторах.

Завданнями роботи є:

— вирішення проблеми пошуку розв'язку інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності, одержання умов єдиності розв'язку та інваріантної розв'язуваності цих задач в скінченновимірному евклідовому просторі;

— дослідження збіжності інтерполяційних процесів та знаходження оцінок точності інтерполяційних формул Лагранжа у випадку збуреної вихідної інформації в гільбертовому просторі з мірою;

— дослідження точності інтерполяційних формул Лагранжа та Ерміта на поліномах відповідного степеня;

— розв'язання екстремальних задач на множині інтерполяційних поліномів Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі з мірою.

Об'єкт досліджень.

Об'єктом досліджень є поліноміальні, цілі та нелінійні оператори.

Предмет досліджень.

Предметом досліджень є задачі операторної інтерполяції типу Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа, збіжність інтерполяційних процесів та оцінки точності інтерполяційних формул.

Методи дослідження.

У роботі використовуються методи функціонального аналізу, методи операторної інтерполяції, теорія матриць, методи обчислювальної математики.

Наукова новизна одержаних результатів.

У дисертації вперше отримано наступні результати:

— вирішено проблему пошуку розв'язку інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності в скінченновимірному евклідовому просторі: знайдено умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі. Показано, що розв'язок є єдиним та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів при фіксованих інтерполяційних умовах;

— доведено, що в абстрактному гільбертовому просторі з мірою у загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу Лагранжа з мінімальною нормою до поліноміального оператору, при цьому похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною, знайдено систему вузлів інтерполяції, для якої інтерполяційний процес є збіжним, досліджено точність та збіжність інтерполяційного процесу Ерміта;

— одержано оцінки точності інтерполяції поліноміальних, цілих операторів в абстрактному гільбертовому просторі з мірою та поліноміальних, цілих функціоналів, що визначені на просторах $L_2(0,1)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ у випадку збуреної вихідної інформації та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якої не покращує точності інтерполяції;

— у лінійному топологічному просторі знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду;

— у гільбертовому просторі з мірою побудовано інтерполяційні поліноми Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа, що є асимптотично точними на багаточленах відповідного степеня;

— розв'язано екстремальні задачі на множині інтерполяційних поліномів Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі з мірою;

— досліджено точність інтерполяційних формул мінімальної норми Лагранжа та Ерміта на поліномах відповідного степеня в лінійному нескінченновимірному просторі із скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі. Доведено, що інтерполяційні формули містять фундаментальні поліноми;

— знайдено нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь та нерівностей, які пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах. Знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь.

Набула подальшого розвитку теорія операторної інтерполяції в гільбертових та скінченновимірних евклідових просторах.

Вдосконалено методи дослідження збіжності інтерполяційних процесів та оцінок точності інтерполяційних формул у випадку збуреної вихідної інформації про оператор, що апроксимуємо, в гільбертовому просторі з мірою.

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати дисертаційного дослідження можуть знайти практичне застосування при розв'язанні прикладних задач таких, як: ідентифікація систем, розпізнавання образів, екології, балістики, економіки, геодезії, нейрології, теорії лазерів та інших. Іншим напрямком використання одержаних результатів є застосування побудованих на континуальній множині вузлів інтерполяційних поліномів для обчислення континуальних інтегралів. Наукові та прикладні результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні курсів «Ідентифікація систем при детермінованих впливах» для студентів кафедри обчислювальної математики, «Технології чисельного моделювання», «Методи негладкої оптимізації» для студентів освітньої програми «Прикладна математика» освітнього ступеня магістр. Також ці результати можуть знайти застосування в навчальних процесах фізико-математичних факультетів інших закладів вищої освіти України та закордонних наукових установ.

Особистий внесок здобувача.

Загальний план дослідження, його основний напрямок визначено доктором фізико-математичних наук, професором Хлобистовим В. В. Всі основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. В роботах [1 – 4, 6 – 8, 14 – 17], що виконані у співавторстві з Хлобистовим В. В., якому належить постановки задач, особистий внесок здобувача полягає в доведенні теоретичних результатів; в [5] здобувачем написано вступ, наведено приклади до доведених теорем та зроблено висновки; [9 – 11] здобувачу належить побудова інтерполянтів Ерміта та Ерміта-Біркхова степеня більше другого та доведення теорем про асимтотичне збереження інтерполянтом поліномів відповідного степеня; в роботі [12] здобувачем доведено теореми, всі основні твердження роботи доведені з рівноцінним внеском кожного із співавторів; в [13] автору належить постановка задачі, побудова інтерполяційних поліномів Ерміта та Ерміта-Біркхофа; в [18] співавторам належить постановка задачі, ідея доведення теорем щодо систем нерівностей належить Макарову В. Л., здобувачем доведено теоретичні результати.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на міжнародних наукових конференціях та семінарах, серед яких:

— IX Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, Україна, 2002;

— Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 2002;

— X Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 2004;

— Міжнародна конференція "Питання оптимізації обчислень"(ПОО – XXXII), Кацивелі, Україна, 2005;

— XI Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 2006;

— III Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 2009;

— IV Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 2011;

— VII Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 2014;

— XVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU – 2011), Skhidnytsia, Ukraine, 2011;

— XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability"(DSMSI), Kyiv, Ukraine, 2015;

— XXXV International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2020), Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, 2020;

— XXXVI International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2021), Skhidnytsia, Ukraine, 2021;

— XXXV International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2022), Sheki–Lankaran, Republic of Azerbaijan, 2022;

— IX Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика, Київ, Україна, 2022 р;

— науковий семінар кафедри обчислювальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник — член кореспондент НАН України Ляшко С. І., 2023);

— науковий семінар «Методи обчислювальної математики» інституту кібернетики імені В. М. Глушкова (керівники - академік НАН України Задирака В. К., академік НАН України Хіміч О. М., проф. Гладкий А. В., 2022);

— науковий семінар Науково-дослідного відділу системної математики Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (керівник — проф. Касьянов П. О., 2022)

Публікації.

Основні результати дисертації опубліковані в 36 наукових роботах. З них 23 статті у фахових виданнях, з яких 13 статей у вітчизняних наукових фахових виданнях [2, 4, 5, 7 – 11, 13, 15, 16, 20, 23], 10 статей у виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus та Web of Science [1, 3, 6, 12, 14, 17 – 19, 21, 22], 13 тез доповідей конференцій зокрема, без співавторів опубліковано 5 статей.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел (244 найменування) на 31 сторінці та 5 додатків на 16 сторінках. Загальний обсяг дисертації становить 314 сторінок, з яких 248 сторінок основного тексту.

Розділ 1

Постановка задач операторної інтерполяції та огляд літератури

Інтерполяція, як один із методів апроксимації операторів, має важливе теоретичне та прикладне значення. Застосування інтерполяційних методів в обчислювальній математиці обумовлює необхідність дослідження задачі операторної поліноміальної інтерполяції з метою подальшого розвитку теорії наближень та її практичного застосування.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню та розв'язанню задач інтерполяції типу Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа у гільбертових та в скінченновимірних евклідових просторах для нелінійних, поліноміальних та цілих операторів.

1.1 Постановка задачі операторної інтерполяції

Розглянемо постановки інтерполяційних задач.

Нехай X, Y — гільбертові простори.

Визначення 1.1. *Оператор $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) : X^k \to Y$ називається k-лінійним оператором, якщо він лінійний за кожним аргументом x_i, $i = \overline{1,k}$ [6].*

Визначення 1.2. *Нехай $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) : X^k \to Y$ — k-лінійний оператор. Покладемо $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = x$. Оператор $L_k(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k}) = L_k x^x$ називається k-степенним (k-м операторним степенем).*

Позначимо Π_n — множину операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n вигляду

$$\Pi_n = \left\{ P_n(x) : P_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n \right\}, \qquad (1.1)$$

де $L_0 \in Y$, $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k})$, $k = \overline{1, n}$, $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — неперервна, симетрична k-лінійна операторна форма.

Наведемо приклад операторного поліному $P_n(x)$ із множини Π_n. Нехай $X = L_2(0,1)$, $Y = R^1$, $L_0 \in R^1$. Неперервні, симетричні k-лінійні операторні форми $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) : X^k \to Y$, $k = \overline{1, n}$, визначимо таким чином:

$$L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 K_k(t_1, t_2, \ldots, t_k) x_1(t_1) x_2(t_2) \cdots x_k(t_k) \times$$

$$\times dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

де $K_k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $k = \overline{1, n}$ — неперервні, симетричні функції змінних $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Якщо в останній рівності покладемо $x_1(t) = x_2(t) = \cdots = x_k(t) = x(t)$, то отримаємо, що

$$L_k x^k = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 K_k(t_1, t_2, \ldots, t_k) x(t_1) x(t_2) \cdots x(t_k) dt_1 dt_2 \cdots dt_k, k = \overline{1, n}.$$

Отже, операторний поліном $P_n \in \Pi_n$ повністю визначений.

Зауважимо, що операторні поліноми є основою багатьох математичних моделей із застосуванням у механіці, економіці, мережах, біології та багатьох інших областях [19], [23], [25], [38] [181], [236], [232], [233], [238].

Розглянемо операторну інтерполяційну задачу типу Лагранжа. Нехай оператор $F : X \to Y$ заданий своїми значеннями $\{F(x_i)\}_{i=1}^{m}$ у вузлах інтерполювання $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X$. Потрібно знайти такий поліном $P_n(x) \in \Pi_n$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n(x_i) = F(x_i), \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.2}$$

Постановка інтерполяційної задачі може містити не лише значення оператора $F(x_i)$, $i = \overline{1,m}$, а і значення диференціалів Гато $F^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(i)}v_{ik-1}^{(i)}\cdots v_{i1}^{(i)}$ [1], [52] за напрямками $v_{ik}^{(i)}, v_{ik-1}^{(i)}, \ldots, v_{i1}^{(i)} \in X$, $k = \overline{0,j_i}$, $i = \overline{1,m}$, у вузлах x_i, $i = \overline{1,m}$, до порядку j_i включно. В цьому випадку виникає операторна інтерполяційна задача типу Ерміта. Отже, потрібно знайти такий операторний поліном $P_n(x) \in \Pi_n$, що відповідає інтерпояційним умовам

$$P_n^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(i)}v_{ik-1}^{(i)}\cdots v_{i1}^{(i)} = F^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(i)}v_{ik-1}^{(i)}\cdots v_{i1}^{(i)}, k = \overline{0,j_i}, i = \overline{1,m}. \tag{1.3}$$

Якщо в рівності (1.3) всі $j_i = 0$, то інтерполяційні умови (1.3) набувають вигляд (1.2), тобто отримаємо інтерполяційну задачу Лагранжа.

У випадку, коли значення деяких диференціалів Гато у вузлах x_i, $i = \overline{1,m}$, в умовах (1.3) відсутні, то виникає операторна інтерполяційна задача типу Ерміта-Бірхгофа [26].

Задача операторної інтерполяції є узагальненою, якщо в умовах (1.3) замість диференціалів Гато містяться деякі інші диференціальні оператори, наприклад, лінійні комбінації диференціалів Гато чи оператори іншої структури.

Зазначимо, що на відміну від класичної інтерполяції функцій [8], [10], [14], [18], [24], [55], [93], [121], [164], [165] операторне інтерполювання має певні особливості. Наведемо деякі з них: в загальному випадку розв'язок інтерполяційної задачі неєдиний, кількість вузлів та степінь інтерполяційного полінома не пов'язані між собою, довільний інтерполянт немає властивості збереження багаточленів відповідного степеня. Це означає, що якщо P_n^I — інтерполяційний поліном для F та $F \equiv Q_n \in \Pi_n$, то в загальному випадку P_n^I не співпадає з Q_n.

1.2 Огляд літератури

Проблема апроксимації операторів поліномами є актуальною та важливою. Обґрунтуванням такого вигляду наближень є теорема Вейєрштраса для функції однієї змінної [119]. У подальшому М. Стоун узагальнив цю теорему для неперервних функцій багатьох змінних [235]. Аналогом теореми Вейєрштраса для неперервного функціоналу $F : C[a,b] \to R_1$ є теорема Фреше [189], де функціональний поліном має вигляд:

$$P_n(x) = K_0 + \int\limits_{\Omega_1} K_1(z_1)x(z_1)dz_1 + \int\limits_{\Omega_2} K_2(z_1,z_2)x(z_1)x(z_2)dz_1dz_1 + \cdots +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_n} K_2(z_1,z_2,\ldots,z_n)x(z_1)x(z_2)\cdots x(z_1)dz_1dz_1\cdots dz_n,$$

$\Omega_p = (a,b) \times (a,b,)\ p = \overline{1,n},\ K_p(z_1,z_2,\ldots,z_p),\ p = \overline{1,n}$, є неперервними симетричними функціями змінних $z_1,z_2,\ldots,z_p$.

Для неперервних нелінійних операторів теорема, що є аналогічною теоремі Вейєрштраса, доведена П. Прентер [229]: якщо $X = Y = H$ — дійсний сепарабельний гільбертовий простір [54], множина $K \subset X$ є компактом, $F : H \to H$ — неперервний оператор, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінчений поліноміальний оператор $P_n(x)$ такий, що

$$\sup_{x\in K} \|F(x) - P_n(x)\| < \varepsilon.$$

Згодом більш загальні результати одержано Істратеску В. [198] та Даугаветом І. К. [20]: нехай X, Y — дійсні банахові простори [54], $K \subset X$ є компактом, $F : X \to Y$ — неперервний оператор. У роботі [198] доведено, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий поліноміальний оператор $P_n(x)$, що для всіх $x \in K$ виконується нерівність $\|F(x) - P_n(x)\| < \varepsilon$. В [20] показано, що для будь-якого заданого неперервного на відкритій множині в сепарабельному гільбертовому просторі оператора знайдеться послідовність поліноміальних операторів, що збігається до нього поточково на всій цій множині.

Важливість наближення операторів поліномами підтверджується багатьма прикладними задачами. На практиці часто виникають нелінійні системи, що описуються поліномами з множини Π_n. Такі системи називають поліноміальними [19]. Дослідження цих систем має важливе значення [191], [193], [231]. Інтерес до таких систем пояснюється їх достатньо простим математичним описом. Аналітичні методи ідентифікації, що розроблено для лінійних систем [30] можна застосовувати для полілінійних та поліноміальних систем. Дослідження нелінійних структур загального вигляду можна звести до вивчення їх поліноміальних наближень. Отже, теорію поліноміальних наближень можна розглядати як зв'язок між лінійною та нелінійною теоріями.

Поліноміальні системи знаходять численні застосування в таких галузях, як розпізнавання образів [224], нейропсихологія [190], ідентифікація систем [183], [100], нейрологія [180], теорія лазерів [195], [225], динаміка урбанізації [187], [212], [223], тощо. Часто інформація про об'єкт, що описується нелінійним оператором $F : X \to Y$, полягає в наборі пар $(x_i, F(x_i)) \in X \times Y$, $i = \overline{1, m}$. За цією інформацією потрібно побудувати математичну модель об'єкта, тобто поновити оператор F. Розв'язок такої задачі на множині Π_n, що визначається формулою (1.1), призводить до поліноміальної операторної інтерполяції з умовами (1.2).

Перейдемо до огляду найбільш важливих результатів теорії операторної поліноміальної інтерполяції. Відмітимо роботи таких авторів як С. Ю. Ульм, В. В. Полль, У. Портер, П.М. Прентер, П. І. Соболевський, Л. А. Янович, В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, P. Kergin, L. Fillipson, C. A. Michelli, І. І. Демків, Р. С. Хапко, А. П. Худяков, G. Allasia. Розглянемо результати, що одержані ними більш детально.

Нехай $X = Y = L_2(v)$ — простір сумовних з квадратом функцій [15], [52], v — скінчений або нескінчений інтервал. В роботі У. Портера [227] доведено теорему про необхідну та достатню умову існування інтерполяційного полінома $P_n : X \to Y$, $P_n \in \Pi_n$ з мінімальною нормою

$$\|P_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n} \|L_p\|^2,$$

де

$$L_p x^p = \int\limits_v \cdots \int\limits_v k_p(t, z_1, z_2, \ldots, z_p) x(z_1) x(z_2) \cdots x(z_p) dz_1 dz_2 \cdots dz_p, p = \overline{1, n},$$

$$\|L_p\| = \int\limits_v \cdots \int\limits_v k_p^2(t, z_1, z_2, \ldots, z_p) dt dz_1 dz_2 \cdots dz_p.$$

Інтерполянт $P_n(x)$ відповідає інтерполяційним умовам (1.2). В гільбертовому просторі $L_2(v)$ автор навів конструктивну побудову інтерполяційного поліному P_n тільки у випадку неособливої матриці

$$V(m, n) = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x_k)^p \right\|_{i,k=1}^{m},$$

де $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $L_2(v)$, $\{x_i\}_{i=1}^m \subset L_2(v)$ — вузли інтерполяції. У разі, коли матриця $V(m, n)$ є невиродженою та $\vec{y} \in RangeV(m, n)$, $\vec{y} = \{F(x_i)\}_{i=1}^m$, то розв'язок задачі існує, але не наведений. Якщо ж $\vec{y} \notin$

$RangeV(m,n)$, то інтерполянт з мінімальною нормою не існує. Зауважимо, що отримані умови існування інтерполяційного поліному не є конструктивними, інтерполянти не зберігають багаточлени відповідного степеня.

Розглянемо результати роботи П. Прентер [230], де побудовано інтерполяційні операторні поліноми Лагранжа та Ерміта у банаховому просторі X для оператора $F : X \to X$. При розв'язанні цих задач автор обмежується традиційним співвідношенням $n = m - 1$ між числом вузлів m та степенем полінома n для задачі типу Лагранжа та $n = 2m - 1$ у випадку ермітової інтерполяції. В цитованій роботі П. Прентер вдалося перенести результати класичної інтерполяції (типу Лагранжа та Ерміта) функцій на випадок поліноміальної інтерполяції операторів у банахових просторах. Відображення оператором банахового простору самого на себе звужує застосування таких інтерполянтів, а їх побудова не є конструктивною. Інтерполяційні формули Лагранжа та Ерміта, що побудовані в гільбертовому просторі є конструктивними, але не зберігають поліноми відповідного степеня. При розв'язанні інтерполяційної задачі Ерміта розглянуто інтерполяційні умови, що містять лише перші похідні Фреше [51], [66] у вузлах.

В статті [196] П. Хаулетом та А. Торохтієм конструктивно побудовано апроксимацію для нелінійного оператора, що задано на обмеженій, але не на компактній множині із сепарабельного гільбертового простору. Результати, які одержано в роботі можна розглядати як узагальнення теореми Вейєрштраса-Стоуна [22]. В [197] авторами розглянуто нелагранжеву процедуру для інтерполяції нелінійного оператора $F : C[0,1] \to C[0,1]$, що заданий своїми значеннями. Для такого відображення інтерполяція Лагранжа, запропонована П. Прентер, не може бути застосована. В роботі побудовано інтерполяційні формули, а також показано, що оператор інтерполяції є неперервним у сильній топології в кожній точці набору емпіричних даних.

Узагальнення теореми Стоуна–Вейєрштраса на оператори в різних топологічних просторах отримано в також [171], [237], а в роботах [232], [233], [238] ці методи застосовано при розв'язанні задач із теорії систем.

С.Ульмом та В. Поллем в роботах [114] — [116] визначено функціональні розділені різниці на основі яких знайдено розв'язок інтерполяційної задачі Лагранжа у вигляді формули Ньютона.

Для функціоналів у довільних банахових та гільбертових просторах Соболевським П. І. та Яновичем Л. О. в [108], [153] побудовано інтерполяційні формули Ньютона, що містять розділені різниці першого та вищих порядків, а також знайдено явний вигляд похибки цих формул.

Розглянемо результати, що одержані Яновичем Л. О. в [153]. Нехай X — топологічний векторний простір, X' — спряжений простір неперервних лінійних функціоналів.

Визначення 1.3. *Розділеною різницею функціоналу $F : X \to R_1$ на елементах $x_0, x_1 \in X$ називається лінійний функціонал $F[x_0; x_1] : X \to X'$ такий, що*

$$F[x_0; x_1](x_1 - x_0) = F(x_1) - F(x_0).$$

Розглядають такі розділені різниці $F[x_0; x_1]$, які перетворюють на нуль сталий функціонал, а для лінійного функціоналу F виконується тотожність

$$F[x_0; x_1]x \equiv F(x), \quad \forall x \in X.$$

Розділені різниці вищих порядків визначаються за індукцією.

Визначення 1.4. *Розділеною різницею $F[x_0; x_1; \ldots; x_k]$ порядку k функціоналу F називається k-лінійний функціонал, що визначений на X^k, залежить від елементів $x_0, x_1, \ldots, x_k \in X$ та відповідає умові*

$$F[x_0; x_1; \dots; x_k](x_k - x_{k-1}) \cdots (x_k - x_0) =$$

$$= \{F[x_0; x_1; \dots; x_{k-2}; x_k] - F[x_0; x_1; \dots; x_{k-2}; x_{k-1}]\} \times$$

$$\times (x_k - x_{k-2}) \cdots (x_k - x_0), \quad k = 2, 3, \dots .$$

Нехай $g_\tau(x) : X \to X$ — лінійний оператор, що залежить від числового параметру $\tau \in [a, b]$ та

$$g_a(x) = \theta, \;\; g_b(x) = x.$$

В [153] доведено, що операторна розділена різниця $F[x_0; x_1; \dots; x_k] h_k h_{k-1} \dots h_1$ порядку k може бути обчислена за формулою

$$F[x_0; x_1; \dots; x_k] h_k h_{k-1} \dots h_1 = \tag{1.4}$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^{\tau_1} \cdots \int\limits_a^{\tau_{k-1}} F^k \left[x_0 + \sum_{i=1}^m g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1}) \right] d_{\tau_k} g_{\tau_k}(h_k) \cdots d_{\tau_1} g_{\tau_1}(h_1)$$

у випадку, якщо для функціоналу F існує k-кратний інтеграл Рімана-Стільт'єса [110]. Формула (1.4) це один із методів визначення розділеної різниці вищих порядків. Також наведено формули для обчислення розділених різниць, які не вимагають диференційованості функціоналу F, але повинні існувати відповідні інтеграли Рімана-Стільт'єса.

У роботі [153] при виконанні співвідношення $n = m - 1$ (n — степінь інтерполяційного поліному, m — число вузлів) побудовано інтерполяційний функціональний поліном Ньютона $P_n(F, x)$ степеня n вигляду

$$P_n(F,x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} F[x_0;x_1;\ldots;x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), \quad (1.5)$$

де розділені різниці $F[x_0;x_1;\ldots;x_k]$ визначаються на підставі рівності (1.4). Інтерполянт (1.5) зберігає поліноми відповідного степеня, але він є не єдиним розв'язком інтерполяційної задачі. При цьому необхідно, щоб існували похідні вищих порядків функціоналу F до n-ої включно та відповідні кратні інтеграли Рімана-Стільт'єса [104].

На основі результатів робіт [108], [153] в подальшому було отримано інтерполяційні багаточлени першого та другого степенів для функціоналів, що задано на просторі неперервно диференційованих функцій однієї та двох змінних [87], [154], [239], а також на деяких просторах функціональних матриць [240]. Побудову та дослідження інтерполяційних операторних поліномів в абстрактних гільбертових просторах розглянуто також авторами [161], [221], [222].

В роботі Кьоніга Х. [210] в банаховому просторі X розглянуто множину поліномів степеня n вигляду

$$E_n(x) = \left\{ \sum_{j=0}^{n} x_j t^j : x_j \in X; t \in R_1 \vee t \in C \right\}.$$

Один із результатів цієї роботи є теореми про збіжність інтерполяційного поліноміального процесу на послідовності вузлів t_k, що обрана як нулі полінома Ерміта степеня $n+1$.

В [28] Єрмаковим С. М. розглянуто задачу узагальненої поліноміальної інтерполяції для операторів, які визначені на множині простору $L_2(\mu)$ з мірою μ. Автором одержано необхідні та достатні умови додатньовизначеності міри тих вузлів інтерполяції, для яких задача має розв'язок.

Відмітимо роботи Литвина О. М. [58], [59], Рвачева В. А. [103], а також Бархнілла Р. Е. [164], [165] в яких розглянуто побудову операторів, що поновлюють функції n змінних за відомими їхніми слідами та слідами їх нормальних похідних до заданого порядку на m-вимірних $(0 \leq m < n)$ поверхнях. У випадку, коли $m = 0$ такі оператори називають інтерполяційними, а у випадку $m = 1$ та $m > 1$ інтерлінаційними та інтерфлетаційними відповідно [58]. У роботах [60] — [63] авторами розглянуто інтерстріпацію функцій двох змінних у випадку, коли функція відома лише в точках деяких смуг, тобто відновлення функції між системою цих смуг. В [64] узагальнено інтерстріпацію функцій двох змінних та проведено огляд існуючих методів щодо поновлення пошкоджених зображень.

Побудові теорії операторної інтерполяції в абстрактних гільбертових та векторних просторах присвячено роботи Макарова В. Л. та Хлобистова В. В. [68] – [76], [126], [216], [217]. Відзначимо роботу [126], де отримано необхідні та достатні умови, які накладаються на систему вузлів $x_i \in X$, $i = \overline{1, m}$ та значення оператора $F : X \to Y$ $(X, Y$ — гільбертові простори) у цих вузлах, що гарантують розв'язуваність задачі операторної інтерполяції (1.1), (1.2) при будь-якому співвідношенні між числом вузлів m та степенем інтерполянта n. Ці умови мають вигляд

$$\left(E - \frac{Z\vec{e}(Z\vec{e})'}{\delta_0(\|Z\vec{e}\| + \|Z\vec{e}\|^2)}\right) Z\vec{F} = \vec{0},$$

де Z — матриця, рядками якої є координати лінійно незалежних власних векторів з нульовим власним значенням матриці $\Gamma = \left\| \sum\limits_{p=1}^{n} (x_i, x_k)^p \right\|_{i,k=1}^{m}$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в X, $\delta_0(0) = 1$, $\delta_0(x) = 0$ у разі $x \neq 0$, $\| \cdot \|$ — норма, яка породжена скалярним добутком в R_m, $\vec{F} = \{F(x_i)\}_{i=1}^{m}$, $\vec{e} = (1, 1, \ldots 1) \in R_m$, E — одинична матриця. В термінах матриці Γ наведено опис всієї множини операторних інтерполянтів степеня n, що відповідають умовам (1.2). Ця множина має вигляд

$$P_n(x;F) = Q_n(x) + \left\langle \vec{F} - \vec{Q_n}, \Gamma^- \sum_{p=1}^{n} \{(x,x_i)^p\}_{i=1}^m \right\rangle, \tag{1.6}$$

де $\vec{Q_n} = \{Q_n(x_i)\}_{i=1}^m$, $\langle s,t\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} s_i t_i$, $s_i \in Y$, $t_i \in R_1$, Γ^- — узагальнена матриця до матриці Γ [4], [11], Q_n пробігає множину

$$\Pi_n^0(F) = \left\{ P_n(x) + \left[\frac{Z\vec{e}(Z\vec{e})'}{\delta_0(\|Z\vec{e}\| + \|Z\vec{e}\|^2)} - P_n(0) \right] \cdot [1 - \delta_0(\|Z\vec{e}\|)] : P_n \in \Pi_n \right\}.$$

Із множини (1.6) виділено підмножину інтерполянтів, що зберігають поліномів відповідного степеня.

В роботі [72] Макарова В. Л. та Хлобистова В. В. розглянуто задачу побудови операторного полінома n-го степеня типу Ерміта в гільбертовому просторі з інтерполяційними умовами

$$P_n^{(i)}(x_l)v_1^l v_2^l \cdots v_i^l = F^{(i)}(x_l)v_1^l v_2^l \cdots v_i^l, \quad i = \overline{0,k_l}, \quad l = \overline{1,m},$$

де $F^{(i)}(x_l)v_1^l v_2^l \cdots v_i^l \in Y$ — диференціали Гато [150] у вузлах $x_l \in X$, $l = \overline{1,m}$, за напрямками v_p^l, $p = \overline{1,i}$, а числа m та n не зв'язані між собою. Тут авторами встановлено необхідні та достатні умови розв'язуваності такої задачі в термінах матриці, яка визначається системою вузлів $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X$ і напрямками $\{v_i^l\}_{i=\overline{0,k_i}, l=\overline{1,m}} \subset X$. У разі виконання цих умов побудовано всю множину інтерполяційних поліномів та її підмножину інтерполянтів, що зберігають поліноми того ж степеня.

В [126] Хлобистовим В. В. доведено теорему про збіжність у кулі інтерполяційного операторного процесу типу Ньютона для цілих операторів в банаховому просторі. У роботі [74] в сепарабельному гільбертовому просторі з мірою для поліноміальних операторів досліджено збіжність інтерполяційного процесу типу Ерміта заданого степеня в разі зростання кількості вузлів та одержано оцінку швидкості збіжності.

Дослідження інтерполяції нелінійних та поліноміальних операторів продовжено в роботах [41], [42], [76], [133], [134]. В цих роботах одержано більш прості умови існування розв'язку інтерполяційної задачі, на підставі методу ортогональних моментів [99] конструктивно побудовано інтерполянт іншої структури, отримано оцінки точності інтерполяційних формул в метриці простору значень оператора.

Основи теорії інтерполяції побудовано в монографіях [77], [85], [218]. Розглянемо де-які результати цих робіт більш детально, оскільки ця дисертаційна робота присвячена розвитку та посиленню деяких результатів Макарова В. Л., Хлобистова В. В., пов'язаних з операторною інтерполяцією в гільбертових просторах, а також одержанню нових результатів. Наведені нижче результати будуть використані в дослідженнях дисертаційної роботи.

Нехай X, Y — гільбертові простори, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в просторі X, $(\cdot,\cdot)_Y$ — скалярний добуток в просторі Y, μ — деяка міра, перший момент якої дорівнює нулю, а другий обмежений, B — кореляційний оператор міри μ і $KerB = \emptyset$. Оператор $F : X \to Y$ заданий своїми значеннями $F(Bx_i)$ у вузлах інтерполяції $\{Bx_i\}_{i=1}^m \subset X$. В роботах [77], [85], [218] розглянуто таку інтерполяційну задачу Лагранжа: потрібно знайти такий операторний поліном n-го степеня $P_n(x) \in \Pi_n$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i), \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.7}$$

Введемо позначення: $\vec{F} = \{F(Bx_i)\}_{i=1}^m$, $\Gamma = \left\| \sum_{k=0}^{n} (Bx_i, x_j)^k \right\|_{i,j=1}^m$, Γ^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці Γ [102],

$$A_0 = E - \Gamma^+\Gamma = E - \Gamma\Gamma^+$$

є симетричною ідемпотентною матрицею [57]. Авторами знайдено умови існування розв'язку задачі (1.7). Має місце такий результат [77].

Теорема 1.1. *Для існування розв'язку задачі поліноміальної операторної інтерполяції з умовами* (1.7) *необхідно та достатньо виконання умови*

$$A_0\vec{F} = \vec{0}, \tag{1.8}$$

де B є самоспряженим, додатньовизначеним оператором, який можна обрати одиничним.

Нехай Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори $\vec{c}_j$, $j = \overline{1, r}$, матриці Γ з нульовим власним числом (чи, що теж саме, ортонормовані власні вектори матриці A_0 з власним числом одиниця). Авторами доведено аналог теореми 1.1.

Теорема 1.2. *Для розв'язуваності задачі поліноміального операторного інтерполювання з інтерполяційними співвідношеннями* (1.7) *необхідно та достатньо виконання умови*

$$Z\vec{F} = \vec{0}. \tag{1.9}$$

У роботах [77], [85], [218] конструктивно описано всю множину інтерполяційних операторних поліномів n-го степеня для F, що заданий своїми значеннями у вузлах $\{Bx_i\}_{i=1}^m$ у випадку виконання умови (1.8).

Теорема 1.3. *Нехай виконується умова* (1.8). *Тоді формула*

$$P_n^I(x) = Q_n(x) + \left\langle \vec{F} - \vec{Q_n}, \Gamma^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_{i=1}^m \right\rangle, \tag{1.10}$$

коли $Q_n(x) \in \Pi_n$, $\vec{Q_n} = \{Q_n(Bx_i)\}_{i=1}^m$ описує всю множину $\Pi_n^I(F)$ інтерполяційних для F операторних поліномів степені n у вузлах $\{Bx_i\}_{i=1}^m$.

При цьому самоспряжений додатньовизначений оператор B може бути обраним одиничним.

Наведемо розв'язок однієї із екстремальних задач, що отримано в роботах [77], [85], [218].

Теорема 1.4. *Нехай виконується умова* (1.9). *Тоді поліном* $P_0(x)$, *що визначається формулою*

$$P_0(x) = \left\langle \vec{F}, \Gamma^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_{i=1}^m \right\rangle, \tag{1.11}$$

є розв'язком екстремальної задачі

$$\|P_0\| = \inf \|P_n^I\| = \left(\left\langle \left\langle \Gamma^+ \vec{F}, \vec{F} \right\rangle \right\rangle \right)^{1/2}, \ Q(x) \in \Pi_n \tag{1.12}$$

і цей розв'язок єдиний. Тут $P_n^I(x)$ *із множини* $\Pi_n^I(F)$,

$$<< \vec{a}, \vec{b} >>= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i, \beta_i)_Y, \quad \vec{a} = \{\alpha_i\}_{i=1}^m, \quad \vec{b} = \{\beta_i\}_{i=1}^m, \quad \alpha_i, \beta_i \in Y.$$

Ця теорема є узагальненням теореми Портера [227] про інтерполяційний поліном з мінімальною нормою, що визначений на $L_2[a, b]$. Макаровим В. Л. та Хлобистовим В. В. цей результат узагальнено на абстрактний гільбертовий простір. На підставі теореми 1.4 можна визначити єдиний розв'язок інтерполяційної задачі типу Лагранжа, що має мінімальну норму серед усіх інтерполяційних поліномів (1.10), що відповідають одним інтерполяційним умовам (1.7).

Важливим в теорії інтерполяції операторів є питання про виділення із множини Π_n^I підмножини операторних поліномів, що зберігають багаточлени відповідного степеня. У випадку класичної інтерполяції функції $f : R^1 \to R^1$ у разі виконання умови $m = n+1$ інтерполянт Лагранжа зберігає поліноми того ж степеня.

Визначення 1.5. *Операторний поліном $P_n^c(x;F)$ n-го степеня із множини $\Pi_n(F)$ називають c-поліномом, якщо він задовольняє умові*

$$P_n^c(x;F) = F(x) \ \ \forall F \in \Pi_n, \ \ \forall x \in X.$$

В [77] доведено теорему про множину $\Pi_n^c(F)$ операторних поліномів, що зберігають багаточлени відповідного степеня при виконанні умов теореми 1.2.

Введемо позначення: $\Gamma_k = \|(x_i, x_j)^k\|_{i,j=1}^m$. В термінах матриць Γ, Γ_0, Γ_1 доведено умову інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі Лагранжа в гільбертовому просторі:

$$rg(\Gamma_0 + \Gamma_1) + n - 1 \geq m.$$

Теореми 1.1, 1.3, а також теорему про множину $\Pi_n^c(F)$ узагальнено для довільних векторних просторів.

В подальшому в монографіях [77], [85], [218] знайдено розв'язок операторної задачі типу Ерміта з інтерполяційними умовами

$$p^{(j)}(x_i)h_{ij}^{(j)} \dots h_{i1}^{(j)} = F^{(j)}(x_i)h_{ij}^{(j)} \dots h_{i1}^{(j)}, \ j = \overline{0, k_i} \ i = \overline{1, m}. \tag{1.13}$$

Позначимо

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(x_j)h_{ji}^{(i)}h_{j,i-1}^{(i)} \dots h_{j1}^{(i)}, \ i = \overline{0, k_j}\}_{j=1}^m, \tag{1.14}$$

$$\vec{q}_H = \{q^{(i)}(x_j)h_{ji}^{(i)}h_{j,i-1}^{(i)} \dots h_{j1}^{(i)}, \ i = \overline{0, k_j}\}_{j=1}^m, \tag{1.15}$$

$$\vec{g}_H = \left\{ \frac{\partial^i}{\partial\alpha_1 \cdots \partial\alpha_i} g\left(x_j + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p h_{jp}^{(i)}, x\right)\Bigg|_{\alpha_1=\dots=\alpha_i=0}, \ i = \overline{0, k_j} \right\}_{j=1}^m, \tag{1.16}$$

Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори симетричної матриці $H = \|H^{ls}\| = \|h_{ij}^{ls}\|_{i=\overline{0,k_l},\ j=\overline{0,k_s}}$ з нульовим власним числом, де

$$h_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1 \dots \partial\alpha_i \partial\beta_1 \dots \partial\alpha_j} g(x_l + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p h_{lp}^{(i)}, x_s + \sum_{p=1}^{j} \beta_p h_{sp}^{(i)})|_{\alpha_1=\dots=\alpha_i=\beta_1=\dots=\beta_j=0},$$

$$g(u,v) = \sum_{p=0}^{n} (u,v)^p,\ u,v \in X,$$

H^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці H [213].

Теорема 1.5. *Нехай виконується умова*

$$Z\vec{F}_H = \vec{0}, \tag{1.17}$$

тоді формула

$$p(x) = q(x) + \left\langle \vec{F}_H - \vec{q}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \right\rangle \tag{1.18}$$

коли $q(x) \in \Pi_n$ *описує всю множину операторних поліномів типу Ерміта* n*-го степеня, що відповідає інтерполяційним умовам* (1.13).

Із множини (1.18) виділено підмножину інтерполянтів, що зберігають багаточлени відповідного степеня та знайдено умову інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі (1.13):

$$rgH \geq \min(M, n+1),$$

де M — кількість інтерполяційних умов (1.13).

Як зазначалося вище, операторна задача Ерміта-Біркгофа виникає у випадку, коли в інтерполяційних умовах (1.13) відсутні деякі диференціали Гато. У векторах $\vec{F}_H$, $\vec{q}_H$ та матриці H викреслимо ті рядки та стовпці, які відповідають диференціалам Гато, що відсутні в умовах (1.13). З врахуванням цих позначень, Макаровим В. Л. та Хлобистовим В.В. показано, що у разі виконання умови (1.17) поліном (1.18), коли $q \in \Pi_n$, описує всю множину операторних поліномів типу Ерміта-Біркгофа n-го степеня у гільбертовому просторі. Використовуючи результати робіт [177], [199] (теорему Поліа) авторами монографій знайдено умови інваріантної розв'язуваності цієї задачі.

У роботі [9] розглянуто задачу інтерполяції функції двох змінних в обмеженій області за відомими значеннями на множині кривих, які задані параметрично. На підставі результатів із [218] для наближення функції авторами побудовано інтерполяційний поліном, який має мінімальну норму на множині інтерполянтів. Показано, що одержана інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

Інтерполяція Лагранжа та Ерміта функції однієї змінної узагальнено на функції від багатьох змінних в роботі P.Kergin [206]. Після цієї публікації з'явилась значна кількість публікацій щодо інтерполяції Кергіна [161], [162], [170], [169], [172], [221], [222]. В подальшому у [186] розглянуто інтерполяцію Кергіна на множині функцій багатьох змінних та у банахових просторах, де одержано формулу похибки для апроксимації голоморфних відображень. Розглянуто теорему про збіжність, яку можна застосовувати до операторів на банахових алгебрах, зокрема, на алгебрі квадратних матриць з комплексними коефіцієнтами. Зауважимо, що наведені в роботі інтерполяційні формули з точністю до еквівалентних перетворень інтегралів збігаються із формулами, що раніше одержані іншими авторами в [116], [108]. Із отриманих формул неможливо одержати класичні інтерполяційні багаточлени Ньютона для функцій багатьох змінних [12] на відміну від формул, що побудовані в роботі Макарова В. Л., Хлобистова В. В. та Демківа І. І. [82]. В останній роботі результати інтерполяції функцій багатьох змінних узагальнюються на функціонали та оператори, що визначені на лінійних топологічних і функціональних просторах. Із наведених в роботі [82] інтерполяційних формул, як частинний випадок, можна отримати раніше відомі [74], [77], [116], [108] та класичні інтерполяційні структури для функцій багатьох змінних [12].

Інтерполяційні операторні багаточлени Ньютона, які побудовані на основі інтегральних перетворень функції однієї та багатьох змінних, досліджено в роботах [31], [32], [34], [242]. Яновичем Л. О. та Ігнатенко М. В. отримано поліноми операторного інтерполювання типу Лагранжа та Ерміта відносно довільних та деяких конкретних чебишевських систем функцій [33], [155]. Окремі результати авторів узагальнені в [35], [243] для операторів, що задані на декартовому добутку функціональних та гільбертових просторах. В більшості випадків наведені формули є точними для спеціального класу операторних поліномів відповідного степеня. В [36] розглянуто проблему побудови та дослідження визначених на просторі прямокутних матриць інтерполяційних операторних багаточленів довільного фіксованого степеня.

Побудову та дослідження інтерполяційних формул у вигляді інтегральних ланцюгових дробів на континуальній множині вузлів розглянуто в роботах Макарова В. Л., Хлобистова В. В., Демківа І.І. [79], [81], [182].

Автори робіт [67], [68], [79] показали, що в нескінченновимірних просторах єдиності та інваріатності інтерполянта можна досягнути шляхом вибору вузлів, які залежать від дійсного параметра (континуальності вузлів). У [79] досліджено поліноміальне інтерполювання операторів $F : H \to Y$, де H — сепарабельний гільбертовий простір, Y — банаховий простір.

Авторами Яновічем Л. О. та Худяковим А. П. в роботах [145], [146] побудовано та досліджено узагальнені інтерполяційні багаточлени типу Ерміта-Бірхгофа. На їх основі одержано аналогічні матричні поліноми типу Лагранжа та Ерміта, знайдено клас матричних багаточленів, що є інваріантними відносно отриманих формул [156] , [158], [241].

Дослідження регулярності інтерполювання типу Ерміта-Біркхофа, різні постановки цієї задачі та деякі її застосування викладено в монографії [234]. Випадок одновимірної задачі інтерполяції Ерміта-Біркхофа та використання її для апроксимації розв'язку граничної задачі для рівняння Лапласа, а також двовимірний випадок цієї задачі розглянуто в [214]. Інтерполяції Ерміта-Біркхофа у випадку, коли задані значення похідних функції першого та другого порядку досліджено в роботі [244]. Інтерполяційні формули Ерміта-Біркхофа для функцій матричної змінної побудовані в [157].

В роботах Хлобистова В. В., Малишевої Т.М. [141], [142] досліджено точність інтерполяційних формул Ерміта для поліноміальних, аналітичних за Гато операторів та операторів, що мають скінченну кількість вищих похідних Фреше у випадку, коли значення оператора та його диференціалів Гато у вузлах інтерполяції є збуреними та доведено збіжність відповідних інтерполяційних процесів. Аналіз точності інтерполяційних формул Абеля-Гончарова проведено для поліноміальних операторів.

Узагальнення на банаховий простір інтерполяції Лагранжа та Ерміта-Біркхофа у випадку довільним чином розташованих вузлів інтерполювання розглянуто G. Allasia в [159], [160], де надано конструктивну характеристику класу кардинальних базисних функцій у банахових просторах, за допомогою яких розв'язано інтерполяційні задачі.

Достатньо часто формули операторної інтерполяції використовуються для розв'язання операторних рівнянь. Методи, що одержані таким чином називають інтерполяційними. Таким дослідженням присвячені роботи [39], [40], [77], [88], [117], [113].

Теорія операторної інтерполяції є актуальною та важливою для розв'язання багатьох задач прикладної математики. Ця дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку та посиленню деяких результатів робіт Макарова В. Л. та Хлобистова В. В., що пов'язані з поліноміальною операторною інтерполяцією в абстрактних гільбертових та скінченновимірних евклідових просторах, а також розробці та отриманню нових результатів в цій галузі. Наведемо основні результати, що одержано в дисертаційній роботі.

В другому розділі роботи в гільбертовому просторі з мірою знайдено оцінки точності інтерполяційних формул Лагранжа та досліджено збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора. Доведено, що в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу з мінімальною нормою. Показано, що в сепарабельному гільбертовому просторі з гаусовою мірою похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною. Доведено теорему про збіг інтерполяційного полінома мінімальної норми та інтерполянта, який побудований за методом ортогональних моментів, у випадку фіксованих інтерполяційних умов. В подальших дослідженнях ця теорема стала підґрунтям для отримання оцінок точності інтерполяційних формул та доведення збіжності інтерполяційного процесу, на послідовності вузлів, яка обрана певним чином.

Для нелінійного оператора у гільбертовому просторі з мірою побудовано інтерполяційні формули Лагранжа та показано, що інтерполянти асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня, що є важливим для дослідження точності інтерполяційних формул та для наближеного обчислення інтегралів за мірою.

У випадку збуреної вихідної інформації про оператор, що апроксимуємо, досліджено точність інтерполяції поліноміального і цілого операторів та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якого не покращує точності інтерполяції. Для цілого та поліноміального функціоналів, що визначені на просторах $L_2(0,1)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ та мають збурені значення у вузлах інтерполяції, знайдено оцінку точності у разі, коли скалярні добутки, що містяться в інтерполяційній формулі обчислюються наближено та одержано кількість інтерполяційних умов перевищення якої не покращує оцінку точності.

В скінченновимірному евклідовому просторі розглянуто задачу інтерполяції Лагранжа в умовах недовизначеності, тобто коли вихідної інформації недостатньо для побудови єдиного інтерполяційного полінома. Знайдено умови існування розв'язку у разі довільних значень функції у вузлах інтерполяції. При цьому показано, що розв'язок задачі єдиний і має мінімальну норму на множині інтерполяційних поліномів. В лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі досліджена точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Доведено, що інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

В третьому розділі в лінійному топологічному просторі для оператора однієї змінної знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду та наведено узагальнення інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних в сенсі визначення умов, за яких має місце континуальність відповідної множини вузлів.

В четвертому розділі дисертаційної роботи у гільбертовому просторі з мірою побудовано поліном типу Ерміта у випадку, коли задані значення нелінійного оператора та його перші диференціали Гато у вузлах. Доведено теорему про інтерполянт Ерміта, що має мінімальну норму на множині інтерполянтів з фіксованими інтерполяційними умовами. Теорему узагальнено для інтерполяційних умов Ерміта, що містять диференціали Гато до певного порядку включно. Побудовано інтерполяційні формули Ерміта та

Ерміта-Біркхофа, наведено інтерполянт Абеля-Гончарова, що є альтернативою відомим операторним інтерполянтам. Ці формули є більш простими за побудовою та асимптотично інваріантні щодо поліномів відповідного степеня. Наявність оцінок точності дозволяє застосовувати такі інтерполянти для наближення поліноміальних, цілих та диференційованих операторів. Досліджено точність та збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора в разі зростання кількості вузлів.

В скінченновимірному евклідовому просторі розглянуто інтерполяційні задачі Ерміта у випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато до першого та до другого порядків відповідно у вузлах інтерполяції. Показано, що ці задачі мають єдиний розв'язок мінімальної норми серед усіх інтерполянтів, що відповідають фіксованим інтерполяційним умовам. Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку цих задач в умовах недовизначеності, тобто коли вихідної інформації недостатньо, щоб однозначно побудувати інтерполяційний поліном. У лінійному нескінченновимірному нормованому просторі та в скінченновимірному евклідовому просторі показано, що інтерполяційний поліном Ерміта, що має мінімальну норму, яка породжена гаусовою мірою, містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтерполяційних формул Ерміта на поліномах відповідного степеня.

Розв'язано екстремальну задачу про інтерполянт Ерміта-Біркхофа мінімальної норми на множині інтерполяційних поліномів, які відповідають фіксованим інтерполяційним умовам.

В п'ятому розділі знайдено нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь (еквівалентні теоремі Кронекера-Капеллі) та нерівностей (еквівалентні теоремі С.М.Чернікова), пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах. Знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь. Розглянуто застосування інтерполяційних формул для розв'язання задачі побудови поверхонь, наведено алгоритм оберненої інтерполяції для лінійних операторних рівнянь на підставі інтерполяційного полінома мінімальної норми. Результати роботи також можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач таких, як: ідентифікація систем, розпізнавання образів, нейрології, балістики, економіки, тощо.

Джерела, що використані у розділі 1

Для написання даного розділу було використано 136 джерел [1], [4], [6] [8] – [12], [14], [15], [18], [19], [20], [23] – [26], [28], [30] – [34], [36], [38] – [42], [51], [52], [54], [55], [57], [58] – [64], [66], [68] – [79], [81], [82], [85], [87], [88], [93], [100], [102], [104], [108], [110], [113] – [117], [119], [121], [126], [133], [134], [141], [142], [145], [146], [150], [153] – [162], [164], [165], [169] – [172], [177], [180] – [183], [186], [187], [189] – [193], [195] – [199], [206], [212], [213], [214], [216], [217], [218], [221] – [227], [229] — [244], посилання на які зазначені в тексті розділу.

Розділ 2

Інтерполяційна задача Лагранжа в гільбертових та евклідових просторах

Одним із важливих аспектів теорії наближення операторів є поліноміальна інтерполяція, аналіз її точності та питання збіжності інтерполяційних процесів. Незначна кількість публікацій в цій області насамперед обумовлена неабиякими труднощами досліджень таких наближень. Для операторів n разів диференційованих за Гато та цілих, аналіз точності інтерполяції поліноміальними операторами наведено в роботах [77], [127]. Для операторів довільної нелінійності отримання оцінок точності такої інтерполяції є дуже складною проблемою і навіть тоді, коли в окремих випадках оцінки одержані, то вони мають суто теоретичний характер та мало корисні для прикладних задач. Але якщо операторна нелінійність поліноміальна, то оцінки точності інтерполяції більш конструктивні для застосування на практиці в порівнянні з випадками іншого вигляду нелінійності оператора. Крім того, відмітимо, що наближення (зокрема інтерполяція) поліноміальних операторів належать до дуже важливого класу практичних задач (наприклад, задача ідентифікації поліноміальних систем) [181].

В цьому розіділі буде проведено аналіз точності поліноміальних, цілих операторів та функціоналів у разі збуреної вихідної інформації про оператор (функціонал), що апроксимуємо, досліджено збіжність інтерполяційного процесу Лагранжа

2.1 Теореми про точність та збіжність інтерполяційного процесу в гільбертовому просторі з мірою

Нехай X, Y — гільбертові простори (X є сепарабельним), μ — деяка міра на X така, що її перший момент дорівнює нулю, а другий обмежений [17], B — кореляційний оператор міри, він є ядерним, $KerB = \emptyset$. Позначимо через Π_n множину (1.1) неперервних операторних поліномів степеня n. Оснастимо цю множину скалярним добутком

$$(P_1, P_2)_H = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left(L_k^{(1)}(v_1, v_2, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \ldots, v_k) \right)_Y \times \tag{2.1}$$

$$\times \mu(dv_k) \cdots \mu(dv_2) \mu(dv_1)$$

та, відповідно, нормою $\|P\|_H = (P, P)_H^{\frac{1}{2}}$, де $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}$ — k-лінійні операторні форми поліномів P_1, P_2 відповідно, $(\cdot, \cdot)_Y$ — скалярний добуток в Y. Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — система власних ортонормованих елементів оператора B, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — система відповідних власних значень, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$. Нехай надалі $x_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, тоді $Bx_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Введемо матрицю $V_m = \left\| \sum\limits_{k=0}^{n} (Bx_i, x_j)_X^k \right\|_{i,j=1}^{m}$, де $(\cdot, \cdot)_X$ — скалярний добуток в X та фіксований елемент $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in Y^m$. Визначимо задачу поліноміальної операторної інтерполяції таким чином: знайти поліном $P^I \in \Pi_n$, для якого виконуються інтерполяційні умови

$$P^I(Bx_i) = y_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{2.2}$$

В [128], [132] одержано інтерполяціний поліном $P^* \in \Pi_n$, що задовольняє умовам (2.2) та має мінімальну норму серед усіх інтерполяційних операторних поліномів степеня n. При цьому

$$P^*(x) = \left\langle \overline{y}, V_m^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(x_i, x)_X^k\}_{i=1}^m \right\rangle, \tag{2.3}$$

$$\|P^*\|_H^2 = \min_{P \in \Pi_n^I} \|P\|_H^2 = \left\langle\left\langle V_m^{-1}\overline{y}, \overline{y} \right\rangle\right\rangle,$$

$$\Pi_n^I = \left\{P : P \in \Pi_n, P(Bx_i) = y_i, i = \overline{1,m}\right\},$$

де $\langle \overline{z}, \overline{\alpha} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} z_i \alpha_i$, $\langle\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} (u_i, v_i)_Y$, $\overline{z} = \{z_i\}_{i=1}^m$, $\overline{u} = \{u_i\}_{i=1}^m$, $\overline{v} = \{v_i\}_{i=1}^m \in Y^m$, $\overline{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^m \in R^m$.

Нехай $P \in \Pi_n$, а y_i в (2.2) обираємо рівними $P(Bx_i)$, $i = \overline{1,m}$. В [129] доведено, що похибка інтерполяції Δ_m полінома P інтерполянтом P^* має вигляд

$$\Delta_m^2 = \|P - P^*\|_H^2 = \|P\|_H^2 - \varrho_m^2, \tag{2.4}$$

а послідовність

$$\varrho_m^2 = \left\langle\left\langle V_m^{-1}\overline{y}, \overline{y} \right\rangle\right\rangle$$

зростаюча

$$\varrho_1^2 \le \varrho_2^2 \le \varrho_3^2 \le \cdots . \tag{2.5}$$

Із співвідношень (2.4), (2.5) маємо такі важливі наслідки: в разі зростання кількості вузлів інтерполяції інтерполяційна похибка може бути тільки зменшена; з урахуванням (2.4) послідовність $\{\varrho_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена зверху, а тому має границю ϱ_∞^2, коли $m \to \infty$. Отже,

$$\inf_m \Delta_m^2 = \Delta_\infty^2 = \|P\|_H^2 - \varrho_\infty^2.$$

В [129] також доведено, що у разі виконання умови

$$\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda_i}\right)^2 \to 0, \quad m \to \infty \tag{2.6}$$

найменше значення похибки інтерполяції дорівнює

$$\inf_m \Delta_m^2 = \Delta_\infty^2 = \|P - P(0)\|_H^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\|P(Bx_i) - P(0)\|^2, \tag{2.7}$$

а в разі $n = 1$ інтерполяційний процес збігається до оператора P в нормі $\|\cdot\|_H$, коли $m \to \infty$. Таким чином, має місце теорема 2.1 [207].

Теорема 2.1. *В гільбертовому просторі з мірою в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного операторного процесу* (2.3) *до оператора $P \in \Pi_n$. Якщо ж $n = 1$, то інтерполяційний процес збігається до оператора P в нормі $\|\cdot\|_H$, коли $m \to \infty$.*

В подальшому, ми покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ похибка інтерполяції Δ_m може бути зроблена меншою від ε. При цьому реалізацію нерівності $\Delta_m < \varepsilon$ можна здійснити одночасно двома шляхами — як за рахунок збільшення кількості вузлів інтерполяції (послідовність $\{\varrho_m^2\}_{m=1}^\infty$ є зростаючою), так і за рахунок зменшення норми $\|P\|_H$ (вибір відповідної міри μ). Надалі будемо вважати міру μ на просторі X гаусовою та перейдемо до таких міркувань. Спочатку пошлемося на результат, одержаний Ю. В. Прохоровим [97]. Нехай $\mathbf{N}$ — сукупність всіх ядерних додатних самоспряжених операторів, визначених на X. Тоді кореляційний оператор будь-якої гаусової міри належить класу $\mathbf{N}$ і якщо $B \in \mathbf{N}$, то

$$\varphi(x) = \exp\{-1/2(Bx, x)_X\}, \quad m_\mu = 0$$

є характеристичним функціоналом деякої гаусової міри μ на X (m_μ — середнє значення міри).

Визначимо оператор B на просторі X за формулою

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k)_X e_k, \quad x \in X, \quad \lambda_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty, \tag{2.8}$$

де $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в X. Неважко бачити, що B у формулі (2.8) є ядерним, додатнім, самоспряженим оператором, для якого e_k, $k = 1, 2, \ldots$ є власними елементами з відповідними власними значеннями λ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Оберемо $\lambda_k = q^k$, $q \in (0, 1)$. Очевидно, що ці λ_k задовольняють умові (2.8). Для фіксованого q з інтервалу $(0, 1)$ існує оператор B в (2.8), який за Ю. В. Прохоровим визначає гаусову міру μ на X [97]. Ця міра, в свою чергу, породжує скалярний добуток $(\cdot, \cdot)_H$ та норму $\|\cdot\|_H$ на множині Π_n. В подальшому розмірковуємо таким чином: на підставі формули (2.4), (2.5) маємо

$$\Delta_m^2 \to \Delta_\infty^2, \quad \text{коли} \quad m \to \infty.$$

Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $M = M(\varepsilon)$, що коли $m > M$, то

$$\Delta_m^2 - \Delta_\infty^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2.9}$$

З іншого боку, згідно (2.7),

$$\Delta_\infty^2 = \|P\|_H^2 - \varrho_\infty^2 < \|P - P(0)\|_H^2 \tag{2.10}$$

Тепер покажемо, що за рахунок вибору q для заданого $\varepsilon > 0$ величина Δ_∞^2 може бути зроблена меншою за $\dfrac{\varepsilon^2}{2}$. Дійсно, покажемо це. На підставі (2.1) виконується рівність

$$\|P - P(0)\|_H^2 = \|L_1\|_H^2 + \|L_2\|_H^2 + \cdots + \|L_n\|_H^2. \tag{2.11}$$

Далі, з урахуванням співвідношення [17]

$$\int_X (x,u)_X (x,v)_X \mu(dx) = (Bu,v)_X,$$

маємо

$$\|L_1\|_H^2 = \int_X (L_1(v), L_1(v))_Y \, \mu(dv) =$$

$$= \int_X \left(L_1\left(\sum_{i=1}^{\infty} (v,e_i)_X e_i\right), L_1\left(\sum_{k=1}^{\infty} (v,e_k)_X e_k\right)\right)_Y \mu(dv) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{\infty} (L_1(e_i), L_1(e_k))_Y \int_X (v,e_i)_X (v,e_k)_X \mu(dv) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{\infty} (L_1(e_i), L_1(e_k))_Y \, (Be_i, e_k)_X = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|L_1(e_i)\|^2, \tag{2.12}$$

$$\|L_2\|_H^2 = \int_X \int_X (L_2(v_1,v_2), L_2(v_1,v_2))_Y \, \mu(dv_2)\mu(dv_1) =$$

$$= \int_X \int_X \left(L_2\left(\sum_{i=1}^{\infty} (v_1,e_i)_X e_i, \sum_{k=1}^{\infty} (v_2,e_k)_X e_k\right),\right.$$

$$\left. L_2\left(\sum_{j=1}^{\infty} (v_1,e_j)_X e_j, \sum_{p=1}^{\infty} (v_2,e_p)_X e_p\right)\right)_Y \mu(dv_2)\mu(dv_1) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{\infty} \sum_{j,p=1}^{\infty} (L_2(e_i,e_k), L_2(e_j,e_p))_Y \int_X (v_1,e_i)_X (v_1,e_j)_X \mu(dv_1) \times$$

$$\times \int_X (v_2,e_k)_X (v_2,e_p)_X \mu(dv_2) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{\infty} \sum_{j,p=1}^{\infty} (L_2(e_i, e_k), L_2(e_j, e_p))_Y \, \lambda_i (e_i, e_j)_X \lambda_k (e_k, e_p)_X =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{\infty} \lambda_i \lambda_k \|L_2(e_i, e_k)\|^2, \tag{2.13}$$

$$\|L_n\|_H^2 = \int\limits_X \int\limits_X \cdots \int\limits_X (L_2(v_1, v_2, \ldots, v_n), L_n(v_1, v_2 \ldots, v_n))_Y \times$$

$$\times \mu(dv_n) \cdots \mu(dv_2)\mu(dv_1) =$$

$$= \int\limits_X \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left(L_n \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} (v_1, e_{i_1})_X e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{\infty} (v_2, e_{i_2})_X e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{\infty} (v_n, e_{i_n})_X e_{i_n} \right), \right.$$

$$\left. L_n \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} (v_1, e_{j_1})_X e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{\infty} (v_2, e_{j_2})_X e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{\infty} (v_n, e_{j_n})_X e_{j_n} \right) \right)_Y \times$$

$$\times \mu(dv_n) \cdots \mu(dv_2)\mu(dv_1) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{\infty} (L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}), L_n(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}))_Y \times$$

$$\times \int\limits_X (v_1, e_{i_1})_X (v_1, e_{j_1})_X \mu(dv_1) \int\limits_X (v_2, e_{i_2})_X (v_2, e_{j_2})_X \mu(dv_2) \cdots \times$$

$$\times \int\limits_X (v_n, e_{i_n})_X (v_n, e_{j_n})_X \mu(dv_n) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{\infty} (L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}), L_n(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}))_Y \times$$

$$\times \lambda_{i_1}(e_{i_1}, e_{j_1})_X \lambda_{i_2}(e_{i_2}, e_{j_2})_X \cdots \lambda_{i_n}(e_{i_n}, e_{j_n})_X =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{\infty} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n} \|L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})\|^2. \tag{2.14}$$

Підставимо (2.12) — (2.14) в нерівності (2.10), (2.11). В результаті одержимо

$$\Delta_\infty^2 < \|P - P(0)\|_H^2 = \sum_{i_1=1}^{\infty} \lambda_{i_1} \|L_1(e_{i_1})\|^2 + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{\infty} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \|L_2(e_{i_1}, e_{i_2})\|^2 +$$

$$+ \cdots + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{\infty} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n} \|L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})\|^2 <$$

$$< \|L\|^2 \left\{ \frac{q}{1-q} + \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{1-q}\right)^n \right\} =$$

$$= \frac{q}{(1-q)^n} \left\{ \frac{(1-q)^n - q^n}{1-2q} \right\} \|L\|^2, \tag{2.15}$$

де $q \neq 1/2$, $\|L\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \|L_k\|$, $\|L_k\|$ — традиційна норма k-лінійного оператора. З нерівності (2.15) випливає, що для заданого $\varepsilon > 0$ можна зафіксувати таке q із інтервалу $(0, 1)$, що

$$\Delta_\infty^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2.16}$$

Враховуючи (2.9), (2.16), одержимо

$$\Delta_m^2 < \Delta_\infty^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2.$$

Таким чином, було доведено таку теорему [130]:

Теорема 2.2. *Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $M = M(\varepsilon)$ і така гаусова міра $\mu = \mu(\varepsilon)$ на гільбертовому сепарабельному просторі X, що коли $m > M$, то*

$$\Delta_m = \|P - P^*\|_H < \varepsilon,$$

де $\|\cdot\|_H$ *визначається континуальним інтегралом за гаусовою мірою* μ.

Зауваження 2.1. *В [134] метод ортогональних моментів [99] для визначення коефіцієнтів Фур'є ядер функціональних поліномів інтегрального вигляду було узагальнено на операторні поліноми, що визначені в абстрактному гільбертовому просторі. Там же було побудовано інтерполяційний процес для операторного полінома у випадку зростання кількості вузлів. Але для побудови цього інтерполянта потрібно використати значення операторного полінома як у самих вузлах так і в будь-яких сумах цих вузлів, кількість яких не перевищує* n. *Зрозуміло, що це на порядки по* m *більше, ніж для побудови інтерполянта* (2.3).

2.2 Збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми в гільбертовому просторі з мірою до поліноміального оператора

На практиці поширені нелінійні системи, що описуються операторними поліномами [226]. Побудова математичних моделей таких систем призводить до задачі поліноміальних наближень, зокрема, до задачі поліноміальної інтерполяції. Важливе значення мають оцінки точності поліноміальних наближень та теореми про збіжність відповідних інтерполяційних процесів у випадку зростання кількості вузлів інтерполювання. У розділі 2.1 показано, що в гільбертовому просторі з мірою в загальному випадку немає збіжності інтерполяційного процесу з мінімальною нормою, який побудовано в [77]. В цьому розділі буде показано, що існує послідовність вузлів інтерполяції на якій інтерполяційний процес з мінімальною нормою збігається.

Нехай X, Y — дійсні гільбертові простори (X — сепарабельний), $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в просторі Y, Π_n — множина неперервних операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n, що визначається за формулою (1.1). Нехай μ — деяка міра на X така, що її перший момент дорівнює нулю, а другий обмежений [17], [27], B — кореляційний оператор міри μ, ядерний та $KerB = \emptyset$. Оснастимо множину Π_n скалярним добутком, що визначається за формулою (2.1). Відповідно до скалярного добутку на Π_n введемо норму $\|P\|_H = (P, P)_H^{1/2}$. Нехай задані системи елементів $\{x_i\}_{i=1}^m, \{Bx_i\}_{i=1}^m \subset X$. Розглянемо матрицю

$$\Gamma_m = \left\| \sum_{p=0}^{n} (Bx_i, x_j)_X^k \right\|_{i,j=1}^m ,$$

де $(\cdot, \cdot)_X$ — скалярний добуток в X. Нехай Z — матриця, рядками якої є координати ортонормованої системи власних векторів матриці Γ_m з нульовим власним числом. Нехай $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in Y^m$ заданий. В монографії [77] показано, що задача поліноміального операторного інтерполювання, тобто задача знаходження поліному, що відповідає умовам

$$P_n(Bx_i) = y_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad P_n \in \Pi_n, \tag{2.17}$$

має розв'язок лише в тому випадку, коли

$$Z\overline{y} = \overline{0}.$$

При цьому існує множина розв'язків цієї задачі (1.10), а інтерполяційний операторний поліном, що має мінімальну норму серед усіх цих розв'язків має вигляд (1.11), відповідає інтерполяційним умовам (2.17) та є єдиним.

Нехай $\{e_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована система власних елементів оператора B. Оберемо вузли інтерполяції у такий спосіб: $Bx_0 = 0$, а решту N вузлів $Bx_i, i = \overline{1, N}$, подамо у вигляді всіляких сум елементів e_i по одному, по два і т.д. до m доданків включно, тобто

$$Bx_i = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k}, \;\; 1 \le k \le n, \;\; 1 \le i_j \le m.$$

Неважко бачити, що $N = \sum\limits_{k=1}^{m} C_{m+k-1}^{k}$. При цьому $x_0 = 0$, а $x_i, i = \overline{1, N}$, визначаються таким же чином, як і Bx_i, але за системою елементів $\dfrac{e_i}{\lambda_i}$, де λ_i — власні числа оператора B, що відповідають елементам $e_i, i = \overline{1, m}$.

У роботі [99] розв'язано задачу ідентифікації поліноміальних функціональних систем методом ортогональних моментів з наступним застосуванням схем виділення однорідних функцій. У [134] цей метод узагальнюється на випадок побудови інтерполянта для поліноміальних операторів у гільбертовому просторі. Розглянемо розв'язок задачі (2.17) методом ортогональних моментів [134] на послідовності вузлів $Bx_i, i = \overline{0, N}$. При цьому інтерполяційний операторний поліном за системою вузлів $Bx_i, i = \overline{0, N}$, має вигляд

$$P_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k \left(\sum_{i_k=1}^{m} (x, e_{i_k})_X e_{i_k} \right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{m} L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})_X (x, e_{i_2})_X \cdots (x, e_{i_k})_X, \qquad (2.18)$$

де $L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ визначаються єдиним чином на підставі інтерполяційних умов

$$P_n^I(Bx_i) = y_i, \;\; i = \overline{0, N}, \qquad (2.19)$$

за допомогою рекурентної процедури, що викладена в [134]. Ця процедура еквівалентна розв'язанню системи лінійних рівнянь (2.19) відносно невідомих $L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$. Звідси випливає, що матриця системи (2.19) має обернену.

Розглянемо тепер розв'язок задачі (2.17) на послідовності вузлів Bx_i, $i = \overline{0, N}$, за допомогою інтерполяційного полінома, який має мінімальну норму серед усіх розв'язків інтерполяційної задачі (2.19). Попередньо зробимо таке зауваження. Інтерполянт (2.18) є розв'язком задачі (2.17) на послідовності вузлів $Bx_i, i = \overline{0, N}$, у разі будь-яких значень $y_i, i = \overline{0, N}$, тобто ця задача інваріантно розв'язувана. З цього факту випливає, що $Z\overline{y} = \overline{0}$ при будь-якому $\overline{y}$, а це означає, що $Z \equiv 0$. Остання рівність рівносильна тому, що матриця Γ_{N+1}, що побудована за системою елементів $x_i, i = \overline{0, N}$, має обернену. Таким чином інтерполянт мінімальної норми (1.11) на послідовності вузлів $Bx_i, i = \overline{0, N}$, набуває вигляду

$$P_n^*(x) = \left\langle \overline{y}, \Gamma_{N+1}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(x, x_i)_X^k\}_{i=0}^N \right\rangle, \quad \overline{y} \in Y^{N+1}. \tag{2.20}$$

Розкриємо дужки $< \cdot, \cdot >$ у (2.20) та зведемо формулу для $P_n^*(x)$ до вигляду (2.18), де замість $L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ будуть деякі значення $y_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in Y$. Послідовність цих значень є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$P_n^*(Bx_i) = y_i, \quad i = \overline{0, N}. \tag{2.21}$$

Порівняємо системи рівнянь (2.19), (2.21). Матриці цих систем співпадають. Оскільки, як зазначено вище, матриця системи (2.19) невироджена, то і матриця системи (2.21) має обернену. Звідси випливає, що

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_k} = L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}).$$

Таким чином, нами доведено таку теорему

Теорема 2.3. *Інтерполяційні поліноми $P_n^I(x)$ та $P_n^*(x)$, що побудовані за системою вузлів $Bx_i, i = \overline{0, N}$, тотожньо співпадають.*

Приклад 2.1. *Розглянемо побудову інтерполянта мінімальної норми другого степеня (2.20) у випадку, коли задані значення оператора $F_2(x)$ у вузлах*

$$x_1 = 0, x_2 = e_1, x_3 = e_2, x_4 = 2e_1, x_5 = 2e_2, x_6 = e + 1 + e_2.$$

Нехай система вузлів $\{e_i\}_{i=1,2} \subset X$ є ортонормованою та задані значення оператора : $\overline{y} = \{F_2(x_i)\}_{i=1}^{6}$. Для цього випадку $N+1=6$, матриця Γ_6 та обернена до неї Γ_6^{-1} мають вигляд:

$$\Gamma_6 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 21 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 21 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \end{Vmatrix}, \Gamma_6^{-1} = \begin{Vmatrix} 6,5 & -4 & -4 & 1 & 1 & 0,5 \\ -4 & 5,5 & 0,5 & -1,5 & 0 & -0,5 \\ -4 & 0,5 & 5,5 & 0 & -1,5 & -0,5 \\ 1 & -1,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{Vmatrix}.$$

Визначемо вектор $\Gamma_6^{-1} \sum_{k=0}^{2} \{(x, x_i)_X^k\}_{i=1}^{6} =$

$$= \begin{Vmatrix} 1 - 1,5(x,e_1) + 0,5(x,e_1)^2 - 1,5(x,e_2) + 0,5(x,e_2)^2 + (x,e_1)(x,e_2) \\ 2(x,e_1) - (x,e_1)^2 - (x,e_1)(x,e_2) \\ 2(x,e_2) - (x,e_2)^2 - (x,e_1)(x,e_2) \\ -0,5(x,e_1) + (x,e_1)^2 \\ -0,5(x,e_2) + (x,e_2)^2 \\ (x,e_1)(x,e_2) \end{Vmatrix}$$

.

Отже, після підстановки в (2.20) *отримаємо*

$$P_2^*(x) = F_2(0) + \{2F_2(e_1) - \frac{3}{2}F_2(0) - \frac{1}{2}F_2(2e_1)\}(x, e_1) +$$

$$+\{2F_2(e_2)-\frac{3}{2}F_2(0)-\frac{1}{2}F_2(2e_2)\}(x,e_2)+\frac{1}{2}(x,e_1)^2\{F_2(2e_1)-2F_2(e_1)+F_2(0)\}+$$

$$+\frac{1}{2}(x,e_2)^2\{F_2(2e_2)-2F_2(e_2)+F_2(0)\}+$$

$$+(x,e_1)(x,e_2)\{F_2(e_1+e_2)-F_2(e_1)-F_2(e_2)+F_2(0)\}.$$

Тепер для побудови інтерполянта використаємо формулу (2.18) *($n=2$):*

$$P_2^I(x)=L_0+\sum_{i=1}^{2}L_1(e_i)(x,e_i)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}L_2(e_i,e_j)(x,e_i)(x,e_j).$$

Для визначення операторних форм $L_1(e_i), L_2(e_i,e_j)$ скористаємося рекурентними формулами із [134]. Маємо: $L_0=F_2(0)$,

$$L_2(e_1,e_2)=\frac{1}{2}\{F_2(e_1+e_2)-F_2(e_1)-F_2(e_2)+F_2(0)\},$$

$$L_2(e_1,e_1)=\frac{1}{2}\{F_2(2e_1)-2F_2(e_1)+F_2(0)\},$$

$$L_2(e_2,e_2)=\frac{1}{2}\{F_2(2e_2)-2F_2(e_2)+F_2(0)\},$$

$$L_1(e_1)=2F_2(e_1)-\frac{3}{2}F_2(0)-\frac{1}{2}F_2(2e_1),$$

$$L_1(e_2)=2F_2(e_2)-\frac{3}{2}F_2(0)-\frac{1}{2}F_2(2e_2).$$

Після підстановки $L_1(e_i), L_2(e_i,e_j)$ в інтерполяційну формулу, одержимо, що $P_2^*(x)\equiv P_2^I(x)$.

Нехай тепер $P_n(x)$ — неперервний поліноміальний оператор із множини Π_n та нехай в (2.21) $y_i = P_n(Bx_i), i = \overline{0, N}$. Розглянемо питання про збіжність інтерполяційного процесу $P_n^*(x)$ до $P_n(x)$ у випадку, коли $m \to \infty$ в метриці простору H. Доведемо таку теорему [207]:

Теорема 2.4. *Має місце рівність*

$$\lim_{m\to\infty} \|P_n - P_n^*\|_H = 0.$$

Доведення. Дійсно, відповідно до результатів монографії [85] виконується рівність

$$\lim_{m\to\infty} \|P_n - P_n^*\|_H^2 = \lim_{m\to\infty} \left[\|P_n\|_H^2 - \|P_n^*\|_H^2\right] =$$

$$= \|P_n\|_H^2 - \lim_{m\to\infty} \|P_n^*\|_H^2, \tag{2.22}$$

$$\|P_n^*\|_H^2 = \|P_n^I\|_H^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1})_X e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{m} (v_k, e_{i_k})_X e_{i_k} \right) \right\|^2 \times \tag{2.23}$$

$$\times \mu(dv_1) \cdots \mu(dv_k).$$

Оскільки операторні форми $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ є неперервними, а у випадку, коли $KerB = \emptyset$ ортонормована система власних векторів оператора B може бути обраною базисом простору X [7], то

$$\left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1})_X e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{m} (v_k, e_{i_k})_X e_{i_k} \right) \right\|^2 \leq \|L_k\|^2 \|v_1\|^2 \cdots \|v_k\|^2.$$

Права частина цієї нерівності інтегровна за мірою μ:

$$\int\limits_X \cdots \int\limits_X \|L_k\|^2 \|v_1\|^2 \cdots \|v_k\|^2 \mu(dv_1) \cdots \mu(dv_k) =$$

$$= \|L_k\|^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right)^k = \|L_k\|^2 (TrB)^k.$$

На підставі теореми Лебега одержимо

$$\lim_{m \to \infty} \|P_n^*\|_H^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lim_{m \to \infty} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1})_X e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{m} (v_k, e_{i_k})_X e_{i_k} \right) \right\|^2 \times$$

$$\times \mu(dv_1) \cdots \mu(dv_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lim_{m \to \infty} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} (v_1, e_{i_1})_X e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{\infty} (v_k, e_{i_k})_X e_{i_k} \right) \right\|^2 \times$$

$$\times \mu(dv_1) \cdots \mu(dv_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \|L_k(v_1, \ldots, v_k)\|^2 \mu(dv_1) \cdots \mu(dv_k) = \|P_n\|_H^2.$$

З останньої рівності на підставі (2.22) та (2.23) одержимо збіжність $P_n^*(x)$ до $P_n(x)$ в метриці простору H. Теорему 2.4 доведено. □

Зауваження 2.2. *В задачі інтерполяції поліноміальних операторів для інтерполянта, що побудований за методом ортогональних моментів, за вузли інтерполяції було обрано всілякі суми*

$$e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots e_{i_k}, \ \ 1 \leq k \leq n, \ \ 1 \leq i_j \leq m.$$

Можна показати, що вузлами інтерполювання будуть також всі точки лінійного підпростору, що утворений ортонормованою системою елементів $\{e_i\}_{i=1}^{m}$. *Це випливає безпосередньо із побудови* $P_n^I(x)$, *оскільки*

$$P_n^I(x) = P_n(x),$$

коли $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \cdots \alpha_m e_m$, $\alpha_i \in R^1$, $i = \overline{1, m}$.

2.3 Операторний інтерполянт Лагранжа, що є асимптотично точним на поліномах відповідного степеня

В нескінченновимірному гільбертовому просторі інтерполяційна задача в загальному випадку має множину розв'язків, а знаходження інтерполянтів, що зберігають поліноми відповідного степеня пов'язано з певними труднощами. В [27], [186] наведено результати по побудові інтерполянтів типу Ньютона, що є асимптотично точними на поліномах відповідного степеня. Відмітимо, що умова асимптотичного збереження багаточленів належить в цих роботах до постановки інтерполяційної задачі, при цьому реалізація інтерполяційних формул вимагає варіацій чи похідних вищих порядків та відповідних кратних інтегралів Рімана-Стільт'єса за оператором скалярного аргументу. Властивість збереження інтерполяційними поліномами багаточленів того ж степеня є дуже важливою для прикладних задач, а саме таких, як: побудова квадратурних формул у випадку інтегрування за мірою; одержання оцінок точності інтерполяції та теорем про збіжність послідовності інтерполянтів при зростанні числа вузлів до оператора, що інтерполюємо, а також оцінок, які використовують нерівність Лебега та ін.

В цьому параграфі буде розглянуто операторний інтерполяційний поліном, який побудовано в [134]; показано, що він асимптотично (при збільшенні числа вузлів) зберігає багаточлени відповідного степеня та має мінімальну норму серед всієї множини розв'язків посталеної задачі інтерполювання [77], [85]. При цьому для його побудови необхідно знати лише інформацію про вузлові значення оператора, якщо розглядаємо задачу типу Лагранжа. Зауважимо, що на практиці поширені нелінійні системи поліноміального вигляду [194]. Якщо інтерполянт асимптотично (множина вузлів є зліченою) зберігає поліноми, а для задач апроксимації операторів в загальному випадку задається точність наближення, то для її забезпечення можна визначити необхідне число вузлів і немає потреби вимагати нескінченного його зростання .

Нехай $X,\ Y$ — гільбертові простори (X — сепарабельний), Π_n — множина операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n, що визначається за формулою (1.1), $\{e_i\}_{i=1}^m \subset X$ — елементи базисної ортонормованої системи в X, а множину $\mathfrak{J}(m)$, що побудована за системою елементів $e_i,\ \ i=\overline{1,m}$, визначимо таким чином

$$\mathfrak{J}(m)=\{0,\ e_{i_1}+e_{i_2}+\cdots+e_{i_k},\ k=\overline{1,n}, i_j=\overline{1,m},\ m\geq n\}. \tag{2.24}$$

Число елементів множини $\mathfrak{J}(m)$ дорівнює $1+N$, $N=\sum\limits_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^{k}$. Оператор $F : X \to Y$, в загальному випадку нелінійний, заданий своїми значеннями $F(x_i) \in Y,\ \ i=\overline{0,N}$, на множині $\mathfrak{J}(m)$. Інтерполяційна задача Лагранжа полягає у наступному: потрібно знайти такий поліном $P_{mn} : X \to Y$, $P_{mn} \in \Pi_n$, що відповідає умовам

$$P_{mn}(x_i)=F(x_i),\ i=\overline{0,N},\ x_i\in\mathfrak{J}(m). \tag{2.25}$$

Узагальнюючи метод ортогональних моментів [134], інтерполянт $P_{mn}(x)$

будемо шукати на послідовності вузлів $x_i \in \mathfrak{J}(m),\ i = \overline{0, N}$ у вигляді

$$P_{mn}(x; F) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{m} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_k}) \tag{2.26}$$

де $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в X, $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F) \in Y$ — невідомі коефіцієнти, що є симетричними відносно своїх індексів, кількість яких дорівнює $N+1$.

Інтерполянт (2.26) є розв'язком поставленої задачі, якщо

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F), \quad k = \overline{1, n},$$

визначаються за рекурентними співвідношеннями:

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n}(F) = \frac{1}{n!} \{ F_n(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_n}) +$$

$$+ \big[F_n(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_{n-1}}) + \cdots + F_n(e_{i_2} + e_{i_3} + \cdots + e_{i_n}) \big] -$$

$$- \big[F_n(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_{n-2}}) + \cdots + F_n(e_{i_3} + e_{i_4} + \cdots + e_{i_n}) \big] + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \left[F_n(e_{i_1}) + F_n(e_{i_2}) + \cdots + F_n(e_{i_n}) \right] + (-1)^n F_n(0) \big\}, \tag{2.27}$$

для знаходження $a_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}(F)$ замінемо у формулі (2.27) n на $n-1$, а значення $F_n(x)$ на множині вузлів $\mathfrak{J}(m)$ на

$$F_n(x) - \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{m} a_{i_1 i_2 \ldots i_n}(F)(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_n})$$

і т.д. Відмітимо, що коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)$, число яких дорівнює $N+1$, можна знайти із системи (2.25), що складається із $N+1$ рівняння. При цьому невідомі, що визначені за допомогою рекурентної процедури та із системи

(2.25) співпадають [77]. Зауважимо, що інтерполянт (2.26), (2.27) розв'язує задачу (2.25) при будь-яких значеннях оператора у вузлах $F(x_i) \in Y$, $i = \overline{1,m}$, $x_i \in \mathfrak{J}(m)$, тобто дана задача інваріантно розв'язувана. А отже, умова існування розв'язку (1.9) виконується $\forall F(x_i) \in Y$, $x_i \in \mathfrak{J}(m)$, $i = \overline{1,m}$. Це означає, що в цьому випадку матриця із теореми 1.2 $Z \equiv 0$.

Розглянемо розв'язок інтерполяційної задачі (2.25) для поліноміального оператора $F(x) = F_n(x) \in \Pi_n$,

$$F_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n.$$

Значення операторних форм $L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$, $k = \overline{1,n}$, знайдемо на підставі рекурентної процедури (2.27). Одержимо, що на підпросторі, який утворений базисом $\{e_i\}_{i=1}^m \subset X$ поліном $P_{mn}(x)$ тотожно співпадає з $F_n(x)$. А на всьому просторі X інтерполянт співпадає з $F_n(x)$ асимптотично $(m \to \infty)$, оскільки $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормований базис в X,

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \to L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}), \quad m \to \infty$$

Таким чином довели теорему 2.5:

Теорема 2.5. *Послідовність інтерполяційних поліномів типу Лагранжа* (2.26) $(m = n, n+1), \ldots$ *має властивість*

$$\lim_{m \to \infty} P_{mn}(x; F) = F_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{2.28}$$

Відмітимо що інтерполянт (2.26) — єдиний, має мінімальну норму серед всієї множини інтерполяційних поліномів на підставі теореми 2.3, що є розв'язками поставленої задачі і при цьому не має обмежень на кількість вузлів та степінь полінома (числа m та n не пов'язані між собою), а для побудови (2.26) необхідно знайти, лише інформацію про значення оператора у вузлах [139]. Оскільки в [77] побудовано всю множину інтерполяційних поліномів Лагранжа (формула (1.10)), то поліном (2.26), (2.27) належить множині інтерполянтів (1.10).

Розглянемо розв'язок інтерполяційної задачі (2.25) на підставі теореми 1.3. Припустимо, що оператор $F(x)$ диференційований за Гато n разів, $T_n(F;x)$ — поліном Тейлора для $F(x)$, вузли інтерполяції оберемо довільним чином, але при цьому нехай виконується умова (1.9). Покладемо $Q_n(x) = T_n(F;x)$ у формулі (1.10). Для поліноміального оператора $F_n(x)$ маємо:

$$P_{mn}(F_n;x) = T_n(F_n;x) + \left\langle \vec{F}_n - \vec{T}_n, \Gamma^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x,x_i)^p\}_{i=1}^{m} \right\rangle = F_n(x),$$

оскільки $T_n(F_n;x) = F_n(x)$. Зауважимо, що побудова для оператора полінома Тейлора є більш складною задачею, ніж визначення інтерполянта на підставі формули (1.10). Наведемо важливий наслідок, що доведено в роботі [43]

Теорема 2.6. *Якщо оператор $F(x)$ n разів диференційований за Гато, то операторний інтерполяційний поліном* (1.10) *у випадку, коли*

$$Q_n(x) = T_n(F_n;x),$$

зберігає багаточлени відповідного степеня. Якщо оператор $F(x)$ не диференційований за Гато, $F(x) \in \Pi_n$, то існує послідовність вузлів $\mathfrak{J}(m)$ (2.24) *така, що побудований інтерполянт із* (1.10) *є асимптотично точним на поліномах відповідного степеня.*

Зауважимо, що існують інтерполяційні формули [27], [78], [186], що є точними на поліномах на всьому просторі. Ці формули є узагальненням інтерполяційних формул Ньютона для векторних та деяких функціональних просторів, а для їх побудови необхідно існування кратних інтегралів Рімана-Стільт'єса по оператору скалярного аргументу від варіацій або похідних вищих порядків оператора F інтегралів Рімана від змішаних похідних функціоналу F. Наведемо інтерполяційну формулу типу Ньютона [85]

$$L_n[F;x] = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} F[x_0;x_1;\ldots;x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k_1}),$$

де $F[x_0;x_1;\ldots;x_k]h_k h_{k-1}\ldots h_1$ — розділена різниця k-го порядку за вузлами $x_0,x_1,\ldots,x_k \in X$ для оператора F, яка задається формулою

$$F[x_0;x_1;\ldots;x_k]h_k h_{k-1}\ldots h_1 =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^{\tau_1} \cdots \int\limits_a^{\tau_{k-1}} \delta^k F\left[x_0 + \sum_{i=1}^{k} g(\tau_i;x_i - x_{i-1}); g'_{\tau_k}(\tau_k;h_k)\cdots g'_{\tau_1}(\tau_1;h_1)\right]. \tag{2.29}$$

Тут $g(\tau;h) : X \to X$ — лінійний на просторі X оператор ($h \in X$), що залежить від числового параметру $\tau \in [a,b]$, задовольняє умовам

$$g(a;h) = 0, \quad g(b;h) = h$$

для будь-якого $h \in X$ та диференційований за τ; $a,b \in R$; $\delta^k F[z;g_k\cdots g_1]$ — варіація k-го порядку оператора F в точці z за напрямками $g_1,\ldots,g_k$, $z,g_i \in X$, $i=\overline{1,k}$.

Якщо порівняти інтерполяційні формули (2.26), (2.29), то одержимо, що простішою за конструктивною побудовою є формула (2.26), оскільки не потребує континуальної інформації про варіації або похідні Гато та кратних інтегралів від них. Що ж стосується точних на поліномах формул типу

(2.29) в порівнянні з асимптотичною точністю формул (2.26), то можна зробити такий висновок: якщо відомі оцінки точності інтерполяційних формул (відома кількість вузлів інтерполяції, що забезпечує дану точність), то можна казати про певні переваги інтерполяції (2.26) для багатьох прикладних задач. Сформулюємо основний висновок, що випливає з попередніх міркувань: інтерполяційні формули вигляду (2.26) можуть бути вдалою альтернативою до інтерполянтів типу (2.29) та подібних до них (див. [27], [85], [78], [186]). Вони є простішими за конструкцією побудови (не вимагають континуальності вихідної інформації та існування кратних інтегралів Рімана-Стільт'єса) та «збереження» ними в асимптотиці відповідних поліномів за наявністю оцінок точності дозволяє обмежуватись скінченою сумою (2.26) та застосовувати її для інтерполяційного наближення поліноміальних та цілих операторів.

2.4 Теореми про точність та збіжність інтерполяційного процесу в гільбертовому просторі з мірою у випадку збуреної вихідної інформації

Задачі синтезу систем, ідентифікації об'єктів, визначення реакції системи на деякі впливи можна розглядати як деякі задачі наближення операторів в функціональних просторах [99], а одним із способів розв'язання таких задач є операторна інтерполяція. В монографії [85] використовується лише інформація про значення оператора, що інтерполюємо, у вузлах. Поліноми такої структури будуть розглянуті в даному розділі.

Важливим для теорії та практики операторної інтерполяції є аналіз точності та збіжність інтерполяційних процесів. В розділі 2.2 побудовано інтерполяційний поліном мінімальної норми за системою вузлів, що обрана спеціальним чином та доведено збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператору у разі збільшення кількості вузлів.

В цьому розділі буде проведено аналіз оцінки точності інтерполяції у випадку, коли у вузлах задані збурені значення оператора та знайдено кількість ортонормованих вузлів, перевищення якої не покращує точність інтерполяції. Такі питання є важливими при розв'язанні прикладних задач.

Нехай X — сепарабельний гільбертовий простір, Y є предгільбертовим, μ — гаусова міра на X, перший момент якої дорівнює нулю [17], B — кореляційний оператор цієї міри (B є ядерним) та $KerB = \varnothing$. Введемо на множині Π_n вигляду (1.1) скалярний добуток (2.1) та норму $\|P\|_H = (P,P)_H^{1/2}$,.

Нехай $\{e_i\}_{i=1}^m \subset X$ — система власних ортонормованих векторів оператора B з власними числами $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, $(\cdot,\cdot)_Y$ — скалярний добуток в Y. Розглянемо елементи:

$$\{x_i\}_{i=0}^N : x_0 = 0,\ x_i = \frac{e_{i_1}}{\lambda_{i_1}} + \frac{e_{i_2}}{\lambda_{i_2}} + \cdots \frac{e_{i_k}}{\lambda_{i_k}},\ i = \overline{1,N},\ 1 \le k \le n,\ 1 \le i_j \le m,$$

де $N = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^k$. Тоді система елементів $\{Bx_i\}_{i=0}^N$ буде мати вигляд:

$$Bx_0 = 0,\ Bx_i = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k},\ 1 \le k \le n,\ 1 \le i_j \le m.$$

Нехай оператор $F : X \to Y$ заданий своїми значеннями $F(Bx_i)$, $i = \overline{0,N}$. Задачу поліноміальної операторної інтерполяції сформулюємо таким чином: знайти поліном $P_n \in \Pi_n$, що відповідає умовам

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i),\ \ i = \overline{0,N}. \tag{2.30}$$

Інтерполянт $P_n^I(x)$, побудований за методом ортогональних моментів [99], [134] на послідовності вузлів $Bx_i,\ i = \overline{0,N}$, що має вигляд

$$P_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k \left(\sum_{i_k=1}^{m} (x, e_{i_k}) e_{i_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \ldots (x, e_{i_k}), \qquad (2.31)$$

є розв'язком задачі (2.30). У формулі (2.31): $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в просторі X, а $L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ визначаються за рекурентними формулами (2.27) [134]. В розділі 2.2 показано, що цей інтерполянт тотожно співпадає з інтерполяційним поліномом мінімальної норми, що побудований за тією ж системою вузлів та доведена збіжність відповідного інтерполяційного процесу в метриці простору H у випадку, коли $m \to \infty$.

Оскільки інтерполяційна формула (2.31) немає властивості збереження поліномів відповідного степеня, то важливе значення мають оцінки точності інтерполювання та збіжність інтерполяційних процесів у випадку, коли оператор, що інтерполюємо, є поліноміальним та заданий збуреними значеннями.

Нехай значення оператора $F \in \Pi_n$ у вузлах $\{Bx_i\}_{i=0}^{N}$ задані із похибками δ_i, $i = \overline{0, N}$, тобто $\widetilde{F(Bx_i)} = F(Bx_i) + \delta_i$. Інтерполянт (2.31), який побудований на послідовності вузлів Bx_i, $i = \overline{0, N}$, у випадку неточних вихідних даних запишеться таким чином [208]

$$\widetilde{P}_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} \widetilde{L}_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \ldots (x, e_{i_k}), \qquad (2.32)$$

де операторні форми $\widetilde{L}_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ визначаються за допомогою рекурентної процедури [134]

$$\widetilde{L}_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \frac{1}{n!} \Big\{ \widetilde{F}(e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_n}) -$$

$$- \Big[\widetilde{F}(e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_{n-1}}) + \cdots + \widetilde{F}(e_{i_2} + e_{i_3} + \ldots + e_{i_n}) \Big] +$$

$$+\left[\widetilde{F}(e_{i_1}+e_{i_2}+\ldots+e_{i_{n-2}})+\cdots+\widetilde{F}(e_{i_3}+e_{i_4}+\ldots+e_{i_n})\right]+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left[\widetilde{F}(e_{i_1})+\widetilde{F}(e_{i_2})+\cdots\widetilde{F}(e_{i_n})\right]+(-1)^n\widetilde{F}(0). \qquad (2.33)$$

Для визначення $\widetilde{L}_{n-1}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}})$ у формулі (2.33) замінемо n на $n-1$, $\widetilde{F}$ на $\widetilde{F}-\widetilde{L}_n$, для визначення $\widetilde{L}_{n-2}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-2}})$ — n на $n-2$, $\widetilde{F}$ на $\widetilde{F}-\widetilde{L}_n-\widetilde{L}_{n-1}$ і т.д.

Оскільки інтерполяційний поліном $\widetilde{P}_n^I(x)$ лінійний за $F(x)$, то його можна подати у вигляді

$$\widetilde{P}_n^I(x)=P_n^I(x)+P_n^{(\delta)}(x) \qquad (2.34)$$

де поліном $P_n^{(\delta)}(x)$ інтерполює оператор, значення якого у вузлах дорівнюють δ_i, $i=\overline{0,N}$. Оцінимо точність інтерполяції оператора $F\in\Pi_n$ поліномом $\widetilde{P}_n^I$ в метриці простору H. Маємо

$$\|F-\widetilde{P}_n^I\|_H^2=\|F-P_n^I-P_n^{(\delta)}\|_H^2=$$

$$=\|F-P_n^I\|_H^2-2(F-P_n^I,P_n^{(\delta)})_H+\|P_n^{(\delta)}\|_H^2= \qquad (2.35)$$

$$=\|F-P_n^I\|_H^2+\|P_n^{(\delta)}\|_H^2,$$

оскільки $(F-P_n^I,P_n^{(\delta)})_H=0$ на підставі результатів [77]. Відповідно до [134] маємо:

$$F(x)-P_n^I(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{L_kx^k-L_k((x,e_i)e_i)^k\right\}=$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ L_k(x - \sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})e_{i_1}, x, \ldots, x) + \right.$$

$$+ L_k(\sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})e_{i_1}, x - \sum_{i_2=1}^{m}(x, e_{i_2})e_{i_2}, x, \ldots, x) + \cdots + \tag{2.36}$$

$$\left. + L_k(\sum_{i_1=1}^{m}(x, e_{i_1})e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m}(x, e_{i_2})e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_{k-1}=1}^{m}(x, e_{i_{k-1}})e_{i_{k-1}}, x - \sum_{i_k=1}^{m}(x, e_{i_k})e_{i_k}) \right\}.$$

Використовуючи визначення норми в метриці простору H, на підставі формули (2.36), отримаємо

$$\|F - P_n^I\|_H^2 = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\| L_k \left(v_1 - \sum_{i_1=1}^{m}(v_1, e_{i_1})e_{i_1}, v_2, \ldots, v_k \right) + \right.$$

$$+ L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m}(v_1, e_{i_1})e_{i_1}, v_2 - \sum_{i_2=1}^{m}(v_2, e_{i_2})e_{i_2}, v_3, \ldots, v_k \right) + \cdots +$$

$$\left. + L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m}(v_1, e_{i_1})e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m}(v_2, e_{i_2})e_{i_2}, \ldots, v_k - \sum_{i_k=1}^{m}(v_k, e_{i_k})e_{i_k} \right) \right\|_Y^2 \times$$

$$\times \mu(dv_1)\mu(dv_1) \cdots \mu(dv_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} k \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\{ \left\| L_k \left(v_1 - \sum_{i_1=1}^{m}(v_1, e_{i_1})e_{i_1}, v_2, \ldots, v_k \right) \right\|_Y^2 + \right.$$

$$+ \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m}(v_1, e_{i_1})e_{i_1}, v_2 - \sum_{i_2=1}^{m}(v_2, e_{i_2})e_{i_2}, v_3, \ldots, v_k \right) \right\|_Y^2 + \cdots +$$

$$+ \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m}(v_1, e_{i_1})e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m}(v_2, e_{i_2})e_{i_2}, \ldots \right. \right.$$

$$\ldots, v_k - \sum_{i_k=1}^{m}(v_k, e_{i_k})e_{i_k}\Bigg)\Bigg\|_Y^2\Bigg\}\mu(dv_1)\mu(dv_1)\cdots\mu(dv_k). \tag{2.37}$$

Нехай $\|L_k\|$ — традиційна норма k-лінійного оператора, $TrB = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i$. Оцінимо доданки в правій частині нерівності (2.37). Маємо

$$\int\limits_X\cdots\int\limits_X\left\|L_k\left(v_1-\sum_{i_1=1}^{m}(v_1,e_{i_1})e_{i_1},v_2,\ldots,v_k\right)\right\|_Y^2\mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_k)\le$$

$$\le\int\limits_X\cdots\int\limits_X\|L_k\|^2\|v_1-\sum_{i_1=1}^{m}(v_1,e_{i_1})e_{i_1}\|^2\cdot\|v_2\|^2\cdots\|v_k\|^2\mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_k)=$$

$$=\|L_k\|^2(TrB)^{k-1}\int\limits_X\left\|\sum_{i_1=m+1}^{\infty}(v_1,e_{i_1})e_{i_1}\right\|^2\mu(dv_1)=$$

$$=\|L_k\|^2(TrB)^{k-1}\int\limits_X\sum_{i_1=m+1}^{\infty}(v_1,e_{i_1})^2\mu(dv_1)=$$

$$=\|L_k\|^2(TrB)^{k-1}\sum_{i_1=m+1}^{\infty}\lambda_{i_1}, \tag{2.38}$$

$$\int\limits_X\cdots\int\limits_X\left\|L_k\left(\sum_{i_1=1}^{m}(v_1,e_{i_1})e_{i_1},v_2-\sum_{i_2=1}^{m}(v_2,e_{i_2})e_{i_2},v_3,\ldots,v_k\right)\right\|_Y^2\times$$

$$\times\mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_k)\le$$

$$\le\int\limits_X\cdots\int\limits_X\|L_k\|^2\left\|\sum_{i_1=1}^{m}(v_1,e_{i_1})e_{i_1}\right\|\cdot\left\|v_2-\sum_{i_1=2}^{m}(v_2,e_{i_2})e_{i_2}\right\|^2\times$$

$$\times\|v_3\|^2\cdots\|v_k\|^2\mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_k)=$$

$$= \|L_k\|^2 (TrB)^{k-2} \int\limits_X \left\| v_2 - \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2} \right\|^2 \mu(dv_2) \times$$

$$\times \int\limits_X \left\| \sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1} \right\|^2 \mu(dv_1) =$$

$$= \|L_k\|^2 (TrB)^{k-2} \int\limits_X \left\| \sum_{i_2=m+1}^{\infty} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2} \right\|^2 \mu(dv_2) \int\limits_X \sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1})^2 \mu(dv_1) =$$

$$= \|L_k\|^2 (TrB)^{k-2} \sum_{i_1=1}^{m} \lambda_{i_1} \int\limits_X \sum_{i_2=m+1}^{\infty} (v_2, e_{i_2})^2 \mu(dv_2) =$$

$$= \|L_k\|^2 (TrB)^{k-2} \sum_{i_1=1}^{m} \lambda_{i_1} \sum_{i_2=m+1}^{\infty} \lambda_{i_2} < \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i, \tag{2.39}$$

. . . .

$$\int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\| L_k \left(\sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2}, \ldots, v_k - \sum_{i_k=1}^{m} (v_k, e_{i_k}) e_{i_k} \right) \right\|_Y^2 \times$$

$$\times \mu(dv_1) \mu(dv_2) \cdots \mu(dv_k) \leq$$

$$\leq \|L_k\|^2 \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\| \sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1}) e_{i_1} \right\|^2 \cdot \left\| \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2}) e_{i_2} \right\|^2 \cdots$$

$$\cdots \left\| v_k - \sum_{i_k=1}^{m} (v_k, e_{i_k}) e_{i_k} \right\|^2 \mu(dv_1) \mu(dv_2) \cdots \mu(dv_k) \leq \tag{2.40}$$

$$\leq \|L_k\|^2 \int\limits_X \cdots \int\limits_X \sum_{i_1=1}^{m} (v_1, e_{i_1})^2 \sum_{i_2=1}^{m} (v_2, e_{i_2})^2 \cdots$$

$$\cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{m} (v_{k-1}, e_{i_{k-1}})^2 \sum_{i_k=m+1}^{\infty} (v_k, e_{i_k})^2 \mu(dv_2) \cdots \mu(dv_k) =$$

$$= \|L_k\|^2 \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^{k-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k < \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i.$$

Підставимо (2.38)—(2.40) в праву частину нерівності (2.37). В результаті одержимо

$$\|F - P_n^I\|_H^2 < \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i. \qquad (2.41)$$

Відмітимо, що із оцінки (2.41) безпосередньо випливає збіжність P_n^I до F у випадку, коли $m \to \infty$. Врахувавши скалярний добуток $(P_1, P_2)_H$, знаходимо

$$\|P_n^{(\delta)}\|_H^2 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{m} \|L_k^{(\delta)}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})\|_Y^2 \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}. \qquad (2.42)$$

Використовуючи результати роботи [131], оцінимо норми значень k-лінійних операторних форм $L_k^{(\delta)}$. Отримаємо

$$\|L_k^{(\delta)}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})\|_Y \le c_k \max_{0 \le i \le N} \|\delta_i\|_Y, \qquad (2.43)$$

де

$$c_k = \alpha_k (1 + \alpha_{k+1}) \cdots (1 + \alpha_n), \alpha_k = \frac{2^k}{k!}, k = \overline{1, n}, c_0 = 1.$$

На підставі формул (2.42), (2.43) оцінка зверху для $\|P_n^{(\delta)}\|_H^2$ набуває вигляду

$$\|P_n^{(\delta)}\|_H^2 \le \max_{0 \le i \le N} \|\delta_i\|_Y^2 \sum_{k=0}^{n} c_k^2 (TrB)^k. \qquad (2.44)$$

Підставимо оцінки (2.41), (2.44) в праву частину рівності (2.35). Одержимо

$$\|F - \widetilde{P}_n^I\|_H^2 < \alpha \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i + \beta \delta, \qquad (2.45)$$

де

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1}, \beta = \sum_{k=0}^{n} c_k^2 (TrB)^k, \delta = \max_{0 \le i \le N} \|\delta_i\|_Y^2.$$

Таким чином, довели теорему 2.7.

Теорема 2.7. *Нехай значення поліноміального оператора (що інтерполюємо) у вузлах* Bx_i, $i = \overline{0, N}$ *задано наближено. Тоді оцінка точності інтерполювання визначається нерівністю* (2.45).

Як зазначалося вище, на підставі оцінки (2.41) маємо таку теорему.

Теорема 2.8. *Нехай задано значення поліноміального оператора* F *у вузлах* Bx_i, $i = \overline{0, N}$. *Тоді інтерполяційний процес, що визначається за допомогою формули* (2.31) *збігається в метриці простору* H.

Подамо оператор B в просторі X у вигляді збіжного ряду

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k, \ \lambda_k > 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty. \tag{2.46}$$

Нескладно показати, що B — ядерний самоспряжений додатньовизначений оператор для якого e_k — власні вектори з відповідними власними значеннями λ_k [111]. Нехай $\lambda_k = q^k$, $q \in (0, 1)$. Відповідно до результатів [17] оператор (2.46) визначає деяку гаусову міру μ на X. При цьому оцінка (2.45) набуває вигляду

$$\|F - \widetilde{P}_n^I\|_H^2 < \alpha \frac{q^m + 1}{1 - q} + \beta\delta. \tag{2.47}$$

Позначимо $E(x)$ — цілу частину числа x. Має місце теорема 2.9.

Теорема 2.9. *Нехай оператор* B *визначається на підставі формули* (2.46) *у випадку, коли* $\lambda_k = q^k$, $q \in (0, 1)$, *значення оператора, що інтерполюємо, у вузлах* Bx_i, $i = \overline{0, N}$, *задано наближено. Тоді у разі виконання нерівності*

$$m > m_0 = E(log_q \frac{\beta}{\alpha}(1-q)\delta) - 1$$

точність інтерполяції не покращується.

Доведення. Доведення теореми безпосередньо випливає із оцінки (2.47). □

Зауваження 2.3. *В роботі [27] наведено результати з побудови інтерполяційних операторних поліномів типу Ньютона, що зберігають багаточлени відповідного степеня. Але реалізація таких інтерполяційних формул вимагає існування чи диференціалів Гато вищих порядків оператора та відповідних кратних інтегралів, чи інтегралів Стільт'єса за оператором скалярного аргументу.*

Нехай тепер $F : X \to Y$ — цілий оператор, тобто має вигляд

$$F(x) = L_0 + L_1 x + \cdots + L_n x^n + \cdots , \tag{2.48}$$

а числовий ряд $\|L_0\| + \|L_1\| \cdot \|x\| + \cdots + \|L_n\| \cdot \|x\|^n + \cdots$ збігається для всіх $x \in X$. Позначимо Π_∞ множину цілих операторів вигляду (2.48) та на цій множині введемо скалярний добуток

$$(F_1, F_2)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \cdots \int_X (L_k^{(1)}(v_1, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, \ldots, v_k))_Y \mu(dv_1) \cdots \mu(dv_k) \tag{2.49}$$

і норму $\|F\|_H = (F, F)_H^{1/2}$, де $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}$ — k–лінійні неперервні симетричні операторні форми, що відповідають операторам $F_1, F_2 \in \Pi_\infty$. Нехай Π_n — множина поліномів, що є n-ми частинними сумами рядів виду (2.49), оператор $F \in \Pi_\infty$ заданий у вузлах Bx_i, $i = \overline{0, N}$ збуреними значеннями

$$\widetilde{F}(Bx_i) = F(Bx_i) + \delta_i,\ \delta_i \in Y,\ i = \overline{0, N}.$$

В цьому випадку розв'язок $\widetilde{P}_n^I(x,F)$ інтерполяційної задачі (2.30) на підставі (2.31) буде мати вигляд (2.32), де $\widetilde{L_k}(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_k})$ визначаються за рекурентною процедурою (2.33). Інтерполянт $\widetilde{P}_n^I(x,F)$ є лінійним за F, тобто виконується рівність (2.34), де $P_n^{(\delta)}(x)$ — поліном, значення якого у вузлах дорівнюють δ_i, $i=\overline{0,N}$. Цілий оператор F подамо у вигляді

$$F(x)=F_n(x)+R_n(x), \tag{2.50}$$

де $F_n\in\Pi_n$, $R_n(x)=L_{n+1}x^{n+1}+L_{n+2}x^{n+2}+\cdots$. Тоді

$$\widetilde{F}(Bx_i)=F_n(Bx_i)+R_n(Bx_i)+\delta_i.$$

Теорема 2.10. *Нехай задані збурені значення цілого оператора* $F(x)\in\Pi_\infty$ *у вузлах* Bx_i, $i=\overline{0,N}$. *Оцінка точності інтерполяції оператора* $F(x)$ *поліномом* (2.32) *в метриці, що породжена скалярним добутком* (2.49), *визначається за формулою [136]*

$$\|F-\widetilde{P}_n^I\|_H<\left[\sum_{k=1}^{n}k^2\|L_k\|^2(TrB)^{k-1}\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda_i\right]^{1/2}+$$
$$+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\|L_k\|^2(TrB)^k+\max_{0\le i\le N}\|R_n(Bx_i)\|_Y^2\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k\right]^{1/2}+$$
$$+\left[\max_{0\le i\le N}\|\delta_i\|_Y^2\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k\right]^{1/2}, \tag{2.51}$$

де $TrB=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$, $c_k=\alpha_k(1+\alpha_{k+1})+\cdots(1+\alpha_n)$, $\alpha_k=2^k/k!$, $k=\overline{1,n}$, $c_0=1$.

Доведення. Знайдемо оцінку точності інтерполяції оператора $F\in\Pi_\infty$ за допомогою полінома $\widetilde{P}_n^I(F)$ в метриці H. Оскільки інтерполянт $\widetilde{P}_n^I(F)$ є лінійним за F, то виконується нерівність (2.35) та

$$\|F - P_n^I(F)\|_H = \|F_n + R_n - P_n^I(F_n + R_n)\|_H \leq$$

$$\leq \|F - P_n^I(F_n)\|_H + \|R_n - P_n^I(R_n)\|_H. \tag{2.52}$$

Враховуючи скалярний добуток (2.49) дістанемо, що

$$(R_n, P_n^I(R_n))_H = 0.$$

Тому

$$\|R_n - P_n^I(R_n)\|_H^2 = \|R_n\|_H^2 + \|P_n^I(R_n)\|_H^2.$$

Знайдемо оцінку $\|R_n\|_H^2$:

$$\|R_n\|_H^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \|L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)\|_Y^2 \mu(dv_k) \cdots \mu(dv_2)\mu(dv_1) \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 \int\limits_X \cdots \int\limits_X \|v_1\|^2 \cdots \|v_k\|^2 \mu(dv_k) \cdots \mu(dv_1) = \tag{2.53}$$

$$= \sum_{k+n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (TrB)^k.$$

В останній нерівності та в подальших перетвореннях, що пов'язані з обчисленням континуальних інтегралів [49], використовується формула [17]

$$\int\limits_X (v, e_i)(v, e_j)\mu(dv) = (Be_i e_j) = \lambda_i(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера. Оцінимо зверху величину

$$\|P_n^I(R_n)\|_H^2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left\| \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} L_k(R_n, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})(v_1, e_{i_1}) \cdots (v_k, e_{i_k}) \right\|_Y^2 \times$$

$$\times\mu(dv_k)\cdots\mu(dv_1).$$

Використовуючи співвідношення (2.33) у разі $F \equiv R_n$, одержимо оцінки

$$\|L_k(R_n, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\|_Y \leq c_k \max_{1\leq i\leq N} \|R_n(Bx_i)\|_Y,$$

де c_k визначені у формулюванні теореми 2.10. Тоді

$$\|P_n^I(R_n)\|_H^2 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \max_{1\leq i\leq N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \int\limits_X (v_k, e_{i_k})^2 \mu(dv_k)\times$$

$$\times \int\limits_X (v_1, e_{i_1})^2 \mu(dv_1) = \max_{1\leq i\leq N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (TrB)^k. \tag{2.54}$$

На підставі формул (2.53), (2.54) отримаємо

$$\|R_n - P_n^I(R_n)\|_H \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (TrB)^k + \max_{1\leq i\leq N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (TrB)^k \right\}^{1/2}. \tag{2.55}$$

Знайдемо оцінку для першого доданку в правій частині нерівності (2.52). На підставі нерівностей (2.41), (2.55) співвідношення (2.52) набуває вигляду

$$\|F - P_n^I(F_n)\|_H < \left[\sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i \right]^{1/2} +$$

$$+ \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (TrB)^k + \max_{0\leq i\leq N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (TrB)^k \right]^{1/2}. \tag{2.56}$$

Підставимо (2.44), (2.56) в (2.35) одержимо оцінку (2.51). Теорему доведено. $\square$

В [131] показано, що послідовність

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (TrB)^k$$

збігається у разі $n \to \infty$. Позначимо цю границю — S^2. Оскільки оператор $F(x)$ є цілим, то ряд $\sum \|L_k\|^2$ також є збіжним. Нехай φ_n^2 — залишок цього ряду після n-го члена. Як наслідок теореми 2.10 виконується така теорема.

Теорема 2.11. *Нехай задані збурені значення оператора $F(x) \in \Pi_\infty$ у вузлах інтерполяції Bx_i, $i = \overline{0, N}$ та виконуються умови:*

$$\max_{0 \le i \le N} \|\delta_i\|_Y^2 \le \delta^2, \max_{0 \le i \le N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \le \psi_n^2, m = 1, 2, \ldots.$$

Тоді має місце нерівність

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \|F - \widetilde{P}_n^I\|_H \le \left[\varphi_n^2 + (S^2 - 1)\psi_n^2\right]^{1/2} + S\delta. \tag{2.57}$$

Доведення. В умовах теореми із оцінки (2.51) одержимо

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \|F - \widetilde{P}_n^I\|_H \le \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (TrB)^k + \psi_n^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (TrB)^k\right]^{1/2} +$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{n} c_k^2 (TrB)^k\right]^{1/2} \delta.$$

З цієї нерівності випливає оцінка (2.57). □

Теорема 2.12. *Нехай виконуються умови теореми 2.11 та $\psi_n \to 0$ монотонно у разі $n \to \infty$. Тоді у випадку збурених значень оператора $F \in \Pi_\infty$ у вузлах Bx_i, $i = \overline{0, N}$, точність інтерполяції не покращується у сенсі оцінки (2.57), коли $n \ge n_0$, де n_0 — максимальне ціле число, що відповідає нерівності*

$$\varphi_n^2 + (S^2-1)\psi_n^2 \ge S^2\delta^2.$$

Доведення безпосередньо випливає із оцінки (2.57).

Приклад 2.2. *Розглянемо оператор $F \in \Pi_\infty$ для якого значення n_0 можна знайти конструктивно. Нехай для $F(x)$ виконуєтьcя нерівність*

$$\|L_{n+k}\| \le (q/n)^{n+k}, \;\; k = 1, 2, \ldots, \;\; q \in (0,1).$$

Нехай оператор B визначаєтьcя за формулою (2.46), де $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ є ортонормованим базисом в X. В цьому випадку B — кореляційний оператор деякої гаусової міри μ на X. Ця міра породжує скалярний добуток в просторі H та норму. Тоді, використовуючи оцінку (2.51) одержимо

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \|F - \widetilde{P}_n^I\|_H \le \left\{ \left(\frac{q^2}{1-q}\right)^{n+1} \left[\frac{1-q}{1-q-q^3} + \frac{S^2-1}{(1-q)^2}\right]\right\}^{1/2} + S\delta \quad (2.58)$$

у разі $1-q-q^3>0$

Із нерівності (2.58) одержимо такий результат:

Теорема 2.13. *Якщо задані збурені значення цілого оператора $F(x)$ у вузлах Bx_i, $i=\overline{0,N}$, оператор B визначаєтьcя за формулою (2.46), число n більше за значення n_0, що обчислюєтьcя за формулою*

$$n_0 = E\left\{ 2log_{\frac{q^2}{1-q}}(S\delta) - 2log_{\frac{q^2}{1-q}}\left[\frac{1-q}{1-q-q^3} + \frac{S^2-1}{(1-q)^2}\right]\right\} - 1,$$

де $E(x)$ є цілою частиною числа x, $1-q-q^3>0$, $q \ne (\sqrt{5}-1)/2$, то точність інтерполяції оператора F в метриці простору H не покращуєтьcя в сенсі оцінки (2.58).

Це твердження доводиться за допомогою прирівнювання двох доданків в правій частині нерівності (2.58).

2.5 Оцінки точності інтерполяції цілих та поліноміальних функціоналів в просторі $L_2(0,1)$ у випадку збуреної вихідної інформації

При розв'язанні прикладних задач, інформація про досліджуємий об'єкт в більшості випадків є збуреною. В цьому розділі проведено аналіз точності інтерполяції поліноміальних та цілих функціоналів, які визначені на просторі $L_2(0,1)$ у випадку збурених вузлових значень та наближеного обчислення скалярного добутку, що міститься в інтерполяційних формулах.

Нехай Π_∞ — множина операторів вигляду (2.48), для яких числовий ряд

$$\|L_0\| + \|L_1\| \cdot \|x\| + \cdots + \|L_n\| \cdot \|x\|^n + \cdots$$

збігається для всіх $x \in L_2(0,1)$. У формулі (2.48):

$$L_0 \in R^1, \;\; L_k x^k : L_2(0,1) \to R^1$$

— k-та операторна степінь, що одержана із k-лінійної симетричної неперервної операторної форми $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) : L_2(0,1) \to R^1$ у випадку, коли $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = x$, $\|L_k\|$ — традиційна норма k-го операторного степеня, $\|\cdot\|$ — норма елемента x в $L_2(0,1)$. Оператори такого вигляду назвемо цілими функціоналами, що визначені на просторі $L_2(0,1)$.

Нехай $F \in \Pi_\infty$, $F : L_2(0,1) \to R^1$, де простір $L_2(0,1)$ із гаусовою мірою μ, перший момент якої дорівнює нулю, B — кореляційний оператор цієї міри (B є ядерним) та $KerB = \emptyset$. Введемо на множині Π_∞ скалярний добуток з використанням континуальних інтегралів з мірою μ [85]

$$(F_1, F_2)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \cdots \int_X L_k^{(1)}(v_1, v_2, \ldots, v_k) L_k^{(2)}(v_1, v_2, \ldots, v_k) \times \tag{2.59}$$

$$\times \mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_k),$$

та норму $\|F\|_H = (F, F)_H^{1/2}$, де $X = L_2(0,1)$, $L_k^{(1)}$, $L_k^{(1)}$ — k-лінійні неперервні операторні форми, що відповідають функціоналам F_1, $F_2 \in \Pi_\infty$. Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ — система власних ортонормованих власних векторів оператора B з власними числами $\lambda_i > 0$. Множину інтерполяційних вузлів $\aleph(m) = \{x_i\}_{i=0}^{N}$, $N = N(m)$, $m \geq n$, визначимо таким чином: $x_0 = 0$, $x_i = e_i$, $i = \overline{1, m}$, а решту x_{m+1}, x_{m+2}, $\ldots, x_N$ — як суми елементів $e_i, i = \overline{1, m}$, по два, по три і т. д. до n доданків в кожній сумі, які містять також повторення.

Нехай Π_n — множина функціональних поліномів, що являють собою n-ті частинні суми рядів вигляду (2.48). Сформулюємо задачу інтерполювання функціоналів: потрібно знайти такий поліном $P_n^I \in \Pi_n$, для якого у вузлах виконуються умови

$$P_n^I(x_i) = F(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \tag{2.60}$$

де $F : L_2(0,1) \to R^1$ — деякий, в загальному випадку, нелінійний функціонал.

Розглянемо розв'язання інтерполяційної задачі (2.60) методом ортогональних моментів [99], [85]. В цьому випадку інтерполяційний функціональний поліном на множині вузлів $\aleph(m)$ має вигляд [85]

$$P_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_k}), \tag{2.61}$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $L_2(0,1)$, $L_k^I(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_k})$ — k-лінійні неперевні симетричні операторні форми, що обчислюються за формулами із [85], [99]:

$$L_n^I(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})=\frac{1}{n!}\left\{F(e_{i_1}+e_{i_2}+\dots+e_{i_n})-\right.$$

$$-\Big[F(e_{i_1}+e_{i_2}+\dots+e_{i_{n-1}})+\dots+F(e_{i_2}+e_{i_3}+\dots+e_{i_n})\Big]+$$

$$+\Big[F(e_{i_1}+e_{i_2}+\dots+e_{i_{n-2}})+\dots+F(e_{i_3}+e_{i_4}+\dots+e_{i_n})\Big]+\dots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left[F(e_{i_1})+F(e_{i_2})+\dots+F(e_{i_n})\right]+(-1)^nF(0) \tag{2.62}$$

Для визначення $L_{n-1}^I(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_{n-1}})$ за формулою (2.62) потрібно замінити n на $n-1$, $F(x)$ на $F(x)-L_n^Ix^n$, а для визначення $L_{n-2}^I(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_{n-2}})$ — замінити n на $n-2$, $F(x)$ на $F(x)-L_n^Ix^n-L_{n-1}^Ix^{n-1}$ і т.д. В [131] у випадку виконання певних умов доведена збіжність інтерполяційного процесу (2.61) на множині вузлів $\aleph(m)$ до цілого функціоналу $F\in\Pi_\infty$, який інтерполюємо. При цьому збіжність розуміємо як

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}}\|F-P_n^I\|_H=0.$$

Розглянемо тепер інтерполяційну задачу (2.60) у випадку збурених значеннях функціоналу $F\in\Pi_\infty$ на множині вузлів $\aleph(m)$:

$$\widetilde{F}(x_i)+\delta_i,\ \ \delta_i\in R^1,\ \ i=\overline{0,N},$$

та наближеного обчислення скалярних добутків

$$\widetilde{(x,e_i)}=(x,e_i)+\Delta_i\ \ i=\overline{1,m}.$$

В подальшому будемо припускати, що

$$\Delta_i \leq \frac{C}{i^r},\ C = const,\ \text{де } r > 1.$$

Така оцінка точності має місце, наприклад, для квадратурної формули обчислення i-го коефіцієнта Фур'є функцій із класу Ліпшиця у випадку, коли в цій квадратурній формулі кількість проміжків розбиття відрізку інтегрування більше за величину i^r, $r > 1$ [29]. За такої постановки задачі інтерполяційний поліном (2.61) запишеться у вигляді

$$\widetilde{P}_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} \widetilde{L}_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})\widetilde{(x, e_{i_1})}\widetilde{(x, e_{i_2})} \cdots \widetilde{(x, e_{i_1})}, \qquad (2.63)$$

де $\widetilde{L}_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ обчислюються за формулами (2.62), але замість значень функціонала $F(x_i)$ використовують збурені значення $\widetilde{F}(x_i)$. Оскільки інтерполяційний поліном $\widetilde{P}_n^I(x)$ як оператор по F є лінійним, то з точністю до членів першого порядку малості відносно величин Δ_i та δ_i його можна записати таким чином

$$\widetilde{P}_n^I(x) = P_n^I(x) + P_n^{(\delta)}(x) + P_{n-1}^{(\Delta)}(x), \qquad (2.64)$$

де значення полінома $P_n^{(\delta)}(x)$ у вузлах $x_i, i = \overline{0, N}$, дорівнюють $\delta_i,\ i = \overline{0, N}$, поліном $P_{n-1}^{(\Delta)}(x)$ визначається за допомогою рівності

$$P_{n-1}^{(\Delta)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_{k-1}})\Delta_{i_k}. \qquad (2.65)$$

Знайдемо оцінку точності інтерполяції цілого функціоналу $F \in \Pi_\infty$ поліномом $\widetilde{P}_n^I(x)$ у метриці простору H. Маємо

$$\|F - \widetilde{P}_n^I\|_H = \|F - P_n^I - P_n^{(\delta)} - P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H \leq$$

$$\leq \|F - P_n^I - P_n^{(\delta)}\|_H + \|P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H. \tag{2.66}$$

Знайдемо оцінку зверху для величини $\|P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H$. Нехай

$$\delta = \max_{0\leq i\leq N} |\delta_i| \text{ та } |\widetilde{F}(x_i)| \leq K \ \ \forall i.$$

Оскільки $\widetilde{F}(x_i) = F(x_i) + \delta_i$, то

$$|\widetilde{F}(x_i)| = |F(x_i)| + |\delta_i| \leq K + \delta.$$

В подальших викладках використаємо оцінкою [131]:

$$\|L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})\|_Y \leq c_k \max_{0\leq i\leq N} F(x_i),$$

де

$$c_k = (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)\frac{\alpha_k}{(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_k)},\ \alpha_k = \frac{2^k}{k!},\ k = \overline{1,n},$$

а також рівністю

$$\int_X (v, e_i)(v, e_j)\mu(dv) = (Be_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij},\ X = L_2(0,1),$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Одержимо

$$\|P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_X \cdots \int_X k \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})(v_1, e_{i_1})\cdots(v_{k-1}, e_{i_{k-1}})\Delta_{i_k} \times$$

$$\times \sum_{j_1,j_2,\dots,j_k=1}^{m} L_k^I(e_{j_1},e_{j_2},\dots,e_{j_k})(v_1,e_{j_1})\cdots(v_{k-1},e_{j_{k-1}})\Delta_{j_k}\times$$

$$\times\mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_{k-1}) <$$

$$< (K+\delta^2)\sum_{k=1}^{n-1} k^2 c_k^2 (TrB)^{k-1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{C}{i^r}\right\}^2 < \qquad (2.67)$$

$$< C^2\zeta^2(r)(K+\delta)^2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 c_k^2 (TrB)^{k-1},$$

де $\zeta(r)$ — функція Рімана, $TrB = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\lambda_k$. Цілий функціонал $F(x)$ подамо у вигляді

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x),$$

де

$$F_n(x) = L_0 + L_1 x + \cdots + L_n x^n,$$

$$R_n(x) = L_{n+1}x^{n+1} + L_{n+2}x^{n+2} + \cdots .$$

Для оцінки першого доданку в (2.66) скористаємося нерівністю (2.51).

На підставі нерівностей (2.51), (2.67), оцінку (2.66) запишемо у такому вигляді

$$\|F-\widetilde{P}_n^I\|_H < \left\{\sum_{k=1}^{n} k^2\|L_k\|^2(TrB)^{k-1}\sum_{i=m+1}^{\infty_i}\lambda_i\right\}^{1/2} +$$

$$+\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\|L_k\|^2(TrB)^k + \max_{0\le i\le N}\|R_n(x_i)\|_Y^2\sum_{k=1}^{n} c_k^2(TrB)^k\right\}^{1/2} + \qquad (2.68)$$

$$+\left\{\max_{0\le i\le N}\|\delta_i\|_Y^2\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k\right\}^{1/2}+C\zeta(r)(K+\delta)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}k^2c_k^2(TrB)^{k-1}\right\}^{1/2}.$$

Таким чином доведено таку теорему.

Теорема 2.14. *Нехай задані збурені значення цілого функціонала $F: L_2(0,1)\to R^1$ на множині вузлів $\aleph(m)$: $\widetilde{F}(x_i)=F(x_i)+\delta_i$ та нехай виконуються нерівності*

$$|\widetilde{F}(x_i)|\le K=const,\ |\Delta_i|\le\frac{C}{i^r},\ r>1,\ |\delta_i|\le\delta,\ \forall i,\ i=\overline{0,N},$$

скалярні добутки в (2.63) обчислюються наближено. Тоді оцінка точності інтерполяції поліномом (2.63) в метриці простору H визначається за формулою (2.68).

В [131] показано, що послідовність

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}c_k^2(TrB)^k$$

збігається у випадку $n\to\infty$. Позначимо границю S_n^2 коли $n\to\infty$ як S^2. Оскільки функціонал $F(x)$ — цілий, то ряд $\sum\|L_k\|^2(TrB)^k$ є збіжним. Нехай φ_n^2 — залишок цього ряду після n-го члену. Нескладно показати, що послідовність $U_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2c_k^2(TrB)^k$ також є збіжною у випадку коли $n\to\infty$. Цю границю позначимо: U^2.

Теорема 2.15. *Нехай задані збурені значення цілого функціонала $F: L_2(0,1)\to R^1$ на множині вузлів $\aleph(m)$: $\widetilde{F}(x_i)=F(x_i)+\delta_i$ та нехай виконуються нерівності $|\widetilde{F}(x_i)|\le K=const$, $|\Delta_i|\le\frac{C}{i^r}$, $r>1$, $|\delta_i|\le\delta$, $\forall i,\ i=\overline{0,N}$, а скалярні добутки в (2.63) обчислюються наближено та $|R_n(x_i)|^2\le\psi_n^2$. Тоді має місце оцінка*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \|F - \widetilde{P}_n^I\| \le \left\{\varphi_n^2 + (S^2-1)\psi_n^2\right\}^{1/2} + S\delta + C\zeta(r)U(K+\delta). \qquad (2.69)$$

Доведення. Доведення випливає безпосередньо з нерівності (2.68). □

Розглянемо тепер задачу операторної інтерполяції з інтерполяційними умовами (2.69) для поліноміального функціонала $F_n \in \Pi_n$ у випадку збурених його значень на множині вузлів $\aleph(m)$ та наближеного обчислення скалярних добутків в (2.71).

Як зазначалося вище, $\widetilde{P}_n^I(x)$ можна розглядати як лінійний функціонал за $F_n(x)$. Використаємо позначення для $P_n^{(\delta)}(x)$, $P_{n-1}^{(\Delta)}(x)$, що були введені для випадку, коли функціонал, який інтерполюємо, цілий. Тоді з точністю до членів першого порядку малості відносно величин δ_i та Δ_i також виконуються рівність (2.64), якщо $F(x) \equiv F_n(x)$ — поліноміальний функціонал. Нехай $|\widetilde{F}_n(x_i)| \le K = const$; $\Delta_i \le \frac{C}{i^r}$, $r > 1$, $|\delta_i| \le \delta \;\; \forall i$. Знайдемо оцінку точності інтерполяції поліноміального функціонала. Маємо

$$\|F_n - \widetilde{P}_n^I\|_H = \|F_n - P_n^I - P_n^{(\delta)} - P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H \le$$

$$\le \|F_n - P_n^I - P_n^{(\delta)}\|_H + \|P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H. \qquad (2.70)$$

Для того, щоб одержати оцінку $\|F_n - P_n^I - P_n^{(\delta)}\|_H$ скористаємося результатом теореми 2.7 із розділу 2.4: у випадку, коли задані збурені значення поліноміального оператора (що інтерполюємо) у вузлах інтерполяції $x_i,\ i = \overline{0,N}$, оцінка точності інтерполювання визначається нерівністю:

$$\|F_n - P_n^I - P_n^{(\delta)}\|_H < \left\{\alpha_n \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i + \beta_n \delta^2\right\}^{1/2}, \qquad (2.71)$$

де $\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1}$, $\beta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 (TrB)^k$.

Підставимо нерівності (2.67), (2.71) в (2.70). В результаті одержимо

$$\|F_n - \widetilde{P}_n^I\|_H < \left\{ \alpha_n \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i + \beta_n \delta \right\}^{1/2} + C\zeta(r)(K+\delta)U_{n-1}. \tag{2.72}$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 2.16. *Нехай задані збурені значення поліноміального функціоналу $F_n(x)$ на множині вузлів $\aleph(m)$: $\widetilde{F}_n(x_i) = F_n(x_i) + \delta_i$, скалярний добуток в $L_2(0,1)$ обчислюється наближено: $\widetilde{(x, e_i)} = (x, e_i) + \Delta_i$ та виконуються нерівності $|\widetilde{F}_n(x_i)| \le K = const$, $|\delta_i| \le \delta \quad \forall i$, $|\Delta_i| \le \frac{C}{i^r}$, $r > 1$. Тоді оцінка точності інтерполяції в метриці простору H з точністю до членів першого порядку малості відносно величин δ_i та Δ_i обчислюються за формулою (2.72).*

Розглянемо в просторі $L_2(0,1)$ оператор B, що визначається збіжним рядом

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} q^k (x, e_k) e_k, \quad q \in (0,1), \tag{2.73}$$

де $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в $L_2(0,1)$. В цьому випадку B — ядерний самоспряжений додатній оператор, e_k — його ортонормовані власні вектори з власними значеннями, що дорівнюють q^k. В [17] показано, що в цьому випадку B — кореляційний оператор деякої гаусової міри μ в $L_2(0,1)$. Ця міра породжує скалярний добуток та відповідну норму на множині Π_n. Оцінку точності інтерполяції (2.72) запишемо таким чином [209]

$$\|F_n - \widetilde{P}_n^I\|_H < \left\{ \alpha_n \frac{q^{m+1}}{1-q} + \beta_n \delta^2 \right\}^{1/2} + C\zeta(r)U_{n-1}(K+\delta) \le$$

$$\le \sqrt{2} \left\{ \alpha_n \frac{q^{m+1}}{1-q} + \beta_n \delta^2 + C^2 \zeta^2(r) U_{n-1}^2 (K+\delta)^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.74}$$

Використовуючи оцінку точності інтерполювання (2.74), отримаємо формулу для визначення кількості ортонормованих вузлів m_0, перевищення якого не покращує цю оцінку:

$$m_0 = E\left(\log_q \frac{\beta_n\delta^2 + C^2\zeta^2(r)U_{n-1}^2(K+\delta)^2}{\alpha_n}(1-q)\right) - 1,$$

де $E(x)$ — ціла частина числа x.

Розглянемо тепер цілий функціонал $F \in \Pi_\infty$, для якого оцінку значення n_0 в теоремі 2.15 можна знайти більш конструктивно.

Нехай оператор B визначається за формулою (2.73), для норм степенів оператора $F(x)$ виконуються нерівності

$$\|L_{n+k}\| \leq \left(\frac{q}{n}\right)^{n+k},\ k = 1, 2, \ldots,$$

та $1 - q - q^3 > 0$, тоді на підставі (2.68) одержимо

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \|F - \widetilde{P}_n^I\|_H \leq \left\{\left(\frac{q^2}{1-q}\right)^{n+1}\left(\frac{1-q}{1-q-q^3} + \frac{S^2-1}{1-q^2}\right)\right\} +$$

$$+S\delta + C\zeta(r)U(K+\delta). \tag{2.75}$$

Відповідно до нерівності (2.75) можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 2.17. *Нехай задані збурені значення цілого оператора $F(x)$ на множині вузлів $\aleph(m)$, скалярні добутки в (2.63) обчислюються наближено та виконуються нерівності $\widetilde{F}(x_i) \leq K = const$, $|\Delta_i| \leq \frac{C}{i^r}$, $r > 1$, $|\delta_i| \leq \delta\ \forall i$, оператор B визначається за допомогою співвідношення (2.73), $1 - q - q^3 > 0$, $q \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Якщо число n не перевищує n_0, що обчислюється за формулою*

$$n_0 = E\left(2\log_{\frac{q^2}{1-q}}(s\delta + C\zeta(r)U(K+\delta)) - \log_{\frac{q^2}{1-q}}\left(\frac{1-q}{1-q-q^3} + \frac{S^2-1}{1-q^2}\right)\right) - 1,$$

то точність інтерполяції цілого функціоналу $F \in \Pi_\infty$ не покращується в сенсі оцінки (2.75).

2.6 Теореми про точність інтерполяції поліноміальних та цілих функціоналів $F : \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi) \to R_1$ у випадку збурених їх вузлових значень

В цьому розділі продовжуємо дослідження для простору $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$, які були розглянуто в розділі 2.5 для $L_2(0,1)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ — простір функцій, які разом із своїми узагальненими похідними сумовні з квадратом на $(0,\pi)$ та дорівнюють нулю в точках 0 та π.

Нехай Π_∞ — множина операторів вигляду (2.48) для яких числовий ряд

$$\|L_0\| + \|L_1\| \cdot \|x\| + \cdots + \|L_n\| \cdot \|x\| + \cdots$$

збігається для всіх $x \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$, де $L_0 \in R^1$, $L_k x^k : \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi) \to R^1$ — k-та операторна степінь, що одержана із k-лінійної симетричної неперервної операторної форми $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) : (\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi))^k \to R^1$, коли $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = x$, $\|L_k\|$ — традиційна норма k-ї операторної степені, $k = \overline{1,n}$, $\|x\|$ — норма елемента x в $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$. Надалі такі оператори будемо називати цілими функціоналами, що визначені на просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$. Згідно з [85] введемо на множині Π_∞ скалярний добуток (2.59) і норму $\|F\|_H = (F,F)_H^{\frac{1}{2}}$, в яких $X = \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ — гільбертовий простір із гаусовою мірою μ, перший момент якої дорівнює нулю [17], $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}$ в (2.59) — k-лінійні неперервні симетричні операторні форми, що відповідають функціоналам $F_1, F_2 \in \Pi_\infty$.

Нехай Π_n — множина функціональних поліномів, які є n-ми частковими сумами ряду (2.48), $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормований базис в $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$. Відповідно до [85] визначимо множину інтерполяційних вузлів $\aleph(m) = \{x_i\}_{i=0}^N \subset X$

таким чином: $x_0 = 0$, $x_i = e_i$, $i = \overline{1,m}$, а решту як всілякі суми елементів e_i, $i = \overline{1,m}$, по два, по три і т.д., враховуючи повторення, до n доданків в кожній. Неважко показати, що $N = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^{k}$. Задачу поліноміальної інтерполяції функціоналів сформулюємо таким чином: необхідно знайти такий поліном $P_n^I \in \Pi_n$, для якого у вузлах x_i, $i = \overline{0,N}$, виконуються умови

$$P_n^I(x_i) = F(x_i), \ \ i = \overline{0,N}, \tag{2.76}$$

де $F : \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi) \to R^1$ — деякий, у загальному випадку, нелінійний функціонал. Розглянемо інтерполяційний функціональний поліном, що побудовано за методом ортогональних моментів [99], [134] на множині вузлі $\aleph(m)$

$$P_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{k} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_k}), \tag{2.77}$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$, а $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ — k-лінійні симетричні операторні форми, які обчислюються за рекурентною процедурою (2.62) [85]. В роботі [131] при виконанні певних умов доведено збіжність інтерполяційного процесу (2.77) на послідовності вузлів $\aleph(m)$ для цілого оператору у разі точних його вузлових значень.

Розглянемо випадок, коли значення функціоналу у вузлах x_i, $i = \overline{0,N}$, задані наближено та наближено обчислюються скалярні добутки в (2.77):

$$\widetilde{F}(x_i) = F(x_i) + \delta_i, \ \delta_i \in R^1,$$

$$\widetilde{(x, e_i)} = (x, e_i) + \Delta_i, \ i = \overline{0,N}.$$

Тоді інтерполяційний поліном (2.77) буде мати вигляд [137]

$$\widetilde{P}_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} \widetilde{L}_k^I(e_1,e_2,\ldots,e_k)\widetilde{(x,e_1)}\widetilde{(x,e_2)}\cdots\widetilde{(x,e_k)}, \qquad (2.78)$$

де $\widetilde{L}_k^I(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ обчислюються за формулами (2.62), але замість точних значень $F(x_i)$ функціоналу у вузлах використовуються наближені $\widetilde{F}(x_i)$, $i=\overline{0,N}$.

Оберемо ортогональну систему функцій $\{e_i\}_{i=1}^m$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ тригонометричною [91]. Розглянемо обчислення i-го коефіцієнта Фур'є функцій $x(t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$:

$$\widetilde{(x,e_i)} = (x',e_i')_{L_2(0,\pi)} + (x,e_i)_{L_2(0,\pi)} + \Delta_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (2.79)$$

$$\Delta_i = \Delta_i^1 + \Delta_i^2,\ i=\overline{1,m},$$

де $\Delta_i^1, i=\overline{1,m}$ — похибка обчислення першого інтегралу в правій частині (2.79), $\Delta_i^2, i=\overline{1,m}$ — другого. Нехай надалі виконуються нерівності

$$|\Delta_i^1| < \frac{C_1}{i^{r-1}},\ \ |\Delta_i^2| < \frac{C_2}{i^r},\ \ r>2,\ \ C_k = const, k=1,2. \qquad (2.80)$$

Такі оцінки точності мають місце, наприклад, якщо функція та її перша похідна належать до класу функцій Ліпшиця, при цьому для обчислення інтегралів кількість точок розбиття проміжку інтегрування перевищує числа i^{r-1} та i^r відповідно до [29].

Аналогічно [131] цілий функціонал $F(x)$ запишемо у вигляді

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x),$$

де $F_n(x) = L_0 + L_1x + \cdots + L_nx^n$, $R_n(x) = L_{n+1}x^{n+1} + L_{n+2}x^{n+2} + \cdots$. Нехай оператор B визначається збіжним рядом (2.46), де

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k<\infty,\quad x\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi),\quad TrB=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k.$$

Неважко бачити, що оператор B — додатній, самоспряжений та ядерний з власними функціями e_k та власними числами $\lambda_k>0$. Відомо [17], що оператор B буде кореляційним оператором деякої гаусової міри μ на $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$. Справедлива теорема 2.18

Теорема 2.18. *Нехай на множині вузлів $\aleph(m)$ задані наближені значення цілого функціоналу $F:\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)\to R^1$,*

$$\widetilde{F}(x_i)=F(x_i)+\delta_i,\ |\widetilde{F}(x_i)|\le K=const;\ |\delta_i|\le\delta\forall i,\ i=\overline{0,N};$$

скалярні добутки в (2.78) обчислюються наближено $\widetilde{(x,e_i)}=(x,e_i)+\Delta_i$, $i=\overline{0,N}$, та виконуються нерівності (2.80). Тоді, з точністю до членів першого порядку малості включно відносно величин δ_i та Δ_i, $i=\overline{0,N}$, має місце оцінка

$$\|F-\widetilde{P}_n^I\|_H<\left\{\sum_{k=1}^{n}k^2\|L_k\|^2(TrB)^{k-1}\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda_i\right\}^{\frac12}+$$

$$+\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\|L_k\|^2(TrB)^k+\max_{0\le i\le N}|R_n(x_i)|^2\sum_{k=1}^{n}c_k^2(TrB)^k\right\}^{\frac12}+$$

$$+\left\{\max_{0\le i\le N}|\delta_i|^2\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k\right\}^{\frac12}+$$

$$\{C_1\zeta(r-1)+C_2\zeta(r)\}(K+\delta)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2c_k^2(TrB)^{k-1}\right\}^{\frac12},\tag{2.81}$$

де $\zeta(r)$ — функція Рімана, $c_k=\alpha_k(1+\alpha_{k+1})\cdots(1+\alpha_n)$, $\alpha_k=\dfrac{2^k}{k!}$, $k=\overline{1,n}$.

Доведення. В загальних рисах доведення повторює доведення теореми 2.14 [209]. Оскільки інтерполяційний поліном $\widetilde{P}_n^I(x)$ лінійний за F, то з точністю до членів першого порядку малості відносно величин Δ_i та δ_i його можна записати у вигляді

$$\widetilde{P}_n^I(x) = P_n^I(x) + P_n^{(\delta)}(x) + P_{n-1}^{(\Delta)}(x), \tag{2.82}$$

де поліном $P_n^{(\delta)}(x)$ має вигляд (2.77), а його значення у вузлах x_i дорівнюють δ_i, $i = \overline{0, N}$,

$$P_{n-1}^{(\Delta)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_{k-1}})\Delta_{i_k}. \tag{2.83}$$

Знайдемо оцінку точності інтерполяції функціоналу $F \in \Pi_\infty$ в метриці простору H. Маємо

$$\|F - \widetilde{P}_n^I\|_H = \|F - P_n^I - P_n^{(\delta)} - P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H \leq$$

$$\leq \|F - P_n^I - P_n^{(\delta)}\|_H + \|P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H. \tag{2.84}$$

Перший доданок у правій частині нерівності (2.84) задовольняє нерівності (2.51) Оцінимо другий доданок в нерівності (2.84). Оскільки

$$\widetilde{F}(x_i) = F(x_i) + \delta_i,$$

то

$$|F(x_i)| \leq |\widetilde{F}(x_i)| + |\delta_i| \leq K + \delta.$$

Враховуючи оцінки

$$|L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})| \le c_k \max_{0\le i\le N} |F(x_i)|$$

(див. [131]), де c_k визначені в позначеннях теореми 2.18 та рівність [17]:

$$\int\limits_X (v, e_i)(v, e_j)\mu(dv) = (Be_i, e_j) = \lambda_i\delta_{ij},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, а також формули (2.79), (2.80), одержимо

$$\|P_{n-1}^{(\Delta)}\|_H^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_X \cdots \int\limits_X k \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})\times$$

$$\times(v_1, e_{i_1})(v_2, e_{i_2})\cdots(v_k, e_{i_k})\Delta_{i_k}\times$$

$$\times k \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=1}^{m} L_k^I(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k})(v_1, e_{j_1})(v_2, e_{j_2})\cdots(v_k, e_{j_k})\Delta_{j_k}\times$$

$$\times\mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_X \cdots \int\limits_X k^2 \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(v_1, e_{i_1})(v_2, e_{i_2})\cdots(v_k, e_{i_k})\times$$

$$\times(\Delta_{i_k}^1 + \Delta_{i_k}^2) \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=1} L_k^I(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k})(v_1, e_{j_1})(v_2, e_{j_2})\cdots(v_k, e_{j_k})\times$$

$$\times(\Delta_{j_k}^1 + \Delta_{j_k}^2)\mu(dv_1)\mu(dv_2)\cdots\mu(dv_k) <$$

$$< (K+\delta)^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 c_k^2 (TrB)^{k-1} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{C_1}{i^{r-1}} + \frac{C_2}{i^r} \right) \right\}^2 <$$

$$< (C_1\zeta(r-1)+C_2\zeta(r))^2(K+\delta)^2\sum_{k=1}^{n-1}k^2c_k^2(TrB)^{k-1}. \qquad (2.85)$$

Підставимо (2.51), (2.85) в (2.84) і отримаємо оцінку (2.81). Теорему 2.18 доведено.

□

Послідовності

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}c_k^2(TrB)^k,\ \ U_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2c_k^2(TrB)^k$$

збігаються, коли $n\to\infty$. Нехай S^2, U^2 відповідно їх границі. Оскільки функціонал $F:\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)\to R^1$ — цілий, то ряд $\sum\|L_k\|^2(TrB)^k$ — збігається. Позначимо залишок цього ряду після n-го члена як φ_n^2. Тоді в умовах теореми 2.18, як її наслідки мають місце такі результати.

Теорема 2.19. *Нехай* $|R_n(x_i)|^2\le\psi_n^2$ *та виконуються умови теореми 2.18. Тоді має місце оцінка*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\|F-\widetilde{P}_n^I\|_H\le\left\{\varphi_n^2+(S^2-1)\psi_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}+S\delta+$$

$$+\left\{C_1\zeta(r-1)+C_2\zeta(r)\right\}U(K+\delta). \qquad (2.86)$$

Теорема 2.20. *Нехай виконуються умови теореми 2.19 та* $\psi_n\to0$ *монотонно. Тоді точність інтерполювання не покращується в сенсі оцінки* (2.86), *коли* $n\ge n_0$, *де* n_0 *— максимальне ціле число, що відповідає нерівності*

$$\left\{\varphi_n^2+(S^2-1)\psi_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\ge S\delta+\left\{C_1\zeta(r-1)+C_2\zeta(r)\right\}U(K+\delta). \qquad (2.87)$$

Розглянемо тепер задачу інтерполяції поліноміального функціоналу $F:\overset{0}{W}{}_2^1\to R^1$, $F_n\in\Pi_n$ із інтерполяційними умовами (2.76) у випадку, коли задані наближені його значення $\widetilde{F}(x_i)$ у вузлах x_i, $i = \overline{0, N}$, і скалярні добутки в (2.78) обчислюються також наближено. Нехай виконуються умови (2.80). Залишимо позначення для $P_n^{(\delta)}(x)$, $P_{n-1}^{(\Delta)}(x)$ такими, якими вони були введені раніше. Має місце теорема 2.21.

Теорема 2.21. *Нехай задані наближені значення поліноміального функціоналу* $F_n : \overset{0}{W}{}_2^1 \to R^1$ *на множині* $\aleph(m)$,

$$\widetilde{F}_n(x_i) = F_n(x_i) + \delta_i, \ |\widetilde{F}_n(x_i)| \le K = const; \ |\delta_i| \le \delta \forall i, \ i = \overline{0, N};$$

скалярні добутки в (2.78) *обчислюються наближено та виконуються співвідношення* (2.79)*,* (2.80)*. Тоді з точністю до членів першого порядку малості відносно величин* δ_i *та* Δ_i *справедлива оцінка*

$$\|F_n - \widetilde{P}_n^I\|_H < \left\{ \alpha_n \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i + \beta_n \delta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \{C_1 \zeta(r-1) + C_2 \zeta(r)\} U_{n-1}(K + \delta,) \tag{2.88}$$

де $\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1}$, $\beta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 (TrB)^k$.

Доведення. Для функціоналу $F_n \in \Pi_n$ мають місце формули (2.82) – (2.84) та (2.85). На підставі теореми 1 із роботи [208] отримаємо

$$\|F_n - P_n^I - P_n^{(\delta)}\|_H < \left\{ \alpha_n \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i + \beta_n \delta^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.89}$$

Підставимо (2.85), (2.89) в (2.84) і одержимо оцінку (2.88). □

Для знаходження числа вузлів m_0, перевищення якого не покращує оцінку точності інтерполяції (2.88), у формулі для кореляційного оператора B міри μ покладемо $\lambda_k = q^k$, $q \in (0, 1)$. Тоді оцінка (2.88) запишеться таким чином

$$\|F_n - \widetilde{P}_n^I\|_H \le \left\{\alpha_n \frac{q^{m+1}}{1-q} + \beta_n\delta^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \{C_1\zeta(r-1) + C_2\zeta(r)\} U_{n-1}(K+\delta) \le$$

$$\le \sqrt{2}\left(\alpha_n \frac{q^{m+1}}{1-q} + \beta_n\delta^2 + \{C_1\zeta(r-1) + C_2\zeta(r)\}^2 U_{n-1}^2(K+\delta)^2\right). \quad (2.90)$$

Нехай $E(x)$ — ціла частина числа x. Тоді з нерівності (2.90) отримаємо

$$m_0 = E\left(\frac{\beta_n\delta^2 + \{C_1\zeta(r-1) + C_2\zeta(r)\}^2 U_{n-1}^2(K+\delta)^2}{\alpha_n}(1-q)\right) - 1.$$

2.7 Інтерполяційна задача Лагранжа в скінченновимірному евклідовому просторі

В задачах ідентифікації об'єкта на основі спостереження за його реакцією на вхідні сигнали особливо цікавим є випадок, коли вихідної інформації про досліджуємий об'єкт недостатньо: число інтерполяційних умов є меншим, ніж розмірність простору поліномів, на якому шукається розв'язок інтерполяційної задачі в скінченновимірному евклідовому просторі без додаткових обмежень. Таку задачу будемо називати недовизначеною. Дослідженню задачі інтерполяції функцій багатьох змінних в умовах недовизначеності присвячено даний підрозділ.

Нехай X, Y — гільбертові простори, μ — гаусова міра на X, перший момент якої дорівнює нулю, $B(u,v)$ — кореляційний функціонал, B — кореляційний оператор цієї міри відповідно. Тоді має місце рівність [27], [17]

$$B(u,v) = \int_X (x,u)(x,v)\mu(dx) = (Bu,v), u, v, x \in X, \quad (2.91)$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в X. Нехай Π_n — множина операторних поліномів, що визначається формулою (1.1). В розділі 2.1 на просторі Π_n введено скалярний добуток (P_n^1, P_n^2) за формулою (2.1) та норму

$$\|P_n\| = (P_n, P_n)^{(1/2)}.$$

Нехай задано: система елементів $\{x_i\}_{i=1}^m \in X$, оператор $F : X \to Y$ заданий своїми значеннями $F(Bx_i), i = \overline{1,m}$. Для оператора $F(x)$ необхідно побудувати єдиний операторний поліном $P_n \in \Pi_n$, що задовольняє інтерполяційним умовам

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i), i = \overline{1,m}. \tag{2.92}$$

Визначення 2.1. *Інтерполяційний поліном P_n називають інтерполянтом мінімальної норми, якщо він є розв'язком екстремальної задачі*

$$\|P_n\| = \min \|Q_n\|, \ \ Q_n \in \Pi_n^I,$$

де Π_n^I — множина поліномів степеня n з інтерполяційними умовами (2.92).

Позначимо: $F = \{F(Bx_i)\}_{i=1}^m$, $\Gamma = \left\| \sum\limits_{k=0}^{n} (Bx_i, x_j)^k \right\|_{i,j=1}^m$, $0^0 = 1$, Γ^+ — псевдообернена матриця Мура – Пенроуза до матриці Γ [57], E — одинична матриця.

В [68], [85], [218] доведено, що задача операторної інтерполяції з умовами (2.92) розв'язувана у разі виконання умови (1.8), де $A_0 = E - \Gamma\Gamma^+$, а її розв'язок $P_n(x)$ має вигляд (1.11), при цьому $P_n(x)$ є інтерполянтом мінімальної норми на множині поліномів Π_n^I.

В [176] показано, що в гільбертовому просторі задача інтерполяції інваріантно розв'язна, тобто інтерполянт існує при будь якому $\vec{F} = \{F(Bx_i)\}_{i=1}^m$, якщо вузли інтерполяції $Bx_i, i = \overline{1,m}$ різні та виконується умова

$$m \leq n + 1. \tag{2.93}$$

Очевидно, що в цьому випадку на підставі (1.8) $\Gamma^{+} = \Gamma^{-1}$.

Розглянемо розв'язання інтерполяційної задачі в скінченновимірному евклідовому просторі E_k. Застосуємо наведені вище результати для цього простору. Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо спочатку евклідовий простір E_2 з гаусовою мірою μ. Нехай функція $f : E_2 \to R_1$ задана своїми значеннями в точках $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, m}$, $m \leq p$, де p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2 , $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\gamma = (x, y)$. Нехай $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Тоді рівність (2.91) запишеться таким чином

$$B(u, v) = \int\limits_{E_2} (\gamma, u)(\gamma, v)\mu(d\gamma) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_1 x + u_2 y)(v_1 x + v_2 y) g(x) g(y) dx dy =$$

$$= (u_1 v_1 + u_2 v_2) = (u, v) = (Iu, v).$$

Отже, у випадку $X = E_2$ за оператор B можна обрати одиничний оператор (матрицю) I, за вузли інтерполяції вектори $\gamma_i = (x_i, y_i), i = \overline{1, m}$.

Запишемо розв'язок задачі

$$P_n(\gamma_i) = f(\gamma_i), \quad i = \overline{1, p}, \tag{2.94}$$

у вигляді інтерполянта мінімальної норми:

$$P_n(x, y) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{+} \sum_{p=0}^{n} \{(x_i x + y_i y)^p\}_{i=1}^{m} \right\rangle, \tag{2.95}$$

де $\vec{f} = f(\gamma_i)_{i=1}^m$, $\Gamma = \| \sum\limits_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p \|_{i,j=1}^m$. Якщо виконується нерівність (2.93) та всі вузли γ_i є різни, то $\Gamma^+ = \Gamma^{-1}$. В даному розділі для евклідового простору одержимо більш сильний результат оберненості матриці Γ в порівнянні з (2.93).

Побудуємо розв'язок даної задачі на підставі результатів загальної теорії інтерполяції функцій багатьох змінних [12]. Шуканий інтерполяційний поліном $P_n(\gamma) = P_n(x, y)$ запишемо у вигляді

$$P_n(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots +$$

$$+a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0n}y^n, \qquad (2.96)$$

де $a_{ik} \in R_1$, $i, k = \overline{0, n}$ — невідомі коефіцієнти. Для однозначного розв'язку інтерполяційної задачі потрібно знайти такі вузли $\gamma_i \in E_2$, $i = \overline{1, p}$, щоб визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.94) відносно a_{ik}, $i, k = \overline{0, n}$, не перетворювався у нуль.

Як показано в [12], це має місце якщо за вузли інтерполяції обрати наступну систему точок

$$\begin{array}{lllll} (x_1, y_1), & (x_2, y_1), & \cdots, & (x_{n-1}, y_1), & (x_n, y_1), \\ (x_1, y_2), & (x_2, y_2), & \cdots, & (x_{n-1}, y_2), & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ (x_1, y_{n-1}), & (x_2, y_{n-1}), & & & \\ (x_1, y_n), & & & & \end{array} \qquad (2.97)$$

$x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$, при $i \neq j$. При такому виборі вузлів однозначно визначимо a_{ik}, $i, k = \overline{0, n}$, отже інтерполяційний поліном (2.96) - побудований і він єдиний.

Тепер застосуємо систему вузлів (2.97) для побудови інтерполянта (2.95). Оскільки розв'язок задачі в цьому випадку єдиний, то інтерполяційні поліноми (2.96) та мінімальної норми (2.95) співпадають. Розглянемо елементи матриці Г [200]:

$$\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma_j)^p=\sum_{p=0}^{n}(\overline{x}_i\overline{x}_j+\overline{y}_i\overline{y}_j)^p=1+\overline{x}_i\overline{x}_j+\overline{y}_i\overline{y}_j+(\overline{x}_i\overline{x}_j)^2+2\overline{x}_i\overline{x}_j\overline{y}_i\overline{y}_j+(\overline{y}_i\overline{y}_j)^2+$$

$$+\cdots+(\overline{x}_i\overline{x}_j)^n+n(\overline{x}_i\overline{x}_j)^{n-1}\overline{y}_i\overline{y}_j+\cdots+n\overline{x}_i\overline{x}_j(\overline{y}_i\overline{y}_j)^{n-1}+(\overline{y}_i\overline{y}_j)^n,$$

де $(\overline{x_i},\overline{y_j})$ — це точки з множини (2.97). Введемо вектори s_i, що визначаються наступним чином

$$s_i=(1,x_i,y_i,x_i^2,\sqrt{2}x_iy_i,y_i^2,\ldots,x_i^n,\sqrt{n}x_i^{n-1}y_i,\ldots,\sqrt{n}x_iy_i^{n-1},y_i^n), \qquad (2.98)$$

$$i=\overline{1,m}.$$

і вони є лінійно незалежними відповідно до [12]. Тоді матриця Г набуває вигляду матриці Грама

$$\Gamma=\begin{pmatrix}(s_1,s_1) & \cdots & (s_1,s_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (s_m,s_1) & \cdots & (s_m,s_m)\end{pmatrix},\quad m\le p, \qquad (2.99)$$

що буде невиродженою. Оскільки будь-яка підсистема векторів із (2.98) буде також лінійно незалежною, при цьому матриця Г буде мати обернену, то інтерполяційна задача буде інваріантно розв'язною і мати єдиний розв'язок у вигляді полінома мінімальної норми (2.95), де $\Gamma^+=\Gamma^{-1}$. Отже, має місце наступна

Теорема 2.22. *Нехай функція $f : E_2 \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i), i = \overline{1,m}$. Якщо вузли інтерполяції γ_i, $i = \overline{1,m}$, обрати таким чином, що підсистема векторів із* (2.98) *є лінійно незалежною (наприклад, підмножину точок* (2.97)*), то задача інтерполяції функції двох змінних інваріантно розв'язна і має єдиний розв'язок мінімальної норми у випадку коли $m \leq p$, де p — розмірність простору поліномів в E_2 степеня n.*

Таким чином, для функції $f : E_2 \to R_1$ в умовах теореми (2.22) отримано більш сильні результати в порівнянні з нерівністю (2.93).

Відмітимо, що матрицю Γ в цьому випадку можна записати у вигляді

$$\Gamma = \left\| \sum_{k=0}^{n} (\gamma_i, \gamma_j)^k \right\|_{i,j=1}^{m} = \left\| \sum_{k=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^k \right\|_{i,j=1}^{m} = AA',$$

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \sqrt{2}x_1 y_1 & y_1^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_m & y_m & x_m^2 & \sqrt{2}x_m y_m & y_m^2 & \cdots \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \cdots & x_1^n & \sqrt{n}x_1^{n-1}y_1 & \cdots & \sqrt{n}x_1 y_1^{n-1} & y_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & x_m^n & \sqrt{n}x_m^{n-1}y_m & \cdots & \sqrt{n}x_m y_m^{n-1} & y_m^n \end{matrix} \right\|,$$

Таке представлення матриці Γ було розглянуто в [77].

Для інтерполянта мінімальної норми (2.95) одержимо таку формулу

$$P_n(x,y) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(x_i x + y_i y)^k\}_{i=1}^{m} \right\rangle, \vec{f} = \{f(\gamma_i)\}_{i=1}^{m}. \qquad (2.100)$$

Одержані результати можна перенести для функції багатьох змінних $f : E_k \to R_1$, де E_k — k-вимірний евклідовий простір. Нехай розв'язок інтерполяційної задачі шукаємо на просторі Π_{kn} поліномів k змінних n-го степеня розмірності $p = \dfrac{(n+k)!}{n!k!}$. Тоді, як зазначено в [8], завжди можна знайти систему вузлів $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in E_k$, $i = \overline{1,p}$, при яких задача інтерполяції функції багатьох змінних буде мати єдиний розв'язок, а система векторів s_i, матриця Γ та інтерполянт мінімальної норми (2.100) у випадку $m \le p$ запишуться для $i = \overline{1,m}$, у такому вигляді

$$s_i = \left\{ \left(\frac{j!}{j_1! j_2! \cdots j_k!} \right)^{1/2} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \cdots x_{i_k}^{j_k}, j_1 + j_2 + \cdots + j_k = j, 0! = 1 \right\}_{j=0}^{n}, \tag{2.101}$$

$$\Gamma = \left\| \sum_{k=0}^{n} (\gamma_i, \gamma_j)^k \right\|_{i,j=1}^{m} = \left\| \sum_{k=0}^{n} (x_{i_1} x_{j_1} + \cdots + x_{i_k} x_{j_k})^k \right\|_{i,j=1}^{m} = AA',$$

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & x_{1_1} & \cdots & x_{1_k} & \cdots & x_{1_1}^2 & \sqrt{2} x_{1_1} x_{1_2} & \cdots & \sqrt{2} x_{1_1} x_{1_k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m_1} & \cdots & x_{m_k} & \cdots & x_{m_1}^2 & \sqrt{2} x_{m_1} x_{m_2} & \cdots & \sqrt{2} x_{m_1} x_{m_k} & \cdots \end{matrix} \right\|$$

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(x_1 x_{i_1} + x_2 x_{i_2} + \cdots + x_k x_{i_k})^k\}_{i=1}^{m} \right\rangle. \tag{2.102}$$

На підставі вище наведених міркувань можна сформулювати теорему [45].

Теорема 2.23. *Нехай функція* $f : E_k \to R_1$ *задана своїми значеннями* $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$. *Якщо вузли інтерполяції* γ_i *обрати таким чином, що відповідна система векторів із* (2.101) *буде лінійно незалежною, то задача інтерполяції функції багатьох змінних на просторі* Π_{kn} *з умовами*

$P_n(\gamma_i) = f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, $P_n \in \Pi_{kn}$ *інваріантно розв'язна і має єдиний розв'язок мінімальної норми у випадку коли* $m \leq p$, *де* p — *розмірність простору* Π_{kn}.

Приклад 2.3. *Розглянемо побудову інтерполяційного полінома мінімальної норми* $P_2(x, y)$ *другого степеня на підставі формули* (2.100). *Вузли інтерполювання оберемо із множини точок* (2.97) *таким чином*

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = (0,0), \;\; \gamma_2 = (1,0), \;\; \gamma_3 = (2,0) \\
&\gamma_4 = (0,2), \;\; \gamma_5 = (1,2), \\
&\gamma_6 = (0,3).
\end{aligned}$$

Вектори s_i *запишуться за формулою* (2.98) *у вигляді*

$$s_1 = (1,0,0,0,0,0), \;\; s_2 = (1,1,0,1,0,0),$$

$$s_3 = (1,2,0,4,0,0), \;\; s_4 = (1,0,2,0,0,4),$$

$$s_5 = (1,1,2,1,2\sqrt{2},4), \;\; s_6 = (1,0,3,0,0,9).$$

Оскільки не існує кривої другого порядку, що проходить через точки γ_i, $i = \overline{1,6}$ *[12], то вектори* s_i, $i = \overline{1,6}$, *є лінійно незалежними і матриця Грама* (2.99) *буде невиродженою. Приходимо до висновку, що для побудови інтерполянта* (2.100) *можна обрати будь-яку підсистему векторів із* (2.98), *тобто інтерполяційна задача буде інваріантно розв'язною і мати єдиний розв'язок (в сенсі мінімальної норми) у випадку, коли* $m \leq 6$ *(*$p = 6$*).*

Оберемо $m = 3$, *підсистему векторів із* (2.98) s_1, s_3, s_4. *Для зручності позначимо їх як* $\overline{s_1} = s_1, \overline{s_2} = s_3$, $\overline{s_3} = s_4$. *Тоді матриця Грама в* (2.99) *буде невиродженою, а інтерполяційний поліном* (2.100) *($n = 2$, $m = 3$), що відповідає умовам* (2.94) *набуває вигляду*

$$P_2(\gamma) = P_2(x,y) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{p=0}^{2} \{(x_i x + y_i y)^p\}_{i=1}^{3} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} l_i(\gamma) f(\gamma_i),$$

де $l_i(\gamma) = l_i(x,y)$ — фундаментальні поліноми Лагранжа, $l_i(\gamma_j) = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i,j = 1,2,3$,

$$l_1(x,y) = 1 - 0,1(x + y + 2x^2 + 2y^2), \;\; l_2(x,y) = 0,1(x + 2x^2),$$

$$l_3(x,y) = 0,1(y + 2y^2).$$

Таким чином, приходимо до висновку, що при виконанні умов теореми 2.23, існує єдиний розв'язок задачі інтерполювання функції двох (а отже і багатьох) змінних в умовах недовизначеності. Крім того в умовах теореми 2.23 отримано більш сильний результат в порівнянні з [176] стосовно кількості вузлів для існування матриці оберненої до матриці Г.

Проведемо порівняльний аналіз побудови двох інтерполянтів за класичним підходом [12] та запропонованим у цьому розділі для $m = p$. За систему вузлів оберемо набір точок (2.97). При побудові полінома (2.96) задача зводиться до відшукання розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.94) із невиродженою матрицею загального вигляду. У першому випадку для її розв'язання скористаємося методом Гауса, що потребує $Q(m) = 2/3m^3 + O(m^2)$ арифметичних дій. У другому випадку для побудови полінома (2.100) необхідно визначити вектор

$$\Gamma^{-1} \sum_{p=0}^{n} \{(\overline{x}_i x + \overline{y}_i y)^p\}_{i=1}^{m} = z,$$

що еквівалентно розв'язанню системи

$$\Gamma z = \sum_{p=0}^{n} \{(\overline{x}_i x + \overline{y}_i y)^p\}_{i=1}^{m} = l(x, y), \tag{2.103}$$

де $l(x, y)$ — поліном n-го степеня двох змінних. Розв'язок системи (2.103) з неособливою симетричною матрицею Γ знайдемо за методом квадратного кореня, що потребує $Q(m) = 1/3m^3 + O(m^2)$ числа арифметичних дій, тобто за сталою при m^3 вдвічі меншою ніж за методом Гауса. Таким чином, при порівнянні двох методів побудови інтерполяційного полінома для функції $f : E_2 \to R_1$ приходимо до висновку, що у випадку, коли $m = p$ (m - число вузлів, p - розмірність простору поліномів в E_2 другого степеня), а за вузли інтерполяції обрано систему (2.97) інтерполянти (2.100) та (2.96) співпадають, але перевагу за кількістю арифметичних дій має поліном мінімальної норми, зокрема його формула зручніше для використання. Якщо m<p, то при побудові (2.96) на підставі умов (2.94) з вузлами (2.97) класичний підхід [12] не забезпечує єдиності розв'язку, в той же час інтерполяційний поліном (2.100) буде єдиним, при цьому маємо конструктивну формулу для побудови інтерполянта достатньо простого вигляду.

2.8 Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком

В [8] показано, що для побудови єдиного інтерполяційного полінома в евклідовому просторі E_k необхідно, щоб між степенем полінома n та числом вузлів m виконувалось співвідношення $m = \dfrac{(n+k)!}{n!k!}$. Крім того, побудова інтерполянта степеня n в E_k викликає певні труднощі. На практиці виникають випадки, коли задана кількість вузлів інтерполяції менше, ніж їх потрібно для побудови єдиного інтерполянта відповідного степеня. В розділі 2.7 показано, що в скінченновимірному евклідовому просторі число вузлів можна обрати меншим, ніж розмірність простору поліномів, на якому шукається розв'язок, при цьому задача буде інваріантно розв'язною та мати єдиний розв'язок мінімальної норми, яка породжена скалярним добутком за гаусовою мірою [27], [108]. Задача інтерполяції називається інваріантно розв'язною, якщо вона має розв'язок для довільних значень функції у вузлах. В [218] наведені інтерполяційні операторні поліноми в гільбертовому просторі. Один із цих інтерполянтів розглянуто в цьому розділі. Показано, що він являє собою інтерполяційну формулу Лагранжа з фундаментальними функціональними поліномами в лінійному просторі із скалярним добутком. Ця інтерполяційна формула Лагранжа (число вузлів m та степінь полінома n не пов'язані між собою) досліджується як для випадку нескінченновимірного лінійного простору, так і для випадку скінченновимірного евклідового простору E_k, визначені умови точності формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня.

Інтерполяційний операторний поліном в [218] n-го степеня для оператора f має вигляд

$$P_n(x) = \left\langle \overline{f}, \Gamma_m^+ \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p |_{i=1}^m \right\rangle, \tag{2.104}$$

відповідає умовам

$$P_n(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2.105}$$

де x_i — вузли інтерполяції, $\overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $x_i, x \in H$, H — гільбертовий простір, $f : H \to Y$, Y — лінійний простір, $f_i \in Y$, Γ_m^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці [211]

$$\Gamma_m = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x_j)^p \right\|,$$

$< \cdot, \cdot >= \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \alpha_i,\ \alpha_i \in R_1$. В [218] доведено, що для розв'язуваності інтерполяційної задачі необхідно та достатньо виконання умови (1.8), де $A_0 = E - \Gamma_m^+ \Gamma = E - \Gamma \Gamma_m^+$, A_0 — ідемпотентна, симетрична матриця. Якщо матриця Γ_m невироджена ($\Gamma_m^+ = \Gamma_m^{-1}$), тоді на підставі (1.8) задача буде інваріантно розв'язною, тобто розв'язок буде існувати для будь-яких значень оператора у вузлах. Позначимо $\Gamma_m^k = \left\| (x_i, x_j)^k \right\|$. В [218] показано, що у випадку виконання умови

$$rg(\Gamma_m^0 + \Gamma_m^1) + n - 1 \geq m \tag{2.106}$$

задача операторного інтерполювання інваріантно розв'язувана. Отже, розглянемо випадок, коли задача інваріантно розв'язна: $\Gamma_m^+ = \Gamma_m^{-1}$, а формула (2.104) набуває вигляду:

$$P_n(x) = \left\langle \overline{f}, \Gamma_m^{-1} \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p |_{i=1}^{m} \right\rangle. \tag{2.107}$$

Надалі формулу (2.107) перепишемо в іншому вигляді та зведемо її до формули Лагранжа в лінійному просторі із скалярним добутком. Нехай X, Y — лінійні простори, X — із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, $f : X \to Y$, $P_n(x)$ — інтерполяційний операторний поліном степеня n для f з вузлами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $x, x_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, виконуються умови (2.105), а вузли x_i обрані таким чином, щоб матриця $\| P_{ni}(x_j) \|$ була неособливою, де

$$P_{ni}(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{ki} x^k, L_{ki} x^k = (x_i, x)^k, L_{0i} = 1, P_{ni} : X \to R_1, i = \overline{1, m}.$$

Невиродженість матриці для скінченновимірного евклідового простору розглянуто в розділі 2.7 за рахунок вибору незалежних векторів, пов'язаних з вузлами. Надалі позначимо:

$$\overline{P_n}(x) = (P_{n1}(x), P_{n2}(x), \ldots, P_{nm}(x)),$$

а через $P_{ni}^{-1}(x_j)$ елементи матриці $\|P_{ni}(x_j)\|^{-1}$. Відповідно до [218] маємо

$$P_n(x) = \left\langle \overline{f}, \|P_{ni}(x_j)\|^{-1}\overline{P_n}(x)\right\rangle = \left\langle \overline{f}, \|P_{ni}^{-1}(x_j)\|\overline{P_n}(x)\right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f_i \sum_{j=1}^{m} P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x) = \sum_{j=1}^{m} f_i l_i(x), \qquad (2.108)$$

де

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{m} P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x),$$

$$l_i(x_k) = \sum_{j=1}^{m} P_{ni}^{-1}(x_j) P_{nj}(x_k) = \delta_{ik}, \qquad (2.109)$$

δ_{ik} — символ Кронекера. Враховуючи (2.108), (2.109), отримуємо

$$P_n(x_k) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x_k) = f_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, m}.$$

Таким чином, формула (2.108) являє собою формулу Лагранжа для інтерполяційного полінома в лінійному просторі із скалярним добутком

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x), l_i(x_k) = \delta_{ik}, i, k = \overline{1, m}, \qquad (2.110)$$

де $l_i(x)$ — фундаментальні поліноми Лагранжа степеня n, $l_i : X \to R_1$.

Зауважимо, що інтерполянт (2.110) з вузлами $x_i, i = \overline{1, m}$ не єдиний в X. Дійсно, якщо $p_n : X \to Y$ довільний операторний поліном n-го степеня [110], то формула

$$P_n(x) = p_n(x) + \sum_{i=1}^{m} (f_i - p_n(x_i)) l_i(x) \tag{2.111}$$

визначає множину інтерполяційних операторних поліномів n-го степеня для оператора f,

$$P_n(x_k) = p_n(x_k) + \sum_{i=1}^{m} (f_i - p_n(x_i)) l_i(x_k) =$$

$$= p_n(x_k) + \sum_{i=1}^{m} (f_i - p_n(x_i)) \delta_{ik} = f_k = f(x_k), k = \overline{1, m}.$$

В [218] доведено, що інтерполянт вигляду (2.110), який належить множині (2.111), має мінімальну норму породжену скалярним добутком за гаусовою мірою [27], [108].

Відомо, що в нескінченно вимірних просторах скінчена множина вузлів не гарантує єдиності інтерполянта та його інваріантності щодо поліномів відповідного степеня. У роботах [116], [108], [186] континуальна інформація, що використовується для побудови інтерполяційного полінома, не забезпечує єдиності інтерполяційної формули. У [186] викладена так звана "Kergin interpolation"як для функцій багатьох змінних, так і в банаховому просторі. Відзначимо, по-перше, що наведені там інтерполяційні формули з точністю до еквівалентних перетворень інтегралів збігаються з формулами [116], [108], отриманими ще в 60-х роках минулого століття, а по-друге, з них неможливо отримати класичні інтерполяційні формули Ньютона для функцій багатьох змінних [82].

Відмітимо, що вираз [46]

$$p_n(x) - \sum_{i=1}^{m} p_n(x_i) l_i(x) \tag{2.112}$$

не перетворюється в нуль-елемент нескінченновимірного лінійного простору Y [110], тобто формула Лагранжа не є "точною"на операторних поліномах відповідного степеня, а числа m та n при побудові полінома (2.108) не пов'язані між собою.

Приклад 2.4. *Покладемо в* (2.112) $n = 1$, *де* $p_1 : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$p_1(x) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

де $K(t,s)$ *– неперервна функція на* $[0,1] \times [0,1]$. *Враховуючі вигляд* $l_i(x)$, *одержимо, що*

$$p_1(x) - \sum_{i=1}^{m} p_1(x_i)l_i(x) \neq 0.$$

Отже, в нескінченновимірному лінійному просторі формула Лагранжа не є точною на поліномах відповідного степеня.

Розглянемо частинний випадок, коли X є скінченновимірним евклідовим простором на прикладі простору E_2, $f : E_2 \to R_1$,

$$u \in E_2, u = (x,y), \;\; u_i = (x_i, y_i), \;\; i = \overline{1,m},$$

де u_i обираємо таким чином, щоб матриця

$$\left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|$$

мала обернену [45]. З (2.108) одержимо

$$P_n(x,y) = \left(\overline{f}, \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^{n} (x_i x + y_i y)^p |_{i=1}^{m} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{f}_i l_i(x, y), \tag{2.113}$$

Тоді

$$l_i(x, y)|_{i=1}^{m} = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^{n} (x x_i + y y_i)^p |_{i=1}^{m},$$

$$l_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, i, k = \overline{1, m}.$$

Враховуючи (2.113), маємо

$$P_n(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^{m} f_i l_i(x_k, y_k) = f_k = f(x_k, y_k), k = \overline{1, m}$$

і формула (2.109) є інтерполяційною формулою Лагранжа для $f : E_2 \to R_1$, де $l_i(x, y)$ — фундаментальні поліноми Лагранжа двох змінних степеня n. Також на підставі [218] $P_n(x, y)$ є інтерполянтом мінімальної норми [27], [108] на множині інтерполянтів n-го степеня двох змінних.

Надалі будемо вважати, що число m задано (фіксовано), а степінь n інтерполяційного полінома обираємо з нерівності

$$m \le \min p = \overline{p},$$

де p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ [12].

Приклад 2.5. *Нехай* $m = 2$, $u_i = (x_i, y_i), i = 1, 2$, $u_1 = (0, 1), u_2 = (1, 0)$. *Тоді*

$$m = 2 \le \min \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \overline{p} = 3, n = 1.$$

Перевіримо виконання умови (2.106) *інваріантної розв'язуваності задачі:*

$$rg(\Gamma_m^0 + \Gamma_m^1) + n - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \geq m, m = 2.$$

Отже при такому виборі вузлів задача інваріантно розв'язувана, тобто матриця Γ_2 *має обернену. Побудуємо інтерполяційний поліном. Маємо*

$$\left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} = \frac{1}{3} \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^{1} (u_i, u)^p |_{i=1}^2 = \frac{1}{3} \left\| \begin{matrix} 1 - x + 2y \\ 1 + 2x - y \end{matrix} \right\|,$$

$$l_1(x, y) = \frac{1}{3}(1 - x + 2y), \quad l_2(x, y) = \frac{1}{3}(1 + 2x - y), l_i(u_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2,$$

$$P_1(x, y) = \sum_{i=1}^{2} f_i l_i(x, y).$$

Нехай $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$. *Тоді* $f_1 = f(0, 1) = 4, f_2 = f(1, 0) = 3,$

$$P_1(x, y) = 4\frac{1}{3}(1 - x + 2y) + 3 \cdot \frac{1}{3}(1 + 2x - y) =$$

$$= \frac{1}{3}(7 + 2x + 5y) \neq 1 + 2x + 3y,$$

тобто у випадку $m = 2, \overline{p} = 3$, $n = 1$ *інтерполянт* $P_1(x, y)$ *не є точним на поліномі 1-го степеня.*

Приклад 2.6. *Нехай* $m = 3$,

$$u_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3, \quad u_1 = (0, 1), \quad u_2 = (1, 0), \quad u_3 = (0, -1).$$

Тоді

$$m = 3 \le \min \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \overline{p} = 3, n = 1.$$

Перевіримо виконання умови (2.106)*:*

$$rg(\Gamma_m^0 + \Gamma_m^1) + n - 1 = 3 + 1 - 1 = 3 \ge m, m = 3.$$

Умова виконується, отже існує Γ_3^{-1}. Побудуємо інтерполяційний поліном. Маємо

$$\left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} = \frac{1}{4} \left\| \begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|^{-1} \sum_{p=0}^{1} (u_i, u)^p |_{i=1}^{3} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 1 - x + y \\ 2x \\ 1 - x - y) \end{matrix} \right\|,$$

$$P_3(u) = \sum_{i=1}^{3} f_i l_i(u),$$

$$l_1(x,y) = \frac{1}{2}(1 - x + y),\ l_2(x,y) = x,\ l_3(x,y) = \frac{1}{2}(1 - x - y),$$

$$l_i(u_j) = \delta_{ij}, \ \ i, j = 1, 2, 3.$$

Нехай $f(u) = 1 + 2x + 3y$, тоді

$$f_1 = f(0,1) = 4, \ \ f_2 = f(1,0) = 3, \ \ f_3 = f(0,-1) = -2.$$

Одержимо

$$P_1(x,y) = 4 \cdot \frac{1}{2}(1-x+y) + 3x - 2 \cdot \frac{1}{2}(1-x-y) = 1+2x+3y,$$

тобто у випадку $m = 3$, $\overline{p} = 3$, $n = 1$ інтерполянт Лагранжа (2.113) *є точним на поліномі першого степеня двох змінних.*

Таким чином для скінченновимірного евклідового простору E_2 сформулюємо такий висновок [201]: у випадку $m < \overline{p}$ маємо єдиний інтерполянт Лагранжа мінімальної норми, при цьому він не є точним на поліномах відповідного степеня (приклад 2.5). Цей інтерполянт в [45] названо недовизначеним. Якщо $m = \overline{p}$, то інтерполяційний поліном Лагранжа єдиний та є точним на поліномі відповідного степеня [8] (приклад 2.6).

Аналогічні міркування та перетворення можна провести для евклідового простору E_k, $u \in E_k$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, де кількість вузлів m задано (фіксовано), а степінь інтерполянта n визначаємо з умови

$$m \leq \min p = \overline{p}, \;\; p = \frac{(n+k)!}{n!k!}, \;\; k \geq 2, \tag{2.114}$$

де p — розмірність простору поліномів n-го степеня в E_k [8]. Самі вузли $u_1, u_2, \ldots, u_m$ обираємо таким чином, щоб існувала обернена матриця в (2.108), а степінь інтерполяційного полінома визначаємо з нерівності (2.114). Сформулюємо висновок для простору E_k у вигляді теореми 2.24.

Теорема 2.24. *Нехай $f : E_k \to R_1$, $k \geq 2$, m задано. Тоді, якщо $m = \overline{p}$, то інтерполянт Лагранжа $P_n(u)$, $u \in E_k$ буде точним на всіх поліномах степеня не вище n, а якщо $m < \overline{p}$, то інтерполянт мінімальної норми $P_n(u)$ не має такої властивості.*

Зафіксуємо степінь інтерполяційного полінома та число вузлів, наприклад, $n = 2$, $m = 4$. Для цього випадку побудуємо інтерполянти в просторах R_1, E_k, $k = 2, 3, \ldots$. Позначимо p_k — розмірність поліномів другого степеня в E_k.

В просторі E_2, коли $n = 2$, $m = 4$, одержимо, що $p_2 = 6$. Отже для однозначного визначення $P_2(x, y)$ не вистачає двох вузлів інтерполяції. Якщо розглянемо побудову інтерполяційного полінома другого степеня в E_3, у випадку $m = 4$, отримаємо, що $p_3 = 10$ і для однозначної побудови інтерполянта не вистачає 6 вузлів. Якщо продовжити цей процес, то зрозуміло, що при зростанні розмірності простору E_k, зростає і розмірність простору поліномів двох змінних p_k, а отже при побудові інтерполяційного полінома 2-го степеня за 4 вузлами ми знаходимось в умовах недовизначеності. Як бачимо, чим більше розмірність простору E_k, тим більше недовизначеність та менша точність побудованого інтерполяційного полінома. Приходимо до наступного висновку: в разі зменшення розмірності евклідового простору зменшується "недовизначеність"інтерполянта Лагранжа мінімальної норми, а у випадку $f : R_1 \to R_1$ маємо $m = \overline{p} = n + 1$, тобто одержимо класичний поліном Лагранжа n-го степеня з $n + 1$ вузлами для функції однієї змінної. В просторі R_1 для $m = 4$ дістанемо, що $\overline{p} = 3$, тобто можемо побудувати інтерполяційний поліном третього степеня, при цьому одержаний інтерполянт єдиний.

Стосовно лінійного простору із скалярним добутком має місце таке твердження: якщо вузли інтерполяції обрані так, що відповідна матриця невироджена, то завжди існує єдиний інтерполяційний поліном Лагранжа мінімальної норми [27], [108], але цей інтерполянт не є точним на операторних поліномах відповідного степеня (приклад 2.4). При цьому відмітимо, що при побудові інтерполяційного операторного полінома Лагранжа числа m (кількість вузлів) та n (степінь інтерполянта) не пов'язані між собою [218].

Зауваження 2.4. *Розглянемо поліном* (2.111) *у вигляді*

$$P_n(x) = p_n(x,f) + \sum_{i=1}^{m}(f_i - p_n(x_i,f))l_i(x), x \in X, \tag{2.115}$$

де $p_n(x,f)$ — c-поліном, тобто $p_n(x,f) = f$, якщо $f = p_n(x)$ — довільний операторний поліном степеня не вище n [218]. Тоді формула (2.115) визначає інтерполянт точний на поліномах відповідного степеня. В [218] розглянуто декілька прикладів побудови c-полінома.

Висновки до розділу 2

У підрозділі 2.1 доведено, що в абстрактному гільбертовому просторі з мірою в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу з мінімальною нормою до поліноміального оператору. Показано, що для лінійного оператора інтерполяційний процес буде збіжним. Доведено, що в сепарабельному гільбертовому просторі з гаусовою мірою похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною.

У підрозділі 2.2 для гільбертового простору показано, що інтерполяційний поліном мінімальної норми та інтерполянт, що побудований за методом ортогональних моментів тотожно співпадають у випадку фіксованих інтерполяційних умов. Доведена збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми, що побудований за системою вузлів, яка обрана певним чином, до поліноміального оператора.

У підрозділі 2.3 у гільбертовому просторі з мірою розглянуто інтерполяційні формули Лагранжа, у випадку заданих значень нелінійного оператора у вузлах та показано, що інтерполянти, які побудовано за методом ортогональних моментів, асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня.

У підрозділі 2.4 знайдено оцінку точності інтерполяції поліноміального та цілого операторів у випадку збуреної вихідної інформації та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якої не покращує точності інтерполяційних формул.

У підрозділі 2.5 для цілого та поліноміального функціоналів, що визначені на просторі $L_2(0,1)$ та мають збурені значення у вузлах інтерполяції, знайдено оцінку точності у випадку, коли скалярні добутки, що містяться в інтерполяційній формулі Лагранжа обчислюються наближено. Для цього випадку одержано кількість інтерполяційних умов для поліноміальних та цілих функціоналів перевищення якої не покращує оцінку точності.

У підрозділі 2.6 для цілого та поліноміального функціоналів, що визначені на просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ та мають збурені значення у вузлах інтерполяції, знайдено оцінку точності у випадку, коли скалярні добутки, що містяться в інтерполяційній формулі Лагранжа обчислюються наближено. Одержано кількість інтерполяційних умов перевищення якої не покращує оцінку точності.

У підрозділі 2.7 знайдено умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі Лагранжа в евклідовому просторі в умовах недовизначеності. При цьому показано, що розв'язок єдиний та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів при фіксованих інтерполяційних умовах.

У розділі 2.8 в лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі досліджена точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Показано, що у випадку, коли кількість інтерполяційних умов дорівнює розмірності простору поліномів на якому шукаємо розв'язок, інтерполяційна формула мінімальної норми є інваріантною відносно поліномів відповідного степеня. Якщо кількість інтерполяційних умов обрати меншою, то інтерполянт немає такої властивості. Доведено, що інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

Джерела, що використані у розділі 2

Для написання даного розділу було використано 34 джерела [7], [8], [12], [17], [27], [29], [49], [57], [68],[77], [82], [85], [91], [97], [99], [108], [110], [111], [116], [127], [128], [129], [131], [132], [134], [208], [176], [186],[181], [194], [200], [211], [218], [226] посилання на які зазначені в тексті розділу 2.

Основні результати розділу 2 опубліковано в роботах здобувача [45], [46], [130], [208], [137], [209], [200], [201], [207], [136], [136].

Розділ 3

Континуальні вузли операторної інтерполяційної задачі Лагранжа

Питання узагальнення теорії інтерполяції функцій на функціонали та оператори розглядались в багатьох роботах [27], [230], [228]. Відмітимо також роботи [69], [70], [71], [72], [73], результати яких більш широко викладено в монографіях [77], [85]. В цих роботах знайдено необхідні та достатні умови розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції, наведено конструктивний опис всієї множини операторних поліноміальних інтерполянтів та її підмножини — інтерполяційних поліномів, що зберігають багаточлени, розв'язано деякі екстремальні задачі та інші традиційні питання, що зустрічаються в теорії інтерполювання. При цьому фіксовані вузли інтерполяції були елементами нескінченновимірних абстрактних просторів, що природнім чином призводить до неєдиності розв'язків задачі інтерполювання. Один із способів виділення єдиного операторного інтерполяційного поліному — використання континуальних вузлів, тобто таких елементів відповідного абстрактного простору, що залежать від числового параметру, що змінюється в деякій замкненій області із R^1. Перший результат в цьому напряму отримано в роботі [68]. Практичне застосування операторної інтерполяції знаходить при розв'язання таких задач, як наближене обчислення континуальних інтегралів [50], побудова наближених методів розв'язання рівнянь, ідентифікація нелінійних систем і т.д. [99], [98] [227], [228].

В роботі [78] для функціоналу F, що визначений на просторі $\mathbb{Q}[0,1]$ кусково-неперервних функцій на відрізку $[0,1]$ із скінченої кількістю точок розриву першого роду, побудовано на множині

$$\Pi_n = \left\{ P_n : P_n(x) = K_0 + \int_0^1 K_1(z_1)x(z_1)dz_1 + \right.$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 K_2(z_1,z_2)x(z_1)x(z_2)dz_1dz_2 + \cdots +$$

$$\left. + \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_n(z_1,z_2,\ldots z_n)x(z_1)x(z_2)\cdots x(z_n)dz_1dz_2\cdots dz_n \right\}, \tag{3.1}$$

інтерполяційний поліном типу Ньютона інтегрального вигляду

$$P_n(x) = K_0^I + \int_0^1 K_1^I(z_1)(x(z_1) - x_0(z_1))dz_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 K_2^I(z_1,z_2)(x(z_1) - x_0(z_1))(x(z_2) - x_1(z_2))dz_1dz_2 + \cdots +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \cdots \int_{z_{n-1}}^1 K_n^I(z_1,z_2,\ldots z_n)(x(z_1) - x_0(z_1))(x(z_2) - x_1(z_2))\cdots$$

$$\cdots (x(z_n) - x_{n-1}(z_n))dz_1dz_2\cdots dz_n, \tag{3.2}$$

що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n^I(\overline{x}_n(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_n)) = F(\overline{x}_n(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_n)), P_n^I \in \Pi_n, \tag{3.3}$$

де

$$\overline{x}_n(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - x_{i-1}(t))\, H(t-\xi_i), \tag{3.4}$$

континуальна множина вузлів, що залежить від параметрів ξ_i із області

$$\Omega_\xi = \{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) : 0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots \le \xi_n \le 1\}, \tag{3.5}$$

$x_i \in \mathbb{C}[0,1]$, $H(u)$ — функція Хевісайда, K_i — кусково-неперервні функції за кожною змінною окремо на відрізку $[0,1]$.

Ядра полінома $K_k^I(z_1,z_2,\ldots z_k), k=\overline{0,n}$ із (3.3) знайдено у вигляді

$$K_p^I(z_1,z_2,\ldots,z_p) = (-1)^p \{(x_1(z_1)-x_0(z_1))(x_2(z_2)-x_1(z_2))\cdots$$

$$\cdots(x_p(z_p)-x_{p-1}(z_p))\}^{-1} \frac{\partial^p}{\partial z_1\cdots\partial z_p} F(\overline{x}_p(\cdot,z_1,\ldots,z_p)),\ p=\overline{0,n}.$$

де $x_i(t)-x_{i-1}(t)\neq 0$, $i=\overline{1,n}$, $t\in[0,1]$, а мішані похідні

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi_1\cdots\partial\xi_k} F(\overline{x}(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)),\quad k=\overline{0,n},$$

є неперервними функціями за кожною змінною із Ω_ξ.

На підставі результатів [1] в [78] доведено лему (правило підстановки) на основі якої показано, що інтерполянт (3.2) є єдиним розв'язком задачі (3.3), зберігає багаточлени відповідного степеня та знайдено вигляд залишкового члену. Для того, щоб показати, що правило підстановки є достатньо жорсткою умовою, наведемо його та приклад функціонала, для якого воно не виконується.

Позначимо $H_\omega(t - z_i)$, $i = \overline{1, n}$, неперервно диференційовані апроксимації ступінчатих функцій $H(t - z_i)$ у разі $\omega \to \infty$; $\delta_\omega(t - z_i)$ — похідні за параметром z_i функції $H'_\omega(t - z_i)$, що є неперервними апроксимаціями дельта-функцій Дірака $\delta(t - z_i)$ у випадку $\omega \to \infty$ [3]. Розглянемо множину функцій $\varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)$ вигляду

$$\varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(t) H_\omega(t - z_i),$$

$$0 \leq z_1 \leq \cdots \leq z_{k+1},$$

де $\varphi_i \in C[0, 1]$, $i = \overline{0, k+1}$. Функціонал Φ_k визначимо таким чином

$$\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_{k+1}, \omega)) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \cdots \partial z_{k-1}} F(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)).$$

Лема 3.1. *(правило підстановки). Нехай функціонал F та фіксовані функції φ_i, $(\varphi_i(t) + \varphi_{i+1}(t)) \neq 0$, $t \in [0, 1]$ такі, що має місце рівномірна збіжність*

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\cdots, \omega) \to \frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\cdots, \infty)$$

за x_k у випадку, коли $\omega \to \infty$, та для Φ_k має місце формула диференціювання за параметром під знаком функціоналу [1]

$$\left. \frac{\partial g(f(\cdot, \alpha))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha_0} = \left(g'(f(\cdot, \alpha_0), f'_2(t, \alpha_0)) \right),$$

тобто для Φ_k за параметром z_k виконується:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)) =$$

$$= \left(\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t), \frac{\partial}{\partial z_k} \varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega) \right) =$$

$$= -\left(\Phi'_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t), \varphi_k(t) \delta_\omega(t - z_k) \right) =$$

$$= -\int\limits_0^1 \Phi'_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) \varphi_k(t) \delta_\omega(t - z_k) dt$$

є неперервним за t функціональними похідними та рівномірно за t

$$\Phi'_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) \to \Phi'_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), t)$$

у разі, коли $\omega \to \infty$. Тоді виконується правило підстановки

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \cdots \partial z_{k-1}} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(\cdot) H(\cdot - z_i) \right) \right\} \Bigg|_{z_{k+1} = z_k} =$$

$$= \frac{\varphi_k(z_k)}{\varphi_k(z_k) + \varphi_{k+1}(z_k)} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z_k} \left\{ \frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \cdots \partial z_{k-1}} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(\cdot) H(\cdot - z_i) \right) \right\} \Bigg|_{z_{k+1} = z_k}, \qquad (3.6)$$

$$0 \le z_1 \le z_2 \le \cdots \le z_{k+1} \le 1, \ \ k = \overline{1, n-1}.$$

Розглянемо функціонал вигляду $F(x) = \int\limits_0^1 x^2(t) dt$. Нехай в подальших викладках $u \le v$. Тоді одержимо

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} F(\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot) H(\cdot - u) + \varphi_2(\cdot) H(\cdot - v)) \right\} \Bigg|_{v=u} = 2\varphi_0(u)\varphi_1(u) - \varphi_1^2(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{F(\varphi_0(\cdot)+\varphi_1(\cdot)H(\cdot-u)+\varphi_2(\cdot)H(\cdot-v))\right\}\big|_{v=u}=$$

$$=-2\varphi_0(u)\{\varphi_1(u)+\varphi_2(u)\}-\{\varphi_1(u)+\varphi_2(u)\}^2$$

і правило підстановки

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u}F(\varphi_0(\cdot)+\varphi_1(\cdot)H(\cdot-u)+\varphi_2(\cdot)H(\cdot-v))\right\}\Bigg|_{v=u}=$$

$$=\frac{\varphi_1(u)}{\varphi_1(u)+\varphi_2(u)}\frac{\partial}{\partial u}\left\{F(\varphi_0(\cdot)+\varphi_1(\cdot)H(\cdot-u)+\varphi_2(\cdot)H(\cdot-u))\right\}\Bigg|_{v=u}$$

не виконується. Для функціоналу $F(x)=\left(\int\limits_0^1 x(t)dt\right)^2$ правило підстановки буде виконуватись.

В [90] доведено, що виконання умов леми (правила підстановки) для інтерполяційних поліномів другого степеня можна позбутися за умови розширення певним чином множини Π_n чи вимоги існування відповідних інтегралів Стільт'єса, які містяться в інтерполяційній формулі.

В подальшому викладанні матеріалу уточнемо та узагальнемо результати, які анонсовані в [80], [82] щодо континуальних вузлів інтерполяції операторів однієї та багатьох змінних в лінійних топологічних просторах.

Нехай X, Y – лінійні топологічні простори, оператор $F: X \to Y$, $x_i \in X$, $i=0,1,2,\dots n$, диференційований за Гато, $F^{(n)}$ — похідна Гато n-го порядку. Розглянемо поліном n-го степеня вигляду [27]

$$P_n(x)=F(x_0)+\int\limits_a^b F'(x_0+g_{\tau_1}(x_1-x_0))dg_{\tau_1}(x-x_0)+$$

$$+\int\limits_a^b\int\limits_a^{\tau_1} F''(x_0+g_{\tau_1}(x_1-x_0)+g_{\tau_2}(x_2-x_1))dg_{\tau_2}(x-x_1)dg_{\tau_1}(x-x_0)+\dots+$$

$$+\int\limits_a^b\int\limits_a^{\tau_1}\cdots\int\limits_a^{\tau_{n-1}} F^{(n)}(x_0+\sum_{i=1}^{n} g_{\tau_i}(x_i-x_{i-1}))dg_{\tau_n}(x-x_{n-1})\dots dg_{\tau_1}(x-x_0), \quad (3.7)$$

де g_τ – лінійний оператор, $g_\tau : X \to X$, τ – скалярний аргумент, $\tau \in [a,b]$, g_τ – диференційований за τ оператор, тобто має g'_τ – похідну за цим аргументом. Множина операторів g_τ така, що виконуються умови

$$g_a = 0, \quad g_b = I, \quad (3.8)$$

де 0, I — нульовий та тотожній оператори відповідно, $dg_{\tau_i} = d_{\tau_i} g_{\tau_i}$. Тоді поліном (3.7) буде інтерполяційним [27], тобто будуть виконуватись інтерполяційні умови у вузлах x_i

$$P_n(x_i) = F(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

У роботах [80], [78], [83] зазначено, що для побудови полінома (3.7) потрібна континуальна інформація щодо оператора та його похідних Гато до n-го порядку включно в континуальних точках. Але інтерполяційний поліном $P_n(x)$ має скінчену множину інтерполяційних вузлів, що неприродньо. Для подолання цього недоліку будемо вимагати від операторів g_τ крім виконання (3.8), ще додатково умову

$$g_u g_v = g_s, \quad s = \min(u, v). \quad (3.9)$$

Позначимо таку множину операторів g_{τ_i} через G. Нехай множина G така, що містить недиференційовані за τ в звичайному сенсі оператори, тобто оператори g'_{τ_i} будуть "узагальненими"(на зразок узагальненої сингулярної функції [52]), але оператор F повинен бути таким, щоб інтеграли в (3.7) існували. Таку множину операторів F позначимо $\Re$.

3.1 Континуальні вузли інтерполяційних поліномів для операторів однієї змінної

Розглянемо континуальну множину вузлів

$$\overline{x}_n(\xi) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1}), b \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_n \geq a. \tag{3.10}$$

та постановку операторної інтерполяційної задачі Лагранжа на множині вузлів (3.10). Потрібно знайти такий операторний поліном P_n, що задовольняє умовам

$$P_n(\overline{x}_n(\xi)) = F(\overline{x}_n(\xi)). \tag{3.11}$$

Розв'язок задачі (3.11) будемо шукати у вигляді полінома (3.7).

Теорема 3.1. *Нехай $g_{\tau_i} \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, оператор F $(n+1)$ раз диференційований за Гато такий, що інтеграли в* (3.7) *існують. Тоді поліном* (3.7) *має континуальні вузли* (3.10)*, тобто виконуються інтерполяційні умови* (3.11)

Доведення. Нехай існує $n+1$ похідна Гато $F^{(n+1)}$ оператора F. Залишковий член формули (3.7) запишемо таким чином

$$R_n(x) = \int_a^b \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_n} F^{(n+1)}(x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1}) + g_{\tau_{n+1}}(x - x_n))\times$$

$$\times dg_{\tau_{n+1}}(x - x_n) \cdots dg_{\tau_1}(x - x_0). \tag{3.12}$$

Підставимо вузол $x = \overline{x}_n(\xi)$ з (3.10) у залишковий член R_n. З урахуванням, що

$$g_{\tau_{n+1}} g_{\xi_i} = g_{\tau_{n+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

отримаємо

$$dg_{\tau_{n+1}}(\overline{x}_n - x_n) = dg_{\tau_{n+1}}(x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1}) - x_n) = dg_{\tau_{n+1}}(0) = 0.$$

Отже одержали, що залишковий член задовольняє рівності

$$R_n(\overline{x}_n(\xi)) = 0.$$

Це означає, що інтерполяційна умова (3.11) виконується. Теорема (3.1) доведена. $\square$

Зауваження 3.1. *Насправді теорема буде вірною за умови існування лише n-ї похідної Гато оператора F, але доведення цього твердження занадто громіздке і в роботі не викладається.*

Так, не вимагаючи існування $F^{(n+1)}$, розглянемо на прикладі полінома першого степеня (3.7) виконання інтерполяційної умови (3.11). Маємо

$$P_1(x) = F(x_0) + \int_a^b F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0)) dg_{\tau_1}(x - x_0).$$

Оберемо континуальний вузол

$$\overline{x}_1(\xi) = x_0 + g_{\xi_1}(x_1 - x_0), \quad \xi_1 \in [a, b]. \tag{3.13}$$

Знайдемо значення $P_1(\overline{x}_1(\xi))$:

$$P_1(\overline{x}_1(\xi)) = F(x_0) + \int\limits_a^b F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1}g_{\xi_1}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^{\xi_1} F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1}g_{\xi_1}(x_1 - x_0) +$$

$$+ \int\limits_{\xi_1}^b F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1}g_{\xi_1}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^{\xi_1} F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^{\xi_1} dF(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0)) =$$

$$= F(x_0) + F(x_0 + g_{\xi_1}(x_1 - x_0)) - F(x_0) =$$

$$= F(x_0 + g_{\xi_1}(x_1 - x_0)) = F(\overline{x}_1(\xi)).$$

В цих перетвореннях врахували умови (3.8), (3.9) та диференціювання суперпозиції операторів [110].

Приклад 3.1. *Розглянемо інтерполяційні поліноми першого та другого степеня і покажемо, що множина G операторів g_τ і множина $\Re$ операторів F, для яких відповідні інтеграли в (3.7) існують, не є пустими та виконуються інтерполяційні умови*

$$P_i(\overline{x}_j(\xi)) = F(\overline{x}_j(\xi)),$$

де $\overline{x}_j(\xi)$ — континуальні вузли (3.10), $j = 1, 2$. Нехай $F : Q[a, b] \to R^1$, де $Q[a, b]$ — простір кусково-неперервних функцій на $[a, b]$, $g_\tau x = H(\tau - t)x(t)$, $H(u)$ — функція Хевісайда, $x(t), x_i(t) \in Q[a, b]$, $\tau, t \in [a, b]$.

Неважко бачити, що $g_\tau = H(\tau - t) \in G$. *Маємо*

$$P_1(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \int\limits_a^b F'(x_0(\cdot) + H(\tau - \cdot)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)))\times$$

$$\times dH(\tau - \cdot)(x(\cdot) - x_0(\cdot)), \tag{3.14}$$

де $dH(\tau - t) = \delta(\tau - t)d\tau$, δ *є* δ *-функцією Дірака. Оберемо оператор* F *у вигляді функціоналу*

$$F(x) = \int\limits_a^b x^2(t)dt.$$

Тоді

$$F(x_0(\cdot)) = \int\limits_a^b x_0^2(t)dt,$$

$$\int\limits_a^b F'(x_0(\cdot) + H(\tau - \cdot)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)))dH(\tau - \cdot)(x(\cdot) - x_0(\cdot)) =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{d}{d\gamma}\int\limits_a^b (x_0(t) + H(\tau - t)(x_1(t) - x_0(t)) + \gamma dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t)))^2|_{\gamma=0}dt =$$

$$= 2\int\limits_a^b \int\limits_a^b (x_0(t) + H(\tau - t)(x_1(t) - x_0(t)) + \gamma dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t)))\times$$

$$\times dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t))|_{\gamma=0}dt =$$

$$= 2\int\limits_a^b \int\limits_a^b (x_0(t) + H(\tau - t)(x_1(t) - x_0(t)))dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= 2\int\limits_a^b x_0(t)H(\tau - t)(x(t) - x_0(t))|_a^b dt +$$

$$+2\int\limits_a^b \frac{1}{2}H^2(\tau - t)|_a^b (x_1(t) - x_0(t))(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int\limits_a^b 2(x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)))(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int\limits_a^b (x_0(t) + x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt. \tag{3.15}$$

Тоді, з урахуванням (3.14), (3.15), *отримаємо*

$$P_1(x(\cdot)) = \int\limits_a^b x_0^2(t)dt + \int\limits_a^b (x_0(t) + x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt. \tag{3.16}$$

Покажемо далі, що інтерполяційний поліном першого степеня (3.16) *має континуальний вузол* (3.13). *Дійсно*

$$P_1(\overline{x}_1(\xi)) = \int\limits_a^b x_0^2(t)dt + \int\limits_a^b (x_0(t) + x_1(t))H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int\limits_a^b x_0^2(t)dt + \int\limits_a^b H(\xi - t)(x_1^2(t) - x_0^2(t))dt =$$

$$= \int\limits_a^b x_0^2(t)dt + \int\limits_a^\xi (x_1^2(t) - x_0^2(t))dt. \tag{3.17}$$

З іншого боку

$$F(\overline{x}_1(\xi)) = \int\limits_a^b (x_0(t) + H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t)))^2 dt =$$

$$= \int\limits_a^\xi (x_0(t) + H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t)))^2 dt +$$

$$+ \int\limits_\xi^b (x_0(t) + H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t)))^2 dt =$$

$$= \int\limits_a^\xi x_1^2(t)dt + \int\limits_\xi^b x_0^2(t)dt + \int\limits_a^\xi x_0^2(t)dt - \int\limits_a^\xi x_0^2(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^b x_0^2(t)dt + \int\limits_a^\xi (x_1^2(t) - x_0^2(t))dt. \tag{3.18}$$

Порівняємо (3.17) *з* (3.18)*. Одержимо* $P_1(\overline{x}_1(\xi)) = F(\overline{x}_1(\xi))$*.*

Тепер розглянемо інтерполяційний поліном другого степеня

$$P_2(x(\cdot)) = P_1(x(\cdot)) + \int\limits_a^b \int\limits_a^{\tau_1} F''(y(\cdot))dH(\tau_2 - \cdot)(x(\cdot) - x_1(\cdot))\times$$

$$\times dH(\tau_1 - \cdot)(x(\cdot) - x_0(\cdot)), \tag{3.19}$$

де

$$y(t) = x_0(t) + H(\tau_1 - t)(x_1(t) - x_0(t)) + H(\tau_2 - t)(x_2(t) - x_1(t)), a \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq b.$$

Другий доданок в (3.19) *для функціоналу*

$$F(x) = \int\limits_a^b x^2(t)dt$$

має вигляд

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^{\tau_1} \frac{\partial^2}{\partial\gamma_1\partial\gamma_2} \int\limits_a^b \{x_0(t) + H(\tau_1 - t)(x_1(t) - x_0(t)) + H(\tau_2 - t)(x_2(t) - x_1(t)) +$$

$$+\gamma_1 dH(\tau_1 - t)(x(t) - x_0(t)) + \gamma_2 dH(\tau_2 - t)(x(t) - x_1(t))\}^2 \mid_{\gamma_1=\gamma_2=0} dt =$$

$$= 2\int_a^b \int_a^{\tau_1} \int_a^b dH(\tau_2 - t)(x(t) - x_1(t))dH(\tau_1 - t)(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= 2\int_a^b \int_a^b H(\tau_2 - t)(x(t) - x_1(t))|_a^{\tau_1} dH(\tau_1 - t)(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int_a^b H^2(\tau_1 - t)|_a^b (x(t) - x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int_a^b (x(t) - x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt.$$

Отже, одержимо

$$P_2(x(\cdot)) = \int_a^b x_0^2(t)dt + \int_a^b (x_1(t) + x_0(t))(x(t) - x_0(t))dt+$$

$$+\int_a^b (x(t) - x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt = \int_a^b x^2(t)dt, \tag{3.20}$$

тобто інтегральний поліном $P_2(x(\cdot))$ зберігає даний функціонал та виконується умова $P_2(\overline{x}_2(\xi)) = F(\overline{x}_2(\xi))$. Таким чином, для того щоб інтерполяційний поліном Ульма-Соболевського-Яновича [27] мав континуальні вузли (3.10) *необхідна належність операторів g_{τ_i} множині G, тобто виконання умов* (3.8), (3.9), *а сам оператор F належав множині $\Re$, тобто був таким, щоб відповідні інтеграли в* (3.7) *існували.*

Зауваження 3.2. *У випадку недиференційовності оператора F (наприклад у функціональному просторі $Q[0,1]$) можна застосувати модифікацію інтерполяційної формули в [78], де відповідні інтеграли розуміються як інтеграли Стільт'єса. Для інтерполяційного полінома другого степеня маємо*

$$P_2(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) - \int\limits_0^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} d_{z_1} F(x^1(\cdot, z_1)) +$$

$$+ \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)} d_{z_1} F(x^1(\cdot, z_1)) -$$

$$- \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_2(z_1) - x_{i-1}(z_1)} d_{z_1} F(x^2(\cdot, \overrightarrow{z}^1)) -$$

$$- \int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)} d_{z_2} d_{z_1} F(x^2(\cdot, \overrightarrow{z}^2)) +$$

$$+ \int\limits_0^1 \int\limits_{z_1}^1 \prod_{i=1}^{2} \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} d_{z_2} d_{z_1} F(x^2(\cdot, \overrightarrow{z}^2)), \tag{3.21}$$

де

$$x^1(\cdot, z_1) = x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)),$$

$$x^2(\cdot, \overrightarrow{z}^2) = x^1(\cdot, z_1) + H(\cdot - z_2)(x_2(\cdot) - x_1(\cdot)),$$

$$x^2(\cdot, \overrightarrow{z}^1) = x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_2(\cdot) - x_0(\cdot)).$$

Отже, поліном, що визначається формулою (3.21)*, є інтерполяційним для функціонала $F(x(\cdot))$ на континуальному вузлі*

$$x^2(z,\overrightarrow{\xi^2}) = x_0(z) + H(z-\xi_1)(x_1(z)-x_0(z)) + H(z-\xi_2)(x_2(z)-x_1(z)),$$

$$0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le 1.$$

Умови існування інтегралів Стільт'єса для інтегралів із (3.21) *можна одержати на підставі узагальнення результатів із [85]: якщо функція* $f(t)$ *зі значеннями в банаховому просторі неперервна на відрізку* $[a,b]$, *а скалярна функція* $g(t)$ *має на цьому відрізку обмежену варіацію, то інтеграл*

$$\int\limits_a^b f(t)dg(t)$$

існує. Зауважимо, що формула (3.21) *також не вимагає «правила підстановки» (лема 3.1).*

3.2 Континуальні вузли інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних

Розглянемо питання континуальності інтерполяційних вузлів для операторів та функціоналів багатьох змінних [82].

Нехай $X, Y, \ldots, Z, V$ — лінійні топологічні простори [37], [105], $F(x, y, \ldots, z)$ – оператор m змінних $x, y, \ldots, z$, $x \in X$, $y \in Y$, ..., $z \in Z$,

$$F : X \bigoplus Y \bigoplus \bigoplus \cdots \bigoplus Z \to V.$$

В роботі [82] запропоновано інтерполяційний поліном n-го степеня для оператора F m змінних вигляду

$$P_{m,n}(F;x,y,\ldots,z)=F(x_0,y_0,\ldots,z_0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=k}F^{(i_1+i_2+\cdots+i_m)}(x_0+\sum_{i=1}^{i_1}g_{\tau_{i1}}(x_i-x_{i-1}),$$

$$y_0+\sum_{i=1}^{i_2}g_{\tau_{i2}}(y_i-y_{i-1}),\ldots,z_0+\sum_{i=1}^{i_m}g_{\tau_{im}}(z_i-z_{i-1}))\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{i_1}dg_{\tau_{i1}}(x-x_{i-1})\prod_{i=1}^{i_2}dg_{\tau_{i2}}(y-y_{i-1})\cdots\prod_{i=1}^{i_m}dg_{\tau_{im}}(z-z_{i-1}),\qquad(3.22)$$

де $g_{\tau_{is}}$ – лінійні неперервні оператори,

$$g_{\tau_{i1}}:X\to X,\;\; g_{\tau_{i2}}:Y\to Y,\ldots,\;\; g_{\tau_{im}}:Z\to Z,$$

i – індекс, що пробігає деякі множини натуральних чисел, $g_{\tau_{is}}$ залежать від скалярних аргументів τ_{is} з $[a,b]$, мають перші похідні за цими аргументами та задовольняють умовам (3.8),

$$x_i\in X,\; i=0,1,2,\ldots i_1,\; y_i\in Y.\, i=0,1,2,\ldots i_2,\ldots,\; z_i\in Z,\; i=0,1,2,\ldots i_m$$

— вузли інтерполяції за кожною змінною;

$$\Omega_k=\Omega_{i_1}\times\Omega_{i_2}\times\cdots\times\Omega_{i_m},\;\; i_1+i_2+\cdots+i_m=k,$$

$$\Omega_{i_s}=\{(\tau_{1s},\tau_{2s},\ldots,\tau_{i_s s}):0\le\tau_{1s}\le 1,0\le\tau_{2s}\le\tau_{1s},\ldots,0\le\tau_{i_s s}\le\tau_{i_s-1,s}\},\qquad(3.23)$$

$s=1,2,\ldots,m$, а похідні від функціоналу F розуміються в сенсі Гато, $dg_{\tau_{is}}=d_{\tau_{is}}g_{\tau_{is}}$.

Цей інтерполянт має за інтерполяційні вузли точки $(x_p, y_q, \dots, z_r)$, а у випадку, коли $X = Y = \dots = Z = V = R^1$, із інтерполяційного поліному (3.22) одержимо узагальнений поліном Ньютона (поліном найменшого степеня) для функції m змінних [12]. Розглянемо розв'язок операторної задачі Лагранжа за допомого інтерполяційного полінома (3.22) на континуальній множині вузлів.

Теорема 3.2. *Нехай оператори* $g_{\tau_{is}} \in G, s = 1, 2, \dots,$ $F \in \Re$, *а похідна Гато* $F^{(n+1)}$ *в* (3.12) *існує за кожною змінною. Тоді континуальними вузлами інтерполяційного полінома* (3.22) *будуть точки*

$$(x_0 + \sum_{i=1}^{i_1} g_{\xi_{i1}}(x_i - x_{i-1}), y_0 + \sum_{i=1}^{i_2} g_{\xi_{i2}}(y_i - y_{i-1}), \dots, z_0 + \sum_{i=1}^{i_m} g_{\xi_{im}}(z_i - z_{i-1})),$$

де

$$b \geq \xi_{11} \geq \xi_{21} \geq \dots \geq \xi_{i_1 1} \geq a,$$

$$b \geq \xi_{12} \geq \xi_{22} \geq \dots \geq \xi_{i_2 2} \geq a, \dots,$$

$$b \geq \xi_{1m} \geq \xi_{2m} \geq \dots \geq \xi_{i_m m} \geq a,$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = k, k = 1, 2, \dots, n$$

Доведення. Не зменшуючи загальності та уникаючи громіздких викладок, доведемо цю теорему для випадку $m = n = 2$. На підставі (3.22) запишемо інтерполянт $P_{2,2}(F; x, y)$:

$$P_{2,2}(F; x, y) = F(x_0, y_0) + \int_a^b F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0) dg_{\tau_{11}}(x - x_0) +$$

$$+\int_a^b F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))dg_{\tau_{12}}(y - y_0)+$$

$$+\int_a^b \int_a^{\tau_{11}} F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0)dg_{\tau_{21}}(x - x_1)dg_{\tau_{11}}(x - x_0)+$$

$$+\int_a^b \int_a^b F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))dg_{\tau_{11}}(x - x_0)dg_{\tau_{12}}(y - y_0)+$$

$$+\int_a^b \int_a^{\tau_{12}} F''(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0) + g_{\tau_{22}}(y_2 - y_1))dg_{\tau_{22}}(y - y_1)dg_{\tau_{12}}(y - y_0). \quad (3.24)$$

Покажемо, що континуальні «точки»

$$u(\xi) = (x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\xi_{21}}(x_2 - x_1), y_0),$$

$$v(\xi) = (x_0, y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0) + g_{\xi_{22}}(y_2 - y_1)),$$

$$w(\xi) = (x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0))$$

є вузлами інтерполяційного полінома $P_{2,2}(F; x, y)$. Із теореми 3.1 отримаємо, що $u(\xi)$, $v(\xi)$ — це вузли полінома $P_{2,2}(F; x, y)$. Доведемо інтерполяційність «точки» $w(\xi)$ [219]. Маємо

$$P_{2,2}(F; w(\xi)) = F(x_0, y_0) + \int_a^b F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0)dg_{\tau_{11}}(g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0))+$$

$$+\int_a^b F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))dg_{\tau_{12}}(g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0))+$$

$$+\int\limits_a^b\int\limits_a^{\tau_{11}}F''(x_0+g_{\tau_{11}}(x_1-x_0)+g_{\tau_{21}}(x_2-x_1),y_0)\times$$

$$\times dg_{\tau_{21}}(x_0+g_{\xi_{11}}(x_1-x_0)-x_1)dg_{\tau_{11}}(g_{\xi_{11}}(x_1-x_0))+$$

$$+\int\limits_a^b\int\limits_a^b F''(x_0+g_{\tau_{11}}(x_1-x_0),y_0+g_{\tau_{12}}(y_1-y_0))\times$$

$$\times dg_{\tau_{11}}g_{\xi_{11}}(x_1-x_0)dg_{\tau_{12}}g_{\xi_{12}}(y_1-y_0)+$$

$$+\int\limits_a^b\int\limits_a^{\tau_{12}}F''(x_0,y_0+g_{\tau_{12}}(y_1-y_0)+g_{\tau_{22}}(y_2-y_1))\times$$

$$\times dg_{\tau_{22}}(g_{\xi_{12}}(y_1-y_0)+y_0-y_1)dg_{\tau_{12}}g_{\xi_{12}}(y_1-y_0)=$$

$$=F(x_0,y_0)+F(x_0+g_{\xi_{11}}(x_1-x_0),y_0)-F(x_0,y_0)+$$

$$+F(x_0,y_0+g_{\xi_{12}}(y_1-y_0))-F(x_0,y_0)+$$

$$+\int\limits_a^{\xi_{11}}\int\limits_a^{\tau_{11}}F''(x_0+g_{\tau_{11}}(x_0-x_1)+g_{\tau_{21}}(x_2-x_1),y_0)\times$$

$$\times d[g_{\tau_{21}}(x_0-x_1)+g_{\tau_{21}}(x_1-x_0)]dg_{\tau_{11}}g_{\xi_{11}}(x_1-x_0)+$$

$$+\int\limits_a^{\xi_{12}}\int\limits_a^{\tau_{12}}F''(x_0,y_0+g_{\tau_{12}}(y_1-y_0)+g_{\tau_{22}}(y_2-y_1))\times$$

$$\times d[g_{\tau_{22}}(y_1-y_0)+g_{\tau_{22}}(y_0-y_1)]dg_{\tau_{12}}g_{\xi_{12}}(y_1-y_0)+$$

$$+\int_a^{\xi_{11}}\int_a^{\xi_{12}} F''(x_0+g_{\tau_{11}}(x_1-x_0), y_0+g_{\tau_{12}}(y_1-y_0))\times$$

$$\times dg_{\tau_{11}}(x_1-x_0)dg_{\tau_{12}}(y_1-y_0)=$$

$$=F(x_0+g_{\xi_{11}}(x_1-x_0),y_0)+F(x_0,y_0+g_{\xi_{12}}(y_1-y_0))-F(x_0,y_0)+$$

$$+\int_a^{\xi_{11}}\{F'(x_0+g_{\tau_{11}}(x_1-x_0),y_0+g_{\xi_{12}}(y_1-y_0))-$$

$$-F'(x_0+g_{\tau_{11}}(x_1-x_0),y_0)\}dg_{\tau_{11}}(x_1-x_0)=$$

$$=F(x_0+g_{\xi_{11}}(x_1-x_0),y_0)+F(x_0,y_0+g_{\xi_{12}}(y_1-y_0))-F(x_0,y_0)+$$

$$+F(x_0+g_{\xi_{11}}(x_1-x_0),y_0+g_{\xi_{12}}(y_1-y_0))-F(x_0,y_0+g_{\xi_{12}}(y_1-y_0))-$$

$$-F(x_0+g_{\xi_{11}}(x_1-x_0),y_0)+F(x_0,y_0)=$$

$$=F(x_0+g_{\xi_{11}}(x_1-x_0),y_0+g_{\xi_{12}}(y_1-y_0))=F(w(\xi)).$$

У наведених перетвореннях використано правило диференціювання оператора за параметром [85] та $g_{\tau s}\in G$. Теорему доведено. □

Зауваження 3.3. *Відмітимо, що питання континуальності інтерполяційних вузлів розглядалися також в [84], [89]. В цих роботах для нелінійних функціоналів, визначених на просторі кусково-неперервних функцій,* *побудовано інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб за континуальними кусково-неперервними вузлами, знайдено умови існування та єдиності таких інтерполянтів.*

Висновки до розділу 3

В розділі 3 для функціоналів, що визначені на просторі $\mathbb{Q}[0,1]$ кусково-неперервних функцій на відрізку $[0,1]$ із скінченої кількістю точок розриву першого роду, показано, що виконання умов леми «правила підстановки» є суттєвим обмеженням для побудови єдиного інтерполяційний поліном типу Ньютона інтегрального вигляду на континуальній множині вузлів. Наведено приклад функціоналу для якого не виконуються умови цієї леми.

В підрозділі 3.1 в лінійному топологічному просторі для оператора однієї змінної знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду. Розглянуто приклади таких інтерполянтів.

В підрозділі 3.2 в топологічному лінійному просторі наведено узагальнення інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних в сенсі визначення умов, за яких має місце континуальність відповідної множини вузлів.

Джерела, що використані у розділі 3

Для написання даного розділу було використано 26 джерел [1], [3], [12], [27], [50], [52], [68], [69], [70], [71], [72], [73], [77], [80], [82], [83], [84], [85], [89], [90], [98], [99], [110], [227], [228], [230], посилання на які зазначені в тексті розділу.

Основні результати розділу 3 опубліковано в роботах [78], [219].

Розділ 4

Інтерполяційні поліноми Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому та евклідовому просторах

4.1 Інтерполянт мінімальної норми типу Ерміта в гільбертовому просторі з мірою

Як зазначено у розділі 1, в монографії Макарова В. Л., Хлобистова В.В. [77] побудовано загальну теорію операторної інтерполяції, де, зокрема, приділено увагу операторним поліномам типу Ерміта [72]. Але побудований ермітовий інтерполянт асимптотично не зберігає поліноми (тобто не є точним на поліномах того ж степеня в разі необмеженого збільшення кількості вузлів інтерполяції), отже проблематично одержати оцінки точності та теореми збіжності навіть для операторних поліномів.

В цьому підрозділі доведено теорему про інтерполяційний поліном типу Ерміта, який має мінімальну норму на множині інтерполянтів Ерміта і показано, що він є єдиним розв'язком інтерполяційної задачі та має властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня в разі, коли задані значення нелінійного оператора у вузлах та його перших диференціалів в них.

Нехай X, Y — гільбертові простори (X є сепарабельним), Π_n — множина операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n:

$$\Pi_n = \{P_n(x) : P_n(x) = L_0 + L_1 x + \cdots + L_n x^n\}, \qquad (4.1)$$

де $L_0 \in Y$, $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — неперервна k-лінійна симетрична операторна форма, $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k})$; $\{x_i\}_{i=1}^m$, $\{h_i\}$ — системи елементів із X.

Нехай оператор $F : X \to Y$, в загальному випадку нелінійний, є диференційованим за Гато, задані вузли інтерполяції x_i, $i = \overline{1, m}$, значення оператора $F(x)$ і його перші диференціали Гато за напрямками h_i, $i = \overline{1, m}$ у цих вузлах. В цьому випадку операторна інтерполяційна задача типу Ерміта полягає у наступному: необхідно знайти такий поліном $P_n \in \Pi_n$, що відповідає умовам

$$P_n(x_i) = F(x_i), \quad P_n'(x_i)h_i = F'(x_i)h_i, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (4.2)$$

де $F'(x_i)h_i = \left.\dfrac{d}{d\gamma} F(x_i + \gamma h_i)\right|_{\gamma=0}$ — перший диференціал Гато оператора $F(x)$ у вузлі x_i за напрямком h_i.

Розглянемо більш детально розв'язок задачі (4.1) для $n = 2$. Зауважимо, що такі операторні поліноми застосовуються у разі дослідження нелінійних систем [227]. Нехай надалі $\{e_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована система елементів, $x_i = e_i$, $i = \overline{1, m}$, що належать базису в X. Розв'язком задачі (4.2) є поліном вигляду:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_k}), \qquad (4.3)$$

$$m \geq 2,$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в X, $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ — значення деяких k-лінійних неперервних симетричних операторних форм, які потребують визначення. Система вузлів інтерполювання була обрана ортонормованою, по-перше, для забезпечення виконання інтерполяційних умов (4.2), по-друге, базисною — для обґрунтування асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня в гільбертовому просторі. Для конструктивної побудови інтерполянта (4.3) потрібно визначити значення всіх операторних форм

$$L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}),\ 0 \le k \le 2,\ 1 \le i_j \le m.$$

Зауважимо, що кількість інтерполяційних умов повинна бути парною, тому необхідно знайти таку множину $\aleph$, що належність $m \in \aleph$ забезпечує парність кількості невідомих $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$, $0 \le k \le 2$, $1 \le i_j \le m$. Нехай N — кількість цих невідомих, $N = 2m + 1 + C_m^2 = \dfrac{m(m+3)}{2} + 1$. Множина $\aleph$ має вигляд:

$$\aleph = \{4k + i + 2,\ i = 0, 1\}_{k=0}^{\infty}. \tag{4.4}$$

Для розв'язання інтерполяційної задачі (4.2) оберемо довільне $m \in \aleph$, тобто зафіксуємо значення сталих i та k, що містяться в (4.4). Правило вибору вузлів інтерполяції та напрямків диференціалів Гато таке: спочатку задамо $(m+1)$ вузол, а саме: $0, e_1, e_2, \ldots, e_m$ і такі інтерполяційні умови в них

$$P_2(0) = F(0),\ \ P_2'(0)e_m = F'(0)e_m,$$

$$P_2(e_j) = F(e_j),\ \ P_2'(e_j)e_j = F'(e_j)e_j,\ \ j = \overline{1, m-1}, \tag{4.5}$$

$$P_2(e_m) = F(e_m),\ \ P_2'(e_m)e_{m-1} = F'(e_m)e_{m-1}.$$

Надалі потрібно визначити решту $N-2(m+1)=\dfrac{(m-2)(m+1)}{2}$ інтерполяційних умов. Оберемо їх такими:

$$P_2(e_q+e_{q+p+1})=F(e_q+e_{q+p+1}),$$

$$P_2'(e_q+e_{q+p+1})e_{q+p+2}=F'(e_q+e_{q+p+1})e_{q+p+2}, \tag{4.6}$$

$$p=2l,\ l=\overline{0,2k+i-1},\ q=\overline{1,m-p-2}.$$

Якщо $l=2b+1,\ b\in\mathbb{N}$, то задамо

$$P_2(e_{m-p-1}+e_m)=F(e_{m-p-1}+e_m),$$

$$P_2'(e_{m-p-1}+e_m)e_{m-p-3}=F'(e_{m-p-1}+e_m)e_{m-p-3}. \tag{4.7}$$

Так, наприклад, якщо $m=6$, тоді $N=28$, а інтерполяційні умови (4.5) будуть мати вигляд

$$P_2(0)=F(0),\ \ P_2'(0)e_6=F'(0)e_6,$$

$$P_2(e_j)=F(e_j),\ \ P_2'(e_j)e_j=F'(e_j)e_j,\ \ j=\overline{1,5},$$

$$P_2(e_6)=F(e_6),\ \ P_2'(e_6)e_5=F'(e_6)e_5.$$

Необхідно визначити ще 7 вузлів та напрямків. Оберемо їх за викладеним вище алгоритмом. Рівності (4.6), (4.7) запишуться таким чином:

$$P_2(e_1+e_2)=F(e_1+e_2),\ \ P_2'(e_1+e_2)e_3=F'(e_1+e_2)e_3,$$

$$P_2(e_2+e_3)=F(e_2+e_3),\ \ P_2'(e_2+e_3)e_4=F'(e_2+e_3)e_4,$$

$$P_2(e_3+e_4)=F(e_3+e_4),\ \ P_2'(e_3+e_4)e_5=F'(e_3+e_4)e_5,$$

$$P_2(e_1+e_4)=F(e_1+e_4),\ \ P_2'(e_1+e_4)e_5=F'(e_1+e_4)e_5,$$

$$P_2(e_2+e_5)=F(e_2+e_5),\ \ P_2'(e_2+e_5)e_6=F'(e_2+e_5)e_6,$$

$$P_2(e_3+e_6)=F(e_3+e_6),\ \ P_2'(e_3+e_6)e_1=F'(e_3+e_6)e_1.$$

Для знаходження операторних форм $L_k^I(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_k})$ застосуємо систему рівнянь (4.5) – (4.7), враховуючи, що

$$P_2'(e_i)h_i=L_k^I(h_i)+2L_2(e_i,h_i).$$

Дістанемо:

$$L_0^I=F(0),\ L_1^I(e_m)=F'(0)e_m,\ L_2^I(e_m,e_m)=F(e_m)-F'(0)e_m-F(0)$$

$$L_2^I(e_m,e_m)=F'(e_i)e_i-F(e_i)+F(0) \tag{4.8}$$

$$L_1^I(e_i)=F(e_i)-L_2^I(e_i,e_i)-F(0),\ i=\overline{1,m-1},$$

$$L_2^I(e_{m-1},e_m)=\frac{1}{2}\{F(e_i+e_j)-F(e_i)-F(e_j)+F(0).\}$$

Значення $L_2^I(e_q,e_{q+p+1})$, $p=2l$, $q=\overline{1,m-p-2}$, $l=\overline{0,2k+i-1}$ та $L_2^I(e_{m-p-1},e_m)$, коли $l=2b+1$, $b\in\mathbb{N}$ одержимо із формул

$$L_2^I(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\{F(e_i + e_j) - F(e_i) + F(0)\}, \tag{4.9}$$

замінюючи індекси i та j відповідними значеннями, а $L_2^I(e_q, e_{q+p+1})$ та $L_2^I(e_m, e_{m-p-3})$, $p = 2l$, $q = \overline{1, m-p-2}$, $l = \overline{0, 2k+i-1}$ таким чином

$$L_2^I(e_q, e_{q+p+1}) = \frac{1}{2}\{F'(e_q + e_{q+p+1}) - L_1^I(e_{q+p+2}) - 2L_2^I, e_{q+p+2}\},$$

$$L_2^I(e_m, e_{m-p-3}) = \frac{1}{2}\{F'(e_{m-p-1} + e_m)e_{m-p-3} - L_1^I(e_{m-p-3}) - 2L_2^I(e_{m-p-1}, e_m)\}. \tag{4.10}$$

Отже, знайдені всі операторні форми $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$, $1 \leq i_j \leq m$, $k = \overline{0, 2}$, які входять в (4.3), а це означає, що інтерполяційний поліном повністю визначений.

Якщо $F(x) \equiv F_2(x) \in \Pi_2$, тобто

$$F_2(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2,$$

то побудований інтерполяційний поліном $P_2(x)$ у разі $m \to \infty$ співпадає з $F_2(x)$, оскільки $\{e_i\}_{i=1}^m$ — ортонормований базис в X, а інтерполянт має вигляд

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} L_k(\sum_{i=1}^{m}(x, e_i)e_i)^k.$$

Нехай надалі μ — деяка гаусова міра на X, перший момент якої дорівнює нулю, а другий є обмеженим; B — кореляційний оператор цієї міри, є ядерним та $KerB = \emptyset$; $(\cdot, \cdot)_Y$ — скалярний добуток в просторі Y. На множині Π_n введемо скалярний добуток (2.1) [85] та норму $\|P\|_H^2 = (P, P)_H$.

Нижче буде показано, що побудований інтерполянт має мінімальну норму серед усіх поліномів типу Ерміта для даного оператора з фіксованими інтерполяційними умовами, але спочатку доведемо теорему про інтерполянт типу Ерміта із мінімальною нормою, який є розв'язком задачі

$$P_n(Be_i) = F(Be_i), \quad P_n'(Be_i)Bh_i = F'(Be_i)Bh_i, \quad i = \overline{1, L}. \tag{4.11}$$

В [77] побудовано множину інтерполянтів Ерміта (1.18) які є розв'язками задачі (4.11) при довільному n. Для розв'язання задачі (4.11) введемо позначення:

$$\vec{F}_H = \left\{ F(Bx_i), \frac{\partial}{\partial\gamma} F(Bx_i + \gamma Bh_i)|_{\gamma=0} \right\}_{i=1}^{L},$$

$$\vec{Q}_H = \left\{ Q_n(Bx_i), \frac{\partial}{\partial\gamma} Q_n(Bx_i + \gamma Bh_i)|_{\gamma=0} \right\}_{i=1}^{L},$$

$$g(u, v) = \sum_{p=0}^{n} (Bu, v)^p,$$

$$\vec{g}_H(x) = \left\{ g(x_i, x), \frac{\partial}{\partial\gamma} g(x_i + \gamma h_i, x)|_{\gamma=0} \right\}_{i=1}^{L},$$

H^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до симетричної матриці $H = \|H^{ls}\|_{l,s=1}^{L}$ [101], де $\|H^{ls}\|$ — матричний блок розмірності 2×2 : $\|H^{ls}\| = \|t_{ij}^{ls}\|_{i,j=0}^{1}$,

$$t_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_i \partial\beta_1 \ldots \partial\beta_j} g(x_l + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p h_p^{(l)}, x_s + \sum_{p=1}^{j} \beta_p h_p^{(s)}) \bigg|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_i=\beta_1=\cdots=\beta_j=0},$$

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{2L} \alpha_i \beta_i, \alpha_i \in Y, \beta_i \in R^1, \ \vec{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2L}), \ \vec{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_{2L}).$$

Нехай Z — матриця, рядками якої є координати ортонормованих власних векторів матриці H із нульовим власним числом. В монографії [85] показано, що інтерполяційна задача (4.11) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова (1.17) Надалі будемо вважати, що рівність (1.17) справджується. Поліном $P_n(x)$, що визначається формулою (1.18), надамо у вигляді

$$P_n(x) = P^*(x) + Q_0(x), \tag{4.12}$$

де

$$P^*(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \right\rangle, \tag{4.13}$$

$$Q_0(x) = Q_n(x) - \left\langle \vec{Q}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \right\rangle. \tag{4.14}$$

Неважко бачити, що $\vec{Q}_{0H} = \vec{0}$. Нехай Π_n^{IH} — множина інтерполяційних операторних поліномів n-го степеня типу Ерміта. Основним результатом підрозділу є така теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконується умова* (1.17)*. Тоді поліном* $P^*(x)$*, що визначається формулою* (4.13) *є розв'язком екстремальної задачі*

$$\|P^*\|_H = \min_{P_n \in \Pi_n^{IH}} \|P_n\|_H = \left(\left\langle \left\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.15}$$

і цей розв'язок єдиний, $\left\langle \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \right\rangle = \sum_{i=1}^{2L} (\alpha_i, \beta_i)_Y$, $\alpha_i, \beta_i \in Y$, $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2L})$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2L})$.

Доведення. Розглянемо квадрат норми оператора P_n в просторі H. Маємо

$$\|P_n\|_H^2 = \|P^* + Q_0\|_H^2 = \|P^*\|_H^2 + \|Q_0\|_H^2 + 2(P^*, Q_0)_H. \tag{4.16}$$

Позначимо $\vec{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_{2L}) = H^+ \vec{F}_H$,

$$Q_0(x) = L_0^{(0)} + L_1^{(0)} x + \cdots + L_n^{(0)} x^n.$$

Розглянемо скалярний добуток $(P^*, Q_0)_H$ і в подальшому використаємо таку лему із монографії [77]: для p-лінійного оператора $L_p(x_1, x_2, \ldots, x_p) : X^p \to Y$ має місце рівність

$$\int\limits_X \cdots \int\limits_X \prod_{i=1}^{p} (x_j, v_j)(y, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p))_Y \mu(dv_1)\mu(dv_2)\ldots\mu(dv_k) =$$

$$= (y, L_p(Bv_1, Bv_2, \ldots, Bv_p))_Y, \quad \forall y \in Y,$$

Для скалярного добутку $(P^*, Q_0)_H$ одержимо:

$$(P^*, Q_0)_H = \left(\left\langle \vec{F}_H, H^+ \left\{ \frac{\partial^i}{\partial\alpha} g(x_j + \alpha h_j, x)|_{\alpha=0}, i = 0, 1 \right\}_{j=1}^{L} \right\rangle, Q_0(x)\right)_H =$$

$$= \left(\left\langle H^+ \vec{F}_H, \left\{ \frac{\partial^i}{\partial\alpha} g(x_j + \alpha h_j, x)|_{\alpha=0}, i = 0, 1 \right\}_{j=1}^{L} \right\rangle, Q_0(x)\right)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \left(w_{2k-1} \sum_{p=0}^{n} (x_k, x)^p, Q_0(x) \right)_H + \tag{4.17}$$

$$+ \sum_{k=1}^{L} \left(w_{2k} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial}{\partial\alpha} (x_k + \alpha h_k, x)^p|_{\alpha=0}, Q_0(x) \right)_H .$$

Розглянемо перший доданок в (4.17):

$$\sum_{k=1}^{L} \left(w_{2k-1} \sum_{p=0}^{n} (x_k, x)^p, Q_0(x) \right)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \prod_{i=1}^{p} (x_k, v_i)(w_{2k-1}, L_p^{(0)}(v_1, v_2 \ldots, v_p))_Y \times$$

$$\times \mu(dv_1)\mu(dv_2) \cdots \mu(dv_p) =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=0}^{n} (w_{2k-1}, L_p^{(0)}(Bx_k, Bx_k, \ldots, Bx_k))_Y = \tag{4.18}$$

$$= \sum_{k=1}^{L} (w_{2k-1}, Q_0(Bx_k))_Y = 0,$$

оскільки $Q_0(Bx_k) = 0$, $k = \overline{1, L}$. Другий доданок в (4.17) перетворимо таким чином:

$$\sum_{k=1}^{L} \left(w_{2k} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha} (x_k + \alpha h_k, x)^p |_{\alpha=0}, Q_0(x) \right)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=0}^{n} \left(w_{2k} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha} (x_k + \alpha h_k, x) |_{\alpha=0}, L_p^{(0)} x^p \right)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=0}^{n} p \left(w_{2k} (x_k, x)^{p-1} (h_k, x), L_p^{(0)} x^p \right)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=0}^{n} \frac{p}{p!} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left(w_{2k} \frac{\partial^p}{\partial \alpha_1 \cdots \partial \alpha_p} (x_k, \sum_{i=1}^{P} \alpha_i v_i)^{p-1} \times \right.$$

$$\left. \times \, (h_k, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i)|_{\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0}, L_p^{(0)}(v_1, v_2, \ldots, v_p) \right)_Y \mu(dv_1) \mu(dv_2) \cdots \mu(dv_p) =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_X \cdots \int\limits_X (w_{2k} (p-1)! \left\{ (h_k, v_1)(x_k, v_2) \cdots (x_k, v_p) + \right.$$

$$\left. + \, (x_k, v_1)(h_k, v_2)(x_k, v_3) \cdots (x_k, v_p) + \cdots + (x_k, v_1) \cdots (x_k, v_{p-1})(h_k, v_p) \right\},$$

$$\left. L_p^{(0)}(Bh_k, Bx_k, \ldots, Bx_k) \right)_Y \mu(dv_1) \mu(dv_2) \cdots \mu(dv_p) =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=1}^{n} \Big(w_{2k} \Big(L_p^{(0)}(Bh_k, Bx_k, \ldots, Bx_k) + L_p^{(0)}(Bx_k, Bh_k, \ldots, Bx_k) +$$

$$+ \cdots + L_p^{(0)}(Bx_k, Bx_k, \ldots, Bh_k) \Big\} \Big)_Y =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \sum_{p=1}^{n} \Big(w_{2k}, L_p^{(0)}(Bx_k, Bx_k, \ldots, Bx_k) Bh_k \Big)_Y =$$

$$= \sum_{k=1}^{L} (w_{2k}, Q_0'(Bx_k)Bh_k)_Y = 0, \tag{4.19}$$

оскільки

$$Q_0'(Bx_k)Bh_k = 0, k = \overline{1, L}.$$

На підставі (4.18), (4.19) із (4.17) дістанемо, що $(P^*, Q_0)_H = 0$. Отже рівність (4.16) можемо записати у вигляді

$$\|P_n\|_H^2 = \|P^*\|_H^2 + \|Q_0\|_H^2 \geq \|P^*\|_H^2.$$

У рівностях (4.17) – (4.19) покладемо $Q_0(x) = P^*(x)$. Тоді в цьому випадку отримаємо

$$\|P^*\|_H^2 = (P^*, P^*)_H = \left\langle \left\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle \right\rangle.$$

Доведемо єдиність розв'язку екстремальної задачі. Припустимо, що існує поліном $S(x) \in \Pi_n^{IH}$ такий, що $S(x) \neq P^*(x)$ та $\|S\|_H^2 = \left\langle \left\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle \right\rangle$. Тоді, враховуючи (4.17) – (4.19), одержимо

$$\|S - P^*\|_H^2 = \|S\|_H^2 + \|P^*\|_H^2 - 2(S, P^*)_H =$$

$$= \left\langle \left\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle \right\rangle + \left\langle \left\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle \right\rangle - 2 \left\langle \left\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle \right\rangle = 0,$$

що є протиріччям припущенню. Отже інтерполянт мінімальної норми єдиний. Теорему 4.1 доведено. Зауважимо, що схема доведення використовує аналогічну схему [77].

□

Нехай оператор $F : X \to Y$ є n разів диференційованим за Гато. Теорему 4.1 можна узагальнити для операторної задачі Ерміта, коли у вузлах інтерполяції задані диференціали Гато до певного порядку включно, тобто інтерполяційні умови будуть мати вигляд:

$$P_n^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)} = F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)}, i = \overline{0, k_j},\ j = \overline{1, m}. \tag{4.20}$$

Позначимо:

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)}, i = \overline{0, k_j}\}_{i=1}^{m}, \tag{4.21}$$

Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори симетричної матриці $H = \|H^{ls}\| = \|h_{ij}^{ls}\|_{i=\overline{0,k_i},\ j=\overline{0,k_s}}$ з нульовим власним числом,

$$h_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1 \dots \partial\alpha_i \partial\beta_1 \dots \partial\alpha_j} g^B(x_l + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_{ip}^{(i)}, \tag{4.22}$$

$$x_s + \sum_{p=1}^{j} \beta_p v_{sp}^{(i)})|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_i = \beta_1 = \dots = \beta_j = 0},$$

$$g^B = g(Bu, v) = \sum_{p=0}^{n} (Bu, v)^p,\ Bu, v \in X. \tag{4.23}$$

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова* (1.17). *Тоді поліном* $P^*(x)$, *що визначається формулою* (4.13), (4.21), (4.22) *є розв'язком екстремальної задачі*

$$\|P^*\|_H = \min_{P_n \in \Pi_n^{IH}} \|P_n\|_H = \left(\left\langle\left\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.24}$$

і цей розв'язок єдиний, де

$$\left\langle\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle\right\rangle = \sum_{i=1}^{M} (\alpha_i, \beta_i)_Y, \quad \alpha_i, \beta_i \in Y,$$

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M),\ \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M),\ M = \sum_{i=1}^{m} k_i + m.$$

Доведення теореми 4.2 повністю аналогічне до доведення теореми 4.1, але є більш громіздким.

В подальших викладках покладемо $n = 2$. Нехай $\{e_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована система власних елементів оператора B, $m \in \aleph$. Оберемо в інтерполяційних умовах (4.11) за вузли інтерполювання елементи $Bx_j,\ j = \overline{0, \frac{N}{2}}$ таким чином:

$$Bx_0 = 0,\ Bx_i = e_i,\ i = \overline{1, m},\ Bx_j = e_q + e_{p+q+1},\ p = 2l, l = 0, \overline{2k+i-1},$$

$$q = \overline{1, m-p-2},\ m \in \aleph = \{4k + i + 2, i = 0, 1\}_{k=0}^{\infty}$$

(k, i – фіксовані сталі), якщо $l = 2b+1$, $b \in \mathbb{N}$, то $Bx_j = e_{m-p-1}$. Напрямки Bh_j, $j = \overline{0, \frac{N}{2}}$ перших диференціалів Гато, що задані в цих вузлах такими:

$$Bh_0 = e_m,\ Bh_i = e_i,\ i = \overline{1, m-1},\ Bh_m = e_{m-1},$$

$$Bh_j = e_{q+p+2},\ p = 2l,\ l = \overline{0, 2k+i-1},\ q = \overline{1, m-p-2},$$

$$Bh_j = e_{m-p-3},\ \text{якщо } l = 2b+1, b \in \mathbb{N}.$$

При цьому елементи x_j та h_j оберемо таким же чином, як і елементи Bx_j та Bh_j відповідно, але за системою елементів e_j/λ_j, де λ_j – власні числа оператора B, що відповідають елементам e_j. В цьому випадку інтерполянт (4.3) є розв'язком задачі типу Ерміта (4.11). Значення операторних форм $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ визначаються однозначно за допомогою системи (4.5) — (4.7), отже матриця цієї системи має обернену.

Розглянемо тепер розв'язок задачі (4.11) на послідовності вузлів Bx_j, $j = \overline{0, \frac{N}{2}}$, $m \in \aleph$ та напрямків диференціалів Гато Bh_j, $j = \overline{0, \frac{N}{2}}$, $m \in \aleph$ за допомогою інтерполяційного полінома мінімальної норми (4.13). Зауважимо, що інтерполянт(4.3) є розв'язком (4.11) на послідовностях вузлів Bx_j, $j = \overline{0, \frac{N}{2}}$, $m \in \aleph$ та напрямків Bh_j, $j = \overline{0, \frac{N}{2}}$, $m \in \aleph$ у разі довільних значеннях $F(Bx_i)$ та $F(Bx_i)Bh_i$, тобто задача операторного поліноміального інтерполювання інваріантно розв'язувана. Звідси випливає, що

$$Z\vec{F}_H = \vec{0}$$

при будь-якому $\vec{F}_H$, отже $Z \equiv 0$. Остання рівність означає, що матриця H має обернену. Якщо в (4.13) розкриємо $< \cdot, \cdot >$, то інтерполянт (4.13) можна привести до вигляду (4.3), де замість $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ будуть коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Їх можна знайти із системи (4.11). Отримаємо, що

$$L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) = a_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Таким чином доведену теорему 4.3 [138].

Теорема 4.3. *Інтерполяційний поліном $P_2(x)$, який визначаєтьcя за допомогою формули (1.17), та поліном мінімальної норми $P^*(x)$, що побудовані на послідовностях вузлів Bx_j, $j = \overline{0, \frac{N}{2}}$, $m \in \aleph$ та напрямків Bh_j, $j = \overline{0, \frac{N}{2}}$, $m \in \aleph$ за якими задані перші диференціали Гато, тотожно співпадають.*

Ця теорема справджується для поліномів третього та четвертого степеня, які побудовано у вигляді (4.3) в [44].

Надалі розглянемо питання про збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми, коли $m \to \infty$ до операторного поліному другого степеня, що інтерполюємо. Нехай $F_2 \in \Pi_2$. Сформулюємо два результати, доведення яких засновано на тих самих міркуваннях, що і теореми 2.2 та 2.7 для інтерполяційного поліному типу Лагранжа, оскільки при цьому безпосередньо використовували вигляд інтерполянта, а поліном типу Ерміта, що побудований в даному розділі, має таку ж структуру, за винятком алгоритму визначення значень операторних форм $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$.

Теорема 4.4. *Справедлива рівність*

$$\lim_{m \to \infty} \|F_2 - P^*\|_H = 0.$$

Теорема 4.5. *Оцінка точності інтерполяції поліноміального оператора другого степеня поліномом* (4.13) *визначається нерівністю*

$$\|F_2 - P_2\|_H^2 < \sum_{k=1}^{2} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i$$

Теореми 4.4, 4.5 будуть виконуватись для інтерполяційних поліномів третього та четвертого степеня, які побудовано у [44] та мають вигляд (4.3).

4.2 Операторні інтерполянти типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа, що є асимптотично точними на поліномах відповідного степеня

В цьому підрозділі буде розглянуто операторні інтерполяційні поліноми Ерміта та Ерміта-Біркхофа та показано, що вони асимптотично (при збільшенні числа вузлів) зберігають багаточлени відповідного степеня та мають мінімальну норму серед всієї множини розв'язків поставленої задачі інтерполювання [77], [85]. При цьому для побудови таких інтерполяційних формул необхідно знати лише інформацію про вузлові значення оператора та значення диференціалів Гато у вузлах до певного порядку за заданими напрямками.

Нехай X, Y — гільбертові простори (X — сепарабельний), Π_n — множина операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n, що визначається формулою (4.1). Нехай, надалі $\{e_i\}_{i=1}^m \subset X$ — елементи базисної ортонормованої системи в X, а множину $\mathfrak{J}(m)$, що побудована за системою елементів e_i, $i = \overline{1, m}$, визначимо таким чином

$$\mathfrak{J}(m) = \{0,\ e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k},\ k = \overline{1, n}, i_j = \overline{1, m},\ m \geq n\}.$$

Число елементів множини $\mathfrak{J}(m)$ дорівнює $1+N$, $N = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^k$. Оператор $F : X \to Y$, в загальному випадку нелінійний, заданий своїми значеннями $F(y_i) \in Y$, $i = \overline{0, N}$, на множині $\mathfrak{J}(m)$ та значеннями диференціалів Гато $F^{(k)}(y_i; F) z_k^{(i)} z_{k-1}^{(i)} \cdots z_1^{(i)}$, $k = 1, \ldots, k_i$, у вузлах інтерполяції y_i $i = \overline{0, N}$.

Розглянемо інтерполяційну задачу Ерміта: потрібно знайти такий поліном $P_{mn} : X \to Y$ для якого виконуються такі умови

$$P_{mn}^{(k)}(y_i; F) z_k^{(i)} z_{k-1}^{(i)} \cdots z_1^{(i)} = F^{(k)}(y_i; F) z_k^{(i)} z_{k-1}^{(i)} \cdots z_1^{(i)}, \tag{4.25}$$

де $k = 0, 1, \ldots, k_i$, $0 \leq k_i \leq n$, $i = \overline{1, s}$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1 + N$, $y_i, z_k^{(i)}, z_{k-1}^{(i)}, \ldots, z_1^{(i)} \in \mathfrak{J}(m)$,

$$F^{(k)}(y_i) z_k^{(i)} z_{k-1}^{(i)} \cdots z_1^{(i)} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \cdots \partial \alpha_k} F\left(y_i + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j z_j^{(i)}\right)\Bigg|_{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0}$$

— диференціал Гато порядку k у вузлі y_i за заданими напрямками $z_k^{(i)}, z_{k-1}^{(i)}, \ldots, z_1^{(i)}$.

Для розв'язання поставленої інтерполяційної задачі Ерміта будемо використовувати інтерполянт вигляду

$$P_{mn}(x;F) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)(x,e_{i_1})(x,e_{i_2})\cdots(x,e_{i_k}). \qquad (4.26)$$

Отже, сформулюємо постановку задачі таким чином: потрібно задати такі інтерполяційні умови, щоб всі невідомі коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)$ із (4.26) були визначені [143].

Покладемо $n = 2$, $m = 3$. Інтерполяційні умови оберемо у такому вигляді:

$$P_{mn}(0) = F(0),\ P_{mn}(e_i) = F(e_i),\ \ i = 1,2,3,$$

$$P_{mn}(e_1+e_2) = F(e_1+e_2),\ \ P'_{mn}(0)e_3 = F'(0)e_3, \qquad (4.27)$$

$$P'_{mn}(e_i)e_i = F'(e_i)e_i,\ \ i = 1,2,3,\ \ P'_{mn}(e_1+e_2)e_3 = F'(e_1+e_2)e_3.$$

тобто необхідно знайти всі невідомі коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)$, що містяться в $P_{32}(x)$. Для їх визначення розв'яжемо систему функціональних рівнянь (4.27) [43]. Одержимо:

$$a_0(F) = F(0), a_3 = F'(0)e_3,\ \ a_{33}(F) = F(e_3) - F'(0)e_3 - F(0),$$

$$a_{ii}(F) = F'(e_i)e_i - F(e_i) + F(0),\ \ i = 1,2,$$

$$a_i(F) = F(e_i) - a_{ii}(F) - F(0),\ i = 1,2,\ \ a_{23}(F) = \frac{1}{2}\left\{F'(e_3)e_2 - a_2(F)\right\},$$

$$a_{13}(F) = \frac{1}{2}\left\{F'(e_1+e_2)e_3 - a_3(F) - 2a_{12}(F)\right\}.$$

Таким чином, знайдено всі $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)$, $1 \le i_j \le 3$, $k = \overline{0,2}$, із (4.26). Аналогічна задача (коли задані значення оператора, що інтерполюємо, у вузлах та його значення перших диференціалів Гато першого порядку для $n = 2$ і довільного m) розв'язана в розділі 4.1, при цьому, використовуючи розв'язок відповідної системи рівнянь (4.27), були побудовані рекурентні формули для знаходження $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)$.

Нехай, надалі, $n = 3,\ m = 3$ та задані такі значення оператора (в загальному випадку нелінійного) та значення його перших диференціалів Гато:

$$F(e_i),\ \ F'(e_i)e_i,\ \ F''(e_i)e_i^2,\ \ i = 1,2,3,$$

$$F(e_i + e_{i+1}),\ F'(e_i + e_{i+1})e_i,\ \ F''(e_i + e_{i+1})e_{i+1}^2,\ \ i = 1,2,$$

$$F(e_1 + e_3),\ \ F'(e_1 + e_3)e_1,\ \ F''(e_1 + e_3)e_3^3,\ \ F(e_1 + e_2 + e_3),\ \ F(0).$$

Для побудови інтерполяційного полінома $P_{33}(x)$ (потрібно визначити коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)$), що містяться в (4.26), аналогічно до викладеного вище, розв'язуємо систему (4.25).

Розглянемо інтерполяційну задачу Ерміта-Біркхофа для поліноміального оператора $F_4 \in \Pi_4$. Визначимо інтерполяційні умови таким чином, щоб для поставленої задачі побудувати інтерполянт вигляду (4.26). Інтерполяційні умови задамо такими:

$$P_4(0) = F_4(0),\ \ P_4(x_i) = F_4(x_i),\ \ P_4(2x_i) = F_4(2x_i),\ \ i = \overline{1,m},$$

$$P_4'(x_i)x_i = F_4'(x_i)x_i, \ \ P_4''(x_i)x_ix_i = F_4''(x_i)x_ix_i \ \ i = \overline{1,m}, \tag{4.28}$$

$$P_4''(x_i)x_jx_j = F_4''(x_i)x_jx_j, \ \ i = \overline{1,m-1}, j = \overline{i+1,m}, \tag{4.29}$$

$$P_4''(2x_i)x_jx_j = F_4''(2x_i)x_jx_j, i = \overline{1,m-1}, j = \overline{i+1,m}, \tag{4.30}$$

$$P_4''(x_j)x_ix_i = F_4''(x_j)x_ix_i, i = \overline{1,m-1}, j = \overline{i+1,m}, \tag{4.31}$$

$$P_4'(x_i)x_j = F_4'(x_i)x_j, i = \overline{1,m-1}, j = \overline{i+1,m}, \tag{4.32}$$

$$P_4'(2x_i)x_j = F_4'(2x_i)x_j, i = \overline{1,m-1}, j = \overline{i+1,m}, \tag{4.33}$$

$$P_4'(x_j)x_i = F_4'(x_j)x_i, i = \overline{1,m-1}, j = \overline{i+1,m}, \tag{4.34}$$

$$P_4''(x_i)x_jx_k = F_4''(x_i)x_jx_k, \tag{4.35}$$

$$P_4''(2x_i)x_jx_k = F_4''(2x_i)x_jx_k, \tag{4.36}$$

$$P_4''(x_j)x_ix_k = F_4''(x_j)x_ix_k, \tag{4.37}$$

$$P_4''(x_k)x_jx_i = F_4''(x_k)x_jx_i, \tag{4.38}$$

В умовах (4.35) – (4.38): $i \neq j \neq k, k = \overline{1,m-2}, i = \overline{k+1,m-1}, j = \overline{k+2,m}$,

$$P_4''(x_i+x_k)x_px_k = F_4''(x_i+x_k)x_px_k, i \neq j \neq k \neq p, i,j,p,k = \overline{1,m}. \tag{4.39}$$

Для знаходження невідомих операторних форм $L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ на першому кроці розглянемо умови (4.28) як систему функціональних рівнянь. Її розв'язок має вигляд:

$$L_0 = F_4(0),\ L_1(x_i) = 4F_4(x_i) - 0.5F_4(2x_i) - 2F_4'(x_i)x_i + F_4''(x_i)x_ix_i - 4.5F_4(0),$$

$$L_2x_i^2 = -6F_4(x_i) + 1.5F_4(2x_i) + 3F_4'(x_i)x_i - 2.5F_4''(x_i)x_ix_i + 4.5F_4(0),$$

$$L_3x_i^3 = 4F_4(x_i) - 1.5F_4(2x_i) - F_4'(x_i)x_i + 2F_4''(x_i)x_ix_i - 2.5F_4(0),$$

$$L_4x_i^4 = -F_4(x_i) + 0.5F_4(2x_i) - 0.5F_4''(x_i)x_ix_i + 0.5F_4(0), i = \overline{1, m}.$$

Із (4.29), (4.30) та формул

$$P_4(x_i) = L_0 + L_1x_i + L_2x_i^2 + L_3x_i^3 + L_4x_i^4,$$

$$P_4'(x_i)x_j = L_1(x_j) + 2L_2(x_i, x_j) + 3L_3(x_i, x_i, x_j) + 4L_4(x_i, x_i, x_i, x_j),$$

$$P_4''(x_i)x_jx_k = 2!L_2(x_j, x_k) + 3!L_3(x_i, x_j, x_k) + 3 \cdot 4L_4(x_i, x_i, x_j, x_k)$$

дістанемо

$$L_3(x_i, x_j, x_k) = \frac{1}{3}\left\{F_4''(x_i)x_jx_j - \frac{1}{4}F_4''(2x_i)x_jx_j - \frac{3}{2}L_2x_j^2\right\}$$

$$L_4(x_i, x_i, x_j, x_j) = \frac{1}{12}\left\{-F_4''(x_i)x_jx_j + \frac{1}{2}F_4''(2x_i)x_jx_j + L_2x_j^2\right\}.$$

Із умов(4.31) знайдемо

$$L_3(x_j, x_i, x_i) = F_4''(x_j)x_i x_i - L_2 x_i^2 - 12L_4(x_i, x_i, x_j, x_i).$$

Умови (4.32), (4.33) розглянемо як систему функціональних рівнянь відносно невідомих $L_2(x_i, x_j)$, $L_4(x_i, x_i, x_i, x_j)$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{i+1, m}$, розв'язавши яку, одержимо

$$L_2(x_i, x_j) = \frac{1}{3!}\left\{4F_4'(x_i)x_i - \frac{1}{2}F_4''(2x_i)x_i - \frac{7}{2}L_1 x_j - 3!L_3 x_i^3\right\},$$

$$L_4(x_i, x_i, x_i, x_j) = \frac{1}{4!}\left\{F_4'(2x_i)x_j - 2F_4'(x_i)x_j + L_1 x_j - 3!L_3(x_i, x_i, x_j)\right\}.$$

Із (4.34) отримаємо

$$L_4(x_j, x_i, x_i, x_k) = F_4'(x_j)x_i - L_1 x_i - 2L_2(x_i, x_j) - 3!L_3(x_i, x_j, x_j).$$

Надалі із системи рівнянь (4.35), (4.36) визначимо

$$L_3(x_i, x_j, x_k) = \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{2}F_4''(x_i)x_j x_k - 3L_2(x_j, x_k)\right\},$$

$$L_4(x_i, x_i, x_j, x_k) = \frac{1}{8}\left\{F_4''(2x_i)x_j x_k - 2F_4''(x_i)x_j x_k + 2L_2(x_j, x_k)\right\},$$

$$i \neq j \neq k, k = \overline{1, m-2}, i = \overline{k+1, m-1}, j = \overline{k+2, m},$$

а із (4.37), (4.38) — решту значень $L_4(x_i, x_i, x_j, x_k)$

$$L_4(x_i, x_i, x_j, x_k) = \frac{1}{12}\left\{F_4''(x_j)x_i x_k - 2L_2(x_i, x_k) - 3!L_3(x_j, x_i, x_k)\right\},$$

$$L_4(x_i, x_j, x_k, x_k) = \frac{1}{12}\left\{F_4''(x_k)x_jx_i - 2L_2(x_i, x_j) - 3!L_3(x_j, x_i, x_k)\right\},$$

$$i \neq j \neq k, k = \overline{1, m-2}, i = \overline{k+1, m-1}, j = \overline{k+2, m}.$$

Із (4.38) знайдемо

$$L_4(x_i, x_j, x_p, x_k) = \frac{1}{4!}\left\{F_4''(x_i + x_j)x_px_k - 2L_2(x_p, x_k) - 3!(L_3(x_i, x_p, x_k)+\right.$$

$$\left.+L_3(x_j, x_p, x_k)) - 3 \cdot 4(L_4(x_i, x_i, x_p, x_k) + L_4(x_j, x_j, x_p, x_k))\right\},$$

таким чином, всі невідомі значення операторних форму із (4.26) знайдені. Зауважимо, що для побудованих інтерполянтів справджуються теореми 4.4 та 4.5.

Побудова інтерполяційних формул Ерміта та Ерміта-Біркхофа вигляду (4.26) розглянута в [44]. Для побудови інтерполянтів Ерміта та Ерміта-Біркхофа в загальному випадку не існує рекурентних співвідношень для знаходження невідомих коефіцієнтів із (4.26), на відміну від інтерполяційної задачі Лагранжа, але їх визначення зводиться до розв'язання відповідної системи функціональних рівнянь (4.25). При цьому необхідно, щоб кількість інтерполяційних умов співпадала з числом невідомих коефіцієнтів $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(F)$, що дорівнює $N+1$, а розв'язок системи (4.25) був єдиним.

Розглянемо задачу інтерполяції Абеля-Гончарова. Пропозиція щодо побудови та дослідження інтерполянта Абеля-Гончарова на операторному рівні належить академіку В. Л. Макарову. Нехай задані значення оператора у нулі та його диференціалів Гато у вузла $e_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, за напрямками ортонормованого базису $e_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, таким чином: диференціали Гато першого порядку - у першому вузлі e_1, другого порядку - у другому вузлі e_2 і т. д. Для нелінійного оператора $F : X \to Y$, що має похідні до певного порядку включно, потрібно знайти поліном $P_{mn} : X \to Y$ степеня n, що відповідає умовам

$$P^{(k)}_{m,n}(e_k)e_{i_k}e_{i_{k-1}}\dots e_{i_1} = F^{(k)}(e_k)e_{i_k}e_{i_{k-1}}\dots e_{i_1}, 1 \le i_j \le m, \quad k = \overline{0,n}. \quad (4.40)$$

Умови (4.40) будемо називати інтерполяційними умовами Абеля-Гончарова [26]. Їх кількість дорівнює $1 + N$. Вони є частинним випадком інтерполяційних умов Ерміта-Біркхофа.

Інтерполянт $P_{m,n}(x)$, що відповідає умовам (4.40) побудовано в [143] у вигляді (4.26). Для його конструктивної побудови було визначено невідомі симетричні відносно своїх індексів, коефіцієнти $a_{i_1,i_2,\dots,i_k}(F)$, $k = \overline{1,n}$, кількість яких дорівнює $1 + N$, а для їх знаходження отримано рекурентну процедуру у вигляді такої формули

$$a_{i_1,i_2,\dots,i_k}(F) = \frac{1}{k!}F^{(k)}(e_k)e_k e_{k-1}\dots e_1 - \sum_{j=1}^{n-k} C^j_{k+j} a_{i_1,\dots,i_k,\underbrace{k,\dots,k}_{j}}(F), \quad (4.41)$$

$$i_1, i_2, \dots, i_k = \overline{1,m}, k = n, n-1, \dots, 0, \sum_{k=1}^{0} = 0.$$

В цьому випадку інтерполянт (4.26) будемо називати інтерполянтом Абеля-Гончарова.

Надалі, нехай $F(x) \equiv F_n(x) \in \Pi_n$. При заміні аргументу в $F_n(x)$ відрізком ряду Фур'є за першими m елементами ортонормованого базису $0, e_1, e_2, \dots, e_m$ простору X дістанемо формулу (4.26). Враховуючи, що система елементів $0, e_1, e_2, \dots, e_m$ є базисом підпростору простору X, дістанемо, що $P_{mn}(x) \equiv F_n(x)$ на підпросторі, що утворений $0, e_1, e_2, \dots, e_m$. На всьому просторі X інтерполяційний поліном $P_{mn}(x)$ співпадає з $F_n(x)$, коли $m \to \infty$, тобто асимптотично. Таким чином має місце теорема:

Теорема 4.6. *Інтерполяційні поліноми Ерміта та Ерміта-Біркхофа $P_{mn}(x)$ вигляду (4.26) є гранично інваріантним відносно багаточленів відповідного степеня.*

Наведене твердження є істотним при розв'язанні прикладних задач, оскільки у разі збільшення кількості вузлів, побудований інтерполянт асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня, що є важливим для одержання оцінок точності.

Нехай, надалі μ — гаусова міра на X [107], перший момент якої дорівнює нулю, а другий є обмеженим; B — кореляційний оператор цієї міри, ядерний і $KerB = \emptyset$, H — гільбертовий простір аналітичних за Гато операторів із скалярним добутком

$$(P, Q)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \cdots \int_X \left(\frac{1}{k!} P^{(k)}(0) v_k v_{k-1} \dots v_1, \frac{1}{k!} Q^{(k)}(0) v_k v_{k-1} \dots v_1 \right)_Y \times \tag{4.42}$$

$$\times \mu(dv_k) \dots \mu(dv_2) \mu(dv_1),$$

де $P,\ Q \in H$, $(\cdot, \cdot)_Y$ — скалярний добуток в Y. Розглянемо оператор $F(x) \in H$. В цьому випадку відрізок ряду Тейлора для $F(x)$

$$P_n(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} x + \frac{F''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

є поліномом найкращого наближення до $F(x)$ у метриці простору H [85]. Якщо задані значення оператора і його похідні Гато в нулі до n-го порядку включно: $F(0)$, $F'(0)e_{i_1}$, $F''(0)e_{i_1}e_{i_2}, \dots,$ $F^{(n)}(0)e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_n}$, $1 \le i_j \le m$, то інтерполяційний поліном Ерміта

$$P^I_{mn}(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} \frac{F^{(k)}(0)e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}}{k!}(x,e_{i_1})(x,e_{i_2})\cdots(x,e_{i_k}) \qquad (4.43)$$

як показано в роботі [140], асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня, тобто

$$\lim_{m\to\infty} P^I_{mn}(x) = P_n(x),$$

а оскільки $P_n(x)$ — поліном найкращого наближення в метриці простору H для аналітичного за Гато оператора, то формула (4.43) є наближенням до $P_n(x)$. Дійсно

$$\left(P^I_{mn} - P_n\right)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left(\frac{1}{k!}P^{I(k)}_{mn}(0)v_k v_{k-1}\cdots v_1 - \frac{1}{k!}P^{(k)}_n(0)v_k v_{k-1}\cdots v_1,\right.$$

$$\left.\frac{1}{k!}Q^{(k)}_n(0)v_k v_{k-1}\cdots v_1\right)_Y \mu(dv_k)\mu(dv_{k-1})\cdots\mu(dv_1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left(\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)v_k v_{k-1}\cdots v_1 - \frac{1}{k!}F^{(k)}(0)v_k v_{k-1}\cdots v_1,\right.$$

$$\left.\frac{1}{k!}Q^{(k)}_n(0)v_k v_{k-1}\cdots v_1\right)_Y \mu(dv_k)\mu(dv_{k-1})\cdots\mu(dv_1) = 0$$

Зауважимо, що існують інтерполяційні формули [27], [186], [78], що є точними на поліномах на всьому просторі. Ці формули є узагальненням інтерполяційних формул Ньютона для векторних та деяких функціональних просторів, а для їх побудови необхідно існування кратних інтегралів Рімана-Стільт'єса по оператору скалярного аргументу від варіацій або похідних вищих порядків оператора F інтегралів Рімана від змішаних похідних функціоналу F. В розділі 2.3 наведено приклад таких інтерполянтів - формула (2.29).

Отже інтерполяційні формули вигляду (4.26) можуть бути вдалою альтернативою до інтерполянтів типу (2.29) та подібних до них (див. [27], [85], [78], [186]). Дійсно, вони простіші за конструкцією побудови та «збереження» ними в асимптотиці відповідних поліномів за наявністю оцінок точності дозволяє обмежуватись скінченою сумою (4.26) та застосовувати її для інтерполяційного наближення поліноміальних, цілих та диференційованих операторів.

4.3 Інтерполяційний поліном Ерміта в скінченновимірному евклідовому просторі

4.3.1 Інтерполяційна задача Ерміта у випадку коли задані перші диференціали Гато

Інтерполяція функцій багатьох змінних є важливою для теоретичних та прикладних задач. У класичних інтерполяційних формулах [8] для існування єдиного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувалися відповідні співвідношення між кількістю вузлів m та степенем інтерполянта n. На практиці особливо цікавим є випадок, коли ці співвідношення не виконуються.

Перші результати з поліноміальної інтерполяції функцій багатьох змінних отримано в роботах [175], [205]. Зауважимо, що з інтерполяційних формул, отриманих у [77], можна одержати класичні інтерполяційні формули для функцій однієї змінної.

При розв'язанні прикладних задач виникають випадки, коли не вистачає вихідної інформації про оператор, який апроксимуємо, для однозначної побудови інтерполяційного полінома без додаткових обмежень. Тобто постає задача про наближення оператора в умовах недовизначеності. У даному підрозділі розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта в евклідовому просторі $E_k, k > 1$, для випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато першого порядку у вузлах інтерполяції. Показано, що поставлена задача має єдиний розв'язок мінімальної норми тоді, коли кількість інтерполяційних умов є меншою ніж розмірність простору поліномів степеня n у скінченновимірному просторі E_k. При цьому задача є інваріантно розв'язною, тобто має розв'язок для будь-яких значень оператора у вузлах та значень його перших диференціалів Гато.

Нехай X, Y — гільбертові простори (X — сепарабельний), B — кореляційний оператор міри μ на X, $KerB = \emptyset$, міра μ має перший момент, що дорівнює нулю, а другий — обмежений, $B(u, v)$ — кореляційний оператор цієї міри відповідно. На підставі результатів [7, 8] має місце рівність

$$B(u,v) = \int\limits_X (x,u)(x,v)\mu(dx) = (Bu,v),\ u,v,x \in X, \tag{4.44}$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в X.

Оператор $F : X \to Y$ (у загальному випадку нелінійний) заданий своїми значеннями $F(Bx_j),\ j = \overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато

$$F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0,k_j},\ j = \overline{1,m},$$

$$Bx_j, Bv_{ji}^{(i)} \in X,\ i = \overline{0,k_j},\ j = \overline{1,m}.$$

Для оператора $F(x)$ потрібно побудувати такий поліном $P_n(x)$ степеня n, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)} = F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)}, i = \overline{0,k_j},\ j = \overline{1,m}. \tag{4.45}$$

У [77], [218] показано, що необхідною та достатньою умовою розв'язання операторної інтерполяційної задачі (4.45) є виконання рівності (1.17) де

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)}\dots Bv_{j1}^{(i)}, i=\overline{0,k_j}\}_{i=1}^{m}, \tag{4.46}$$

Z — матриця, рядками якої є ортонормованими власні вектори симетричної матриці $H = \|H^{ls}\| = \|h_{ij}^{ls}\|_{i=\overline{0,k_i},\, j=\overline{0,k_s}}$ з нульовим власним числом,

$$h_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1\dots\partial\alpha_i\partial\beta_1\dots\partial\alpha_j} g^B(x_l + \sum_{p=1}^{i}\alpha_p v_{ip}^{(i)}, \tag{4.47}$$

$$x_s + \sum_{p=1}^{j}\beta_p v_{sp}^{(i)})|_{\alpha_1=\dots=\alpha_i=\beta_1=\dots=\beta_j=0},$$

$$g^B = g(Bu,v) = \sum_{p=0}^{n}(Bu,v)^p,\ Bu,v\in X. \tag{4.48}$$

У разі виконання умови (1.17) розв'язок задачі (4.45) має вигляд (1.18) [218], де

$$\vec{g}_H(x) = \left\{\frac{\partial^i}{\partial\alpha_1\dots\partial\alpha_i} g\left(Bx_j + \sum_{p=1}^{i}\alpha_p Bv_{jp}^{(i)}, x\right)|_{\alpha_1=\dots=\alpha_i=0}, i=\overline{0,k_j}\right\}_{j=1}^{m}.$$

Умова (1.17) еквівалентна рівності:

$$(E - HH^+)\vec{F}_H = \vec{0}, \tag{4.49}$$

де E — одинична матриця розмірності $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i + m \times \sum\limits_{i=1}^{m} k_i + m$.

Формула (1.18) описує всю множину Π_n^H операторних поліномів Ерміта n-го степеня, що відповідають інтерполяційним умовам (4.45).

Інтерполяційний поліном $P_n(x)$ називають інтерполянтом Ерміта мінімальної норми, якщо він є розв'язком екстремальної задачі

$$\|P_n\|_H = \min\|Q_n\|_H, Q_n\in\Pi_n^H. \tag{4.50}$$

У розділі 4.1 показано, що у разі виконання умови (1.17) поліном

$$P_n(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \right\rangle \tag{4.51}$$

є розв'язком задачі Ерміта (4.45) та має мінімальну норму на множині Π_n^H.

Визначення 4.1. *Задачу інтерполяції назвемо інваріантно розв'язною, якщо вона має розв'язок для будь-яких значень вектора* $\vec{F}_H$.

Наведені вище результати застосуємо для евклідового простору E_k. Нехай

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_k),\ v = (v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k),\ g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2}).$$

Тоді рівність (4.44) у цьому випадку можна записати у такий спосіб:

$$B(u, v) = \int\limits_{E_k} (\gamma, u)(\gamma, v)\mu(d\gamma) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_k\gamma_k)(v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2 + \cdots + v_k\gamma_k) \times$$

$$\times g(\gamma_1)g(\gamma_2)\cdots g(\gamma_k) d\gamma_1 d\gamma_2 \cdots d\gamma_k =$$

$$= (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_kv_k) = (u, v) = (Iu, v).$$

Отже, у просторі E_k оператор B можна обрати одиничним I.

Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо евклідів простір E_2 з гаусовою мірою μ. Нехай p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$,

$$u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2),\ \gamma = (x, y),\ g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2}).$$

За вузли інтерполювання та напрямки диференціалів Гато можна обрати вектори $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $\delta_i = (v_i, h_i), i = \overline{1, m}$, відповідно.

Нехай функція $f : E_2 \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i), i = \overline{1, m}$, у вузлах інтерполяції $\gamma_i = (x_i, y_i), i = \overline{1, m}$, та значеннями диференціалів Гато першого порядку $f'(\gamma_i)\delta_i, i = \overline{1, m}$, у цих вузлах за напрямками $\delta_i = (v_i, h_i),\ i = \overline{1, m}$, $2m \leq p$. Потрібно знайти такий поліном $P_n(\gamma)$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n^{(i)}(\gamma_j)\delta_j = f^{(i)}(\gamma_j)\delta_j, i = 0, 1,\ j = \overline{1, m}. \tag{4.52}$$

Розв'язком поставленої задачі є поліном мінімальної норми (4.51), при цьому матриця H набуває вигляду $H = \|H^{sl}\|_{l=\overline{1,m},\ s=\overline{1,m}}$,

$$H^{sl} = \left\| \begin{matrix} g(\gamma_s, \gamma_l) & \dfrac{\partial}{\partial \beta} g(\gamma_s, \gamma_l + \beta\delta_l)|_{\beta=0} \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha} g(\gamma_s + \alpha\delta_s, \gamma_l)|_{\alpha=0} & \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} g(\gamma_s + \alpha\delta_s, \gamma_l + \beta\delta_l)|_{\alpha=\beta=0}, \end{matrix} \right\|,$$

$$g(u, v) = \sum_{p=0}^{n} (u, v)^p.$$

Елементи матриці $H = \|H^{sl}\|_{l=\overline{1,m},\ s=\overline{1,m}}, H^{sl} = \|h_{ij}^{sl}\|_{i=0,1, j=0,1}$ можна записати у вигляді

$$h_{00}^{sl} = \sum_{p=0}^{n} (\gamma_s, \gamma_l)^p, \tag{4.53}$$

$$h_{01}^{sl} = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{p=0}^{n} (\gamma_s, \gamma_l + \beta\delta_l)^p \bigg|_{\beta=0} = (\gamma_s, \delta_l) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p, \tag{4.54}$$

$$h_{10}^{sl} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{p=0}^{n} (\gamma_s + \alpha\delta_s, \gamma_l)^p \bigg|_{\alpha=0} = (\gamma_l, \delta_s) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p, \tag{4.55}$$

$$h_{11}^{sl} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_s+\alpha\delta_s,\gamma_l+\beta\delta_l)^p\Big|_{\alpha=\beta=0} =$$

$$= (\delta_s,\delta_l)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\gamma_s,\gamma_l)^p + (\delta_s,\gamma_l)(\delta_l,\gamma_s)\sum_{p=2}^{n}p(p-1)(\gamma_s,\gamma_l)^{p-2}. \quad (4.56)$$

Використовуючи рівності (4.53) – (4.56), матрицю H представимо як $H = AA'$, де

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & y_1 & \sqrt{2}x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 0 & v_1 & h_1 & \sqrt{2}(x_1v_1+y_1h_1) & 2x_1h_1 & 2y_1v_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_m & y_m & \sqrt{2}x_my_m & x_m^2 & y_m^2 \\ 0 & v_m & h_m & \sqrt{2}(x_mv_m+y_mh_m) & 2x_mh_m & 2y_mv_m \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \sqrt{3}x_1^2y_1 & \sqrt{3}x_1y_1^2 & x_1^3 & y_1^3 & \cdots & y_1^n \\ \sqrt{3}x_1(2y_1v_1+x_1h_1) & \sqrt{3}y_1(2x_1v_1+y_1h_1) & 3x_1^2v_1 & 3y_1^2h_1 & \cdots & C_n^1y_1^{n-1}v_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \sqrt{3}x_m^2y_m & \sqrt{3}x_my_m^2 & x_m^3 & y_m^3 & \cdots & y_m^n \\ \sqrt{3}x_m(2y_mv_m+x_mh_m) & \sqrt{3}y_m(2x_mv_m+y_mh_m) & 3x_m^2v_m & 3y_m^2v_m & \cdots & C_n^1y_m^{n-1}v_m \end{matrix} \right\| \quad (4.57)$$

Позначимо

$$\vec{\psi}_{2i-1} = (1, x_i, y_i, \sqrt{2}x_iy_i, x_i^2, y_i^2, \sqrt{3}x_i^2y_i, \sqrt{3}x_iy_i^2, x_i^3, y_i^3, \cdots, y_i^n), \quad (4.58)$$

$$\vec{\psi}_{2i} = (0, v_i, h_i, \sqrt{2}(x_iv_i+y_ih_i), 2x_ih_i, 2y_iv_i,$$

$$\sqrt{3}x_i(2y_iv_i+x_ih_i), \sqrt{3}y_i(2x_iv_i+y_ih_i), 3x_i^2v_i, 3y_i^2v_i\cdots, C_n^1y_i^{n-1}v_i), \quad (4.59)$$

де $i \in \mathbb{N}$. Враховуючи введені позначення (4.58), (4.59), матрицю H можна представити у вигляді

$$H = \begin{pmatrix} (\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_1) & \cdots & (\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_{2m}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{\psi}_{2m}, \vec{\psi}_1) & \cdots & (\vec{\psi}_{2m}, \vec{\psi}_{2m}) \end{pmatrix}, 2m \leq p. \tag{4.60}$$

Отже, матриця H є матрицею Грама. Зауважимо, що таку матрицю розглянуто для нескінченновимірного гільбертового простору в роботі [218]. Матриця H буде невиродженою, якщо обрати вектори $\vec{\psi}_i,\ i = \overline{1, 2m}$, $2m \leq p$ лінійно незалежними, тобто в цьому випадку $H^+ = H^{-1}$. На підставі (4.49) умови розв'язуваності задачі (4.52) набувають вигляду

$$(E - HH^{-1})\vec{f}_H = \vec{0},$$

тобто виконуються для будь-яких значень функції $f(\gamma_i),\ i = \overline{1, 2m}$, та її диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i,\ i = \overline{1, m},\ 2m \leq p$. Це означає, що інтерполяційна задача Ерміта (4.52) є інваріантно розв'язною, а її розв'язок мінімальної норми можна записати так:

$$P_n(\gamma) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(\gamma) \right\rangle, \tag{4.61}$$

де

$$\vec{f}_H = \begin{Bmatrix} f(\gamma_i) \\ f'(\gamma_i)\delta_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{m}, \quad \vec{g}_H(\gamma) = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i, \gamma)^p \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i + \alpha\delta_i, \gamma)^p \Bigg|_{\alpha=0} \end{Bmatrix}_{i=1}^{m} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i, \gamma)^p \\ (\delta_i, \gamma) \sum\limits_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_i, \gamma)^p \end{Bmatrix}_{i=1}^{m}. \tag{4.62}$$

Тоді для інтерполяційного полінома мінімальної норми (4.61) одержимо таку формулу:

$$P_n(x,y) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{p=0}^{n} (x_i x + y_i y)^p \\ (v_i x + h_i y) \sum\limits_{p=0}^{n-1} (p+1)(x_i x + y_i y)^p \end{array} \right\}_{i=1}^{m} \right\rangle . \qquad (4.63)$$

Отже, якщо вузли інтерполювання $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1,m}$, та напрямки диференціалів Гато $\delta_i = (v_i, h_i)$, $i = \overline{1,m}$, $2m \leq p$ обрати так, щоб система векторів (4.58), (4.59) була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (4.52) буде інваріантно розв'язною та матиме єдиний розв'язок мінімальної норми у випадку недовизначеності вихідних даних, тобто коли кількість інтерполяційних умов $2m$ є меншою ніж розмірність простору поліномів степеня n у просторі E_2, $2m \leq \dfrac{(n+1)(n+2)}{4}$ [203]. Справджується теорема:

Теорема 4.7. *Нехай функція* $f : E_2 \to R_1$ *задана своїми значеннями* $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, *та значеннями перших диференціалів Гато* $f'(\gamma_i)\delta_i$, $i = \overline{1,m}$. *Якщо вузли інтерполювання* γ_i, $i = \overline{1,m}$, *та напрямки перших диференціалів Гато* δ_i, $i = \overline{1,m}$, *у* (4.52) *обрати так, щоб система векторів* (4.58), (4.59) *була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта* (4.52) *для функції двох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми, що визначається формулою* (4.63) *у випадку, коли* $2m \leq p$, *де* $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ *— розмірність простору поліномів другого степеня в* E_2.

Результати теореми 4.7 можна узагальнити для функцій багатьох змінних. Нехай E_k — k-вимірний евклідів простір,

$$\gamma = (x_1, x_2, \ldots, x_k),\ \gamma_i = (x_{1_i}, x_{2_i}, \ldots, x_{k_i}),\ \delta_i = (h_{1_i}, h_{2_i}, \ldots, h_{k_i}) \in E_k,$$

Π_{kn} — простір поліномів k змінних степеня n, розмірність простору Π_{kn} дорівнює $p = \dfrac{(n+k)!}{n!k!}$. Функція $f : E_k \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i),\ i = \overline{1, 2m}$, та значеннями похідних Гато першого порядку $f'(\gamma_i)\delta_i,\ i = \overline{1, m}$. У цьому випадку система векторів (4.58), (4.59) для $i = \overline{1, m}$, набуває вигляду

$$\vec{\psi}_{2i-1} = \left\{ \left(\frac{j!}{j_1! j_2! \cdots j_k!} \right)^{\frac{1}{2}} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \cdots x_{i_k}^{j_k},\ j_1 + j_2 + \cdots + j_k = j,\ 0! = 1 \right\}_{j=0}^{n}, \tag{4.64}$$

$$\vec{\psi}_{2i} = (0, h_{1_i}, \ldots, h_{k_i}, \sqrt{2}(x_{1_i} h_{2_i} + x_{2_i} h_{1_i}), \ldots, \sqrt{2}(x_{(k-1)_i} h_{k_i} + x_{k_i} h_{(k-1)_i}, 2x_{1_i} h_{1_i}, \ldots,$$

$$2x_{k_i} h_{k_i}, \sqrt{3} x_{1_i} (2x_{2_i} h_{1_i} + x_{1_i} h_{2_i}), \ldots, \sqrt{3} x_{(k-1)_i} (2x_{k_i} h_{(k-1)_i} + x_{(k-1)_i} h_{k_i}, \tag{4.65}$$

$$3x_{1_i}^2 h_{1_i}, \ldots, 3x_{k_i}^2 h_{k_i}, \ldots, C_n^1 x_{k_i}^{n-1} h_{k_i}),\ i \in \mathbb{N},$$

матриця H визначається на підставі рівності $H = A'A$, де

$$A = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & x_{1_1} & \cdots & x_{k_1} & \sqrt{2} x_{1_1} x_{2_1} & \cdots & x_{1_1}^2 & \cdots \\ 0 & h_{1_1} & \cdots & h_{k_1} & \sqrt{2}(x_{1_1} h_{2_1} + x_{2_1} h_{1_1}) & \cdots & 2x_{1_1}^2 h_{1_1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{1_m} & \cdots & x_{k_m} & \sqrt{2} x_{1_m} x_{2_m} & \cdots & x_{1_m}^2 & \cdots \\ 0 & h_{1_m} & \cdots & h_{k_m} & \sqrt{2}(x_{1_m} h_{2_m} + x_{2_m} h_{1_m}) & \cdots & 2x_{1_m}^2 h_{1_m} & \cdots \end{array} \right\|$$

$$\left.\begin{matrix} x_{k_1}^2 & \sqrt{3}x_{1_1}^2 x_{2_1} & \cdots & x_{1_1}^3 & \cdots & x_{k_1}^n \\ 2x_{k_1}^2 h_{k_1} & \sqrt{3}x_{1_1}(2x_{2_1}h_{1_1} + x_{1_1}h_{2_1}) & \cdots & 3x_{1_1}^2 h_{1_1} & \cdots & C_n^1 x_{k_1}^{n-1} h_{k_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k_m}^2 & \sqrt{3}x_{1_m}^2 x_{2_m} & \cdots & x_{1_m}^3 & \cdots & x_{k_m}^n \\ 2x_{k_m}^2 h_{k_m} & \sqrt{3}x_{1_m}(2x_{2_m}h_{1_m} + x_{1_m}h_{2_m}) & \cdots & 3x_{1_m}^2 h_{1_m} & \cdots & C_n^1 x_{k_m}^{n-1} h_{k_m} \end{matrix}\right\|,$$

а інтерполяційний поліном мінімальної норми (4.61), що є розв'язком задачі Ерміта (4.52) у просторі E_k можна записати у такому вигляді

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(x_1, x_2, \ldots, x_k) \right\rangle, \tag{4.66}$$

де

$$\vec{g}_H(x_1, \ldots, x_k) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{p=0}^{n} (x_1 x_{1_i} + \cdots + x_k x_{k_i})^p \\ (x_1 h_{1_i} + \cdots + x_k h_{k_i}) \sum\limits_{p=0}^{n-1} (p+1)(x_1 x_{1_i} + \cdots + x_k x_{k_i})^p \end{matrix} \right\}_{i=1}^{m}.$$

Таким чином, узагальнення теореми 4.7 для багатовимірного евклідового простору E_k сформулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема 4.8. *Нехай функція* $f : E_k \to R_1$ *задана своїми значеннями* $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, *та значеннями перших диференціалів Гато* $f'(\gamma_i)\delta_i$, $i = \overline{1,m}$. *Якщо вузли інтерполювання* γ_i $i = \overline{1,m}$, *та напрямки перших диференціалів Гато* δ_i, $i = \overline{1,m}$, *у* (4.52) *обрати так, щоб система векторів* (4.64), (4.65) *була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта* (4.52) *для функції багатьох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми* (4.66) *на просторі* Π_{kn} *у випадку, коли* $2m \le p$, *де* p — *розмірність простору* Π_{kn}.

Нехай виконуються умови теореми 4.8. Розглянемо розв'язок інтерполяційної задачі Ерміта (4.52) у вигляді інтерполянта мінімальної норми (4.61). Подамо його у вигляді:

$$P_n(\gamma) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(\gamma) \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} (f(\gamma_i) l_{2i-1}(\gamma) + f'(\gamma_i) l_{2i}(\gamma)), \tag{4.67}$$

де

$$\vec{l}(\gamma) = \left\| \begin{matrix} l_{2i-1}(\gamma) \\ l_{2i}(\gamma) \end{matrix} \right\|_{i=1}^{m} = H^{-1} g_H(\gamma). \tag{4.68}$$

Покажемо, що елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$ є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта (4.52) у просторі E_k, тобто

$$l_{2i}(\gamma_k) = \delta_{ik}, \;\; l_{2i-1}(\gamma_k) = 0, \tag{4.69}$$

$$l'_{2i-1}(\gamma_k)\delta_k = 0, \;\; l'_{2i}(\gamma_k)\delta_k = \delta_{ik} \; i,k = \overline{1,m}, \tag{4.70}$$

δ_{ik} — символ Кронекера. Для цього знайдемо значення $\vec{l}(\gamma_j), \; j = \overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції та значення перших диференціалів Гато $\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j, \; j = \overline{1,m}$, у цих вузлах. Нехай вектори $\vec{e}_{2i-1}, \vec{e}_{2i}$ складаються з нулів, а компоненти цих векторів з індексами $2i-1$ та $2i$ відповідно дорівнюють одиниці. Враховуючи вигляд вектора $\vec{g}_H(\gamma)$, що визначається формулою (4.62), та матриці H, елементи якої мають вигляд (4.53) – (4.56), одержимо

$$\vec{l}(\gamma_j) = H^{-1}\vec{g}_H(\gamma_j) = H^{-1} \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i, \gamma_j)^p \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i + \alpha\delta_i, \gamma_j)^p \Big|_{\alpha=0} \end{matrix} \right\}_{i=1}^{m} =$$

$$= H^{-1} H \vec{e}_{2j-1} = \vec{e}_{2j-1}, \;\; j = \overline{1,m}.$$

Це означає, що виконується рівність (4.69). Аналогічно знайдемо $\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j,\ j=\overline{1,m}$:

$$\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j = H^{-1}\vec{g}'_H(\gamma_j)\delta_j = H^{-1}\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma_i,\gamma_j+\beta\delta_j)^p\Big|_{\beta=0} \\ \displaystyle\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i+\alpha\delta_i,\gamma_j+\beta\delta_j)^p\Big|_{\alpha=\beta=0}\end{array}\right\}_{i=1}^{m} =$$

$$= H^{-1}H\vec{e}_{2j} = \vec{e}_{2j},\quad j=\overline{1,m}.$$

Отримали, що (4.70) також виконується. Отже, довели наступну теорему.

Теорема 4.9. *Нехай виконуються умови теореми 4.8. Тоді елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$, що визначаються формулою (4.68), є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта (4.52) у скінченновимірному евклідовому просторі E_k.*

Приклад 4.1. *Побудуємо інтерполяційний поліном мінімальної норми $P_2(\gamma)=P_2(x,y)$ другого степеня на підставі формули (4.61). У просторі E_2 розмірність простору поліномів другого степеня $p=6$. Отже, на підставі результатів [8] для розв'язання цієї інтерполяційної задачі потрібно, щоб кількість інтерполяційних умов дорівнювала p. За теоремою 4.7 можна обрати меншу кількість умов (4.52). Нехай $\gamma_1=(1,0),\ \gamma_2=(1,2)$ — вузли інтерполювання, $\delta_1=(1,0),\ \delta_2=(0,1)$ — напрямки перших диференціалів Гато. За такого вибору напрямків диференціалів Гато маємо*

$$f'(\gamma_1)\delta_1=\frac{\partial f(\gamma_1)}{\partial x},\ f'(\gamma_2)\delta_1=\frac{\partial f(\gamma_2)}{\partial y},$$

отже, інтерполяційні умови (4.52) набувають вигляду:

$$f(\gamma_i)=P_2(\gamma_i),\ i=1,2,\frac{\partial f(\gamma_1)}{\partial x}=\frac{\partial P_2(\gamma_1)}{\partial x},\frac{\partial f(\gamma_2)}{\partial y}=\frac{\partial P_2(\gamma_2)}{\partial y}.$$

Вектори $\vec{\psi}_i, i = \overline{1, 2m}$*, на підставі формул* (4.58), (4.59) *матимуть такий вигляд*

$$\vec{\psi}_1 = (1, 1, 0, 0, 1, 0), \quad \vec{\psi}_2 = (0, 1, 0, 0, 2, 0),$$

$$\vec{\psi}_3 = (1, 1, 2, 2\sqrt{2}, 1, 4), \quad \vec{\psi}_4 = (0, 0, 1, \sqrt{2}, 0, 4).$$

Система векторів $\{\vec{\psi}\}_{i=1}^{4}$ *є лінійно незалежною, а тому матриця Грама* H*, що визначається за формулою* (4.60)*, є невиродженою та*

$$H = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 31 & 22 \\ 0 & 0 & 22 & 19 \end{Vmatrix}, \; H^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{59}{48} & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{48} & \frac{11}{24} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{19}{48} & 0 & \frac{19}{48} & -\frac{11}{24} \\ \frac{11}{24} & 0 & -\frac{11}{24} & \frac{7}{12} \end{Vmatrix},$$

$$g_H(x, y) = \begin{Vmatrix} 1 + x + x^2 \\ x(1 + 2x) \\ 1 + (x + 2y) + (x + 2y)^2 \\ y(1 + 2(x + 2y)) \end{Vmatrix}.$$

Тоді інтерполяційний поліном мінімальної норми (4.61) *запишеться таким чином:*

$$P_n(x, y) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(x, y) \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i) l_i(x, y),$$

де

$$l_1(x, y) = \frac{1}{6}(5 + 2x - 2y - x^2\frac{3}{2}y^2 - 4xy), \;\; l_2(x, y) = \frac{1}{2}(-1 + x^2), \tag{4.71}$$

$$l_3(x, y) = \frac{1}{12}(4y - 3y^2 + 8xy), \;\; l_4(x, y) = -\frac{1}{6}(2y + 4xy + 3y^2) \tag{4.72}$$

є фундаментальними поліномами задачі Ерміта. Дійсно, як неважко бачити, поліноми (4.71), (4.72) *відповідають таким співвідношенням:*

$$l_{2i-1}(x_k, y_k) = \delta_{ik},\ l_{2i}(x_k, y_k) = 0,\ i = 1, 2,\ k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial x}(x_1, y_1) = \begin{cases} 1, i = 2 \\ 0, i = 1, 3, 4 \end{cases}, \quad \frac{\partial l_i}{\partial y}(x_2, y_2) = \begin{cases} 1, i = 4 \\ 0, i = \overline{1, 3} \end{cases},$$

тобто рівності (4.68), (4.69) *виконуються.*

Отже, у прикладі 4.1 побудовано інтерполяційний поліном мінімальної норми для $m = 4$, $p = 6$, $m < p$. Поставлена задача відповідно до рівності (4.49) має розв'язок для будь-яких значень функції у вузлах інтерполювання та значень перших диференціалів Гато у цих вузлах. Це означає, що вона є інваріантно розв'язною.

Зважаючи на викладене, доходимо до висновку, що в умовах недовизначеності, тобто коли кількість інтерполяційних умов (4.52) є меншою ніж розмірність простору поліномів степеня n у просторі E_k: $2m \le p, p = \frac{(n+k)!}{n!k!}$, у разі виконання умов теореми 4.7 (теореми 4.8) для інтерполяційної задачі Ерміта (4.52) існує єдиний розв'язок мінімальної норми для функції двох (багатьох) змінних, при цьому задача є інваріантно розв'язною.

4.3.2 Інтерполяційна задача Ерміта у випадку коли задані перші та другі диференціали Гато

Для побудови інтерполяційного полінома для функцій багатьох змінних у разі використання класичних інтерполяційних формул [8] можна застосувати такий підхід: спочатку будують інтерполянт степеня n за однією змінною, а решту змінних фіксують, далі у цей спосіб застосовують інтерполяційні формули за кожною змінною. В результаті у просторі E_k

одержимо інтерполяційний поліном степеня kn. Для єдиності розв'язку є необхідним виконання умови $m = \dfrac{(n+k)!}{n!k!}$, де m — число вузлів інтерполювання. При цьому виникають складнощі під час вибору вузлів інтерполяції. На відміну від класичних інтерполяційних формул [8] інтерполянти, що розглядаються в дисертаційній роботі мають степінь n.

У даному підрозділі в скінченновимірному евклідовому просторі розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта в умовах недовизначеності, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато першого та другого порядку у вузлах інтерполяції в умовах недовизначеності.

Нехай $X,\ Y$ — гільбертові простори (X — сепарабельний), B — кореляційний оператор міри μ на X, $KerB = \emptyset$, міра μ має перший момент, що дорівнює нулю, а другий є обмеженим, $B(u,v)$ — кореляційний оператор цієї міри відповідно, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі X. Уведемо множину Π_n неперервних на X операторних поліномів степеня n вигляду (4.1).

Оператор $F : X \to Y$ (у загальному випадку нелінійний) заданий своїми значеннями $F(Bx_j),\ j = \overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато

$$F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)}\dots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0,k_j},\ j = \overline{1,m},$$

$$Bx_j, Bv_{ji}^{(i)} \in X,\ i = \overline{0,k_j},\ j = \overline{1,m}.$$

Для оператора $F(x)$ потрібно побудувати такий поліном $P_n(x) \in \Pi_n$, що задовольняє інтерполяційні умови (4.45).

Позначимо Π_n^{IH} множину операторних інтерполяційних поліномів n-го степеня типу Ерміта. У розділі 4.3.1 показано, що у просторі E_k за оператор B можна обрати одиничний I. Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо евклідів простір E_2 з гаусовою мірою μ. Нехай p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\gamma = (x, y)$, Нехай функція $f : E_2 \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i), i = \overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції $\gamma_i = (x_i, y_i), i = \overline{1,m}$, та значеннями похідних Гато першого та другого порядків $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i = \overline{1,m}$, у цих вузлах за напрямками

$$\delta_i^1 = (v_i, h_i), \delta_{i1}^2 = (z_{i1}^1, z_{i2}^1), \delta_{i2}^2 = (z_{i1}^2, z_{i2}^2),\ i = \overline{1,m},\ 3m \le p.$$

Потрібно знайти такий поліном $P_n(\gamma)$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n(\gamma_j) = f(\gamma_j),$$

$$P_n'(\gamma_j)\delta_j^1 = f'(\gamma_j)\delta_j^1, \tag{4.73}$$

$$P_n^{(2)}(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2 = f^{(2)}(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2,\ j = \overline{1,m}.$$

На підставі теореми 4.2 розв'язком задачі (4.73) є поліном мінімальної норми (4.13), при цьому матриця H (4.47), (4.48) набуває вигляду

$$H = \|H^{sl}\|_{l=\overline{1,m},\ s=\overline{1,m}},\ H^{sl} = \|h_{ij}^{sl}\|_{i=\overline{0,k_i},j=\overline{0,k_j}},$$

де

$$h_{00}^{sl} = g(\gamma_s, \gamma_l), h_{01}^{sl} = \frac{\partial}{\partial\beta_1} g(\gamma_s, \gamma_l + \beta_1\delta_l^1)|_{\beta_1=0},$$

$$h_{02}^{sl} = \frac{\partial^2}{\partial\beta_1\partial\beta_2} g(\gamma_s, \gamma_l + \sum_{i=1}^{2}\beta_i\delta_{li}^2)|_{\beta_1=\beta_2=0},$$

$$h_{10}^{sl} = \frac{\partial}{\partial\alpha_1} g(\gamma_s + \alpha_1\delta_s^1, \gamma_l)|_{\alpha_1=0}, h_{11}^{sl} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_1} g(\gamma_s + \alpha_1\delta_s^1, \gamma_l + \beta_1\delta_l^1)|_{\alpha_1=\beta_1=0},$$

$$h_{12}^{sl} = \frac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\beta_1\partial\beta_2} g(\gamma_s + \alpha_1\delta_s^1, \gamma_l + \sum_{i=1}^{2}\beta_i\delta_{li}^2)|_{\alpha_1=\beta_1=\beta_2=0},$$

$$h_{20}^{sl} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} g(\gamma_s + \sum_{i=2}^{2}\alpha_i\delta_{si}^2, \gamma_l)|_{\alpha_1=\alpha_2=0},$$

$$h_{21}^{sl} = \frac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\beta_1} g(\gamma_s + \sum_{i=2}^{2}\alpha_i\delta_{si}^2, \gamma_l + \beta_1\delta_l^1)|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=0},$$

$$h_{22}^{sl} = \frac{\partial^4}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\beta_1\partial\beta_2} g(\gamma_s + \sum_{i=2}^{2}\alpha_i\delta_{si}^2, \gamma_l + \sum_{i=1}^{2}\beta_i\delta_{li}^2)|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0},$$

$$g(u,v) = \sum_{p=0}^{n}(u,v)^p, \quad u,v \in X, 0^0 = 1.$$

Позначимо:

$$\vec{f}_H = \left\{\begin{matrix} f(\gamma_i) \\ f'(\gamma_i)\delta_i^1 \\ f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2 \end{matrix}\right\}_{i=1}^{m},$$

$$\vec{g}_H(\gamma) = \left\{\begin{matrix} \sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma)^p \\ \dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i + \alpha_1\delta_i^1, \gamma)^p\Bigg|_{\alpha_1=0} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i + \sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i\delta_{i2}^2, \gamma)^p\Bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=0} \end{matrix}\right\}_{i=1}^{m} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma)^p \\ (\delta_i^1,\gamma)\sum\limits_{p=0}^{n-1}(p+1)(\gamma_i,\gamma)^p \\ (\delta_{i1}^2,\gamma)(\delta_{i2}^2,\gamma)\sum\limits_{p=2}^{n}\dfrac{p!}{(p-2)!}(\gamma_i,\gamma)^{p-2} \end{matrix}\right\}_{i=1}^{m}. \tag{4.74}$$

Доведемо таку теорему [204].

Теорема 4.10. *Нехай функція* $f : E_2 \to R_1$ *задана своїми значеннями* $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, *та значеннями перших та других диференціалів Гато* $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i = \overline{1,m}$. *Якщо вузли інтерполювання* γ_i, $i = \overline{1,m}$, *та напрямки перших та других диференціалів Гато* $\delta_i^1 = (v_i, h_i), \delta_{i1}^2 = (z_{i1}^1, z_{i2}^1), \delta_{i2}^2 = (z_{i1}^2, z_{i2}^2)$, $i = \overline{1,m}$, *у* (4.73) *обрати так, щоб система векторів*

$$\vec{\psi}_{3i-2} = (1, x_i, y_i, x_i^2, \sqrt{2}x_iy_i, y_i^2, x_i^3, \sqrt{3}x_i^2y_i, \sqrt{3}x_iy_i^2, y_i^3, \cdots, y_i^n),$$

$$\vec{\psi}_{3i-1} = (0, v_i, h_i, 2x_ih_i, \sqrt{2}(x_iv_i + y_ih_i), 2y_iv_i, 3x_i^2v_i,$$

$$\sqrt{3}x_i(2y_iv_i + x_ih_i), \sqrt{3}y_i(2x_iv_i + y_ih_i), 3y_i^2v_i \cdots, C_n^1y_i^{n-1}v_i), \tag{4.75}$$

$$\vec{\psi}_{3i} = (0, 0, 0, 2z_{i1}^1z_{i2}^2, \sqrt{2}(z_{i1}^1z_{i2}^2 + z_{i2}^1z_{i1}^2), 2z_{i2}^1z_{i1}^2, 3x_iz_{i1}^1z_{i2}^2,$$

$$\sqrt{3}(x_i(z_{i1}^1z_{i2}^2 + z_{i2}^1z_{i1}^2) + y_iz_{i1}^1z_{i2}^2), \sqrt{3}(y_i(z_{i1}^1z_{i2}^2 + z_{i2}^1z_{i1}^2) + x_iz_{i2}^1z_{i2}^2),$$

$$\cdots, C_n^1y_i^{n-2}z_{i2}^1z_{i2}^2), \quad i = \overline{1,m},$$

була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (4.73) *для функції двох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми, що визначається формулою*

$$P_n(\gamma) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(\gamma) \right\rangle \tag{4.76}$$

у випадку, коли $3m \le p$, *де* $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ *— розмірність простору поліномів другого степеня в* E_2.

Доведення. Обчислимо елементи матриці

$$H = \|H^{sl}\|_{l=\overline{1,m},\ s=\overline{1,m}}, \quad H^{sl} = \|h_{ij}^{sl}\|_{i=\overline{0,2},j=\overline{0,2}}.$$

Отримаємо:

$$h_{00}^{sl} = \sum_{p=0}^{n} (\gamma_s, \gamma_l)^p,\ h_{01}^{sl} = (\gamma_s, \delta_l) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p, \tag{4.77}$$

$$h_{02}^{sl} = (\gamma_s, \delta_{l1}^2)(\gamma_s, \delta_{l2}^2) \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(p-2)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{4.78}$$

$$h_{10}^{sl} = (\gamma_l, \delta_s) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p, \tag{4.79}$$

$$h_{11}^{sl} = (\delta_s, \delta_l) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p + (\delta_s, \gamma_l)(\delta_l, \gamma_s) \sum_{p=2}^{n} p(p-1)(\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{4.80}$$

$$h_{12}^{sl} = (\gamma_s, \delta_{l2}^2)(\delta_s^1, \gamma_l)(\gamma_s, \delta_{l1}^2) \sum_{p=3}^{n} \frac{p!}{(p-3)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-3} +$$

$$+((\delta_s^1, \delta_{l1}^2) + (\gamma_s, \delta_{l1}^2)) \sum_{p=2}^{n} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{4.81}$$

$$h_{20}^{sl} = (\delta_{s1}^2, \gamma_l)(\delta_{s2}^2, \gamma_l) \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(p-2)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{4.82}$$

$$h_{21}^{sl} = (\gamma_l, \delta_{s2}^2)(\delta_l^1, \gamma_s)(\gamma_l, \delta_{s1}^2) \sum_{p=3}^{n} \frac{p!}{(p-3)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-3} +$$

$$+((\delta_l^1, \delta_{s1}^2) + (\gamma_l, \delta_{s1}^2)) \sum_{p=2}^{n} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{4.83}$$

$$h_{22}^{sl} = ((\delta_{s1}^2, \delta_{l1}^2)(\delta_{s2}^2, \delta_{l2}^2) + (\delta_{s1}^2, \delta_{l2}^2)(\delta_{s2}^2, \delta_{l1}^2)) \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(p-2)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-3} +$$

$$+((\delta_{s1}^2,\delta_{l1}^2)(\delta_{s2}^2,\gamma_l)(\gamma_s,\delta_{l2}^2)+(\delta_{s2}^2,\delta_{l2}^2)(\gamma_s,\delta_{l1}^2)(\delta_{s1}^2,\gamma_l)+ \tag{4.84}$$

$$+(\delta_{s1}^2,\delta_{l2}^2)(\delta_{s2}^2,\gamma_l)(\gamma_s,\delta_{l1}^2)+(\delta_{s2}^2,\delta_{l1}^2)(\delta_{s1}^2,\gamma_l)(\gamma_s,\delta_{l2}^2))\sum_{p=3}^{n}\frac{p!}{(p-3)!}(\gamma_s,\gamma_l)^{p-3}.$$

Використовуючи рівності (4.77) – (4.84), матрицю H представимо як $H = AA'$, де $A = \|A_i\|_{i=\overline{1,m}}$,

$$A_i = \left\| \begin{matrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & \sqrt{2}x_iy_i & y_i^2 & x_i^3 \\ 0 & v_i & h_i & 2x_ih_i & \sqrt{2}(x_iv_i+y_ih_i) & 2y_iv_i & 3x_i^2v_i \\ 0 & 0 & 0 & 2z_{i1}^1z_{i2}^2 & \sqrt{2}(z_{i1}^1z_{i2}^2+z_{i2}^1z_{i1}^2) & 2z_{i2}^1z_{i1}^2 & 3x_iz_{i1}^1z_{i2}^2 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{3}x_i^2y_i & \sqrt{3}x_iy_i^2 & y_i^3 & \cdots \\ \sqrt{3}x_i(2y_iv_i+x_ih_i) & \sqrt{3}y_i(2x_iv_i+y_ih_i) & 3y_i^2h_i & \cdots \\ \sqrt{3}(x_i(z_{i1}^1z_{i2}^2+z_{i2}^1z_{i1}^2)+y_iz_{i1}^1z_{i2}^2) & \sqrt{3}(y_i(z_{i1}^1z_{i2}^2+z_{i2}^1z_{i1}^2)+x_iz_{i2}^1z_{i2}^2) & 3y_iz_{i2}^1z_{i1}^2 & \cdots \end{matrix}\right\|.$$

Враховуючи систему векторів (4.75), матрицю H можна надати у вигляді

$$H = \begin{pmatrix} (\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_1) & \cdots & (\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_{2m}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{\psi}_{2m},\vec{\psi}_1) & \cdots & (\vec{\psi}_{2m},\vec{\psi}_{2m}) \end{pmatrix}, 3m \le p. \tag{4.85}$$

Отже, матриця H є матрицею Грама. Матриця H буде невиродженою, якщо система векторів $\vec{\psi}_i,\ i=\overline{1,3m}$, $3m \le p$ є лінійно незалежною, тобто в цьому випадку $H^+ = H^{-1}$. З урахуванням формули (4.49) умови існування розв'язку інтерполяційної задачі Ерміта (4.73) набувають вигляду $(E - HH^{-1})\vec{f}_H = \vec{0}$, тобто виконуються для будь-яких значень функції $f(\gamma_i),\ i = \overline{1,2m}$, та її диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i^1,\ f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2,\ i=\overline{1,m},\ 3m \le p$. Це означає, що інтерполяційна задача Ерміта (4.73) є інваріантно розв'язною, а її розв'язок мінімальної норми (4.76) можна записати так:

$$P_n(x,y)=\left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\left\{\begin{matrix}\sum\limits_{p=0}^{n}(x_ix+y_iy)^p\\ (v_ix+h_iy)\sum\limits_{p=0}^{n-1}(p+1)(x_ix+y_iy)^p\\ \prod\limits_{k=1}^{2}(z_{i1}^kx+z_{i2}^ky)\sum\limits_{p=2}^{n}\frac{p!}{(p-2)!}(x_ix+y_iy)^{p-2}\end{matrix}\right\}_{i=1}^{m}\right\rangle.$$

Теорему доведено. □

Результати теореми 4.10 можна узагальнити для функцій багатьох змінних. Нехай E_k — k-вимірний евклідів простір,

$$\gamma=(x_1,x_2,\ldots,x_k),\ \gamma_i=(x_{1_i},x_{2_i},\ldots,x_{k_i}),\ \delta_i^1=(h_{1_i},h_{2_i},\ldots,h_{k_i})\in E_k,$$

$$\delta_{i1}^2=(z_{i1}^1,z_{i2}^1,\ldots,z_{ik}^1),\delta_{i2}^2=(z_{i1}^2,z_{i2}^2,\ldots,z_{ik}^2)\in E_k,$$

Π_{kn} — простір поліномів k змінних степеня n, розмірність простору Π_{kn} дорівнює $p=\dfrac{(n+k)!}{n!k!}$.

Функція $f:E_k\to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,2m}$, та значеннями диференціалів Гато першого та другого порядку $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i=\overline{1,m}$. У цьому випадку система векторів (4.75) набуває вигляду

$$\vec{\psi}_{3i-2}=\left\{\left(\frac{j!}{j_1!j_2!\cdots j_k!}\right)^{\frac{1}{2}}x_{i_1}^{j_1}x_{i_2}^{j_2}\cdots x_{i_k}^{j_k},\ j_1+j_2+\cdots+j_k=j,\ 0!=1\right\}_{j=0}^{n},$$

$$\vec{\psi}_{3i-1}=(0,h_{1_i},\ldots,h_{k_i},2x_{1_i}h_{1_i},\ldots,2x_{k_i}h_{k_i}\sqrt{2}(x_{1_i}h_{2_i}+x_{2_i}h_{1_i}),\ldots,$$

$$\sqrt{2}(x_{(k-1)_i}h_{k_i}+x_{k_i}h_{(k-1)_i}),3x_{1_i}^2h_{1_i},\ldots,3x_{k_i}^2h_{k_i},\sqrt{3}x_{1_i}(2x_{2_i}h_{1_i}+x_{1_i}h_{2_i}),$$

$$\ldots, \sqrt{3}x_{(k-1)_i}(2x_{k_i}h_{(k-1)_i} + x_{(k-1)_i}h_{k_i}), \ldots, C_n^1 x_{k_i}^{n-1}h_{k_i}), \tag{4.86}$$

$$\vec{\psi}_{3i} = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k+1}, 2z_{i1}^1 z_{i2}^2, \ldots, 2z_{ik}^1 z_{i(k-1)}^2, \ldots, \sqrt{2}(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2), \ldots,$$

$$3x_{i_1} z_{i1}^1 z_{i2}^2, \ldots, 3x_{i_k} z_{ik}^1 z_{i(k-1)}^2, \sqrt{3}(x_{1_i}(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2) + x_{2_i} z_{i1}^1 z_{i2}^2), \ldots,$$

$$\ldots, C_n^1 x_{k_i}^{n-2} z_{ik}^1 z_{ik}^2), \; i = \overline{1, m},$$

при цьому матрицю H запишемо у спосіб наведений вище:

$$H = AA', \;\; A = \|A_i\|_{i=1}^3,$$

$$A_i = \begin{Vmatrix} \vec{\psi}_{3i-2} \\ \vec{\psi}_{3i-1} \\ \vec{\psi}_{3i} \end{Vmatrix}.$$

Отже, H можна подати у вигляді (4.85), де вектори $\vec{\psi}_i, \;\; i = \overline{1, m}$, визначаються за допомогою формул (4.86). Інтерполяційний поліном Ерміта мінімальної норми (4.76), що є розв'язком задачі Ерміта (4.73) у просторі E_k можна записати у такому вигляді

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(x_1, x_2, \ldots, x_k) \right\rangle, \tag{4.87}$$

де

$$\vec{g}_H(x_1, \ldots, x_k) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{p=0}^{n} (x_1 x_{1_i} + \cdots + x_k x_{k_i})^p \\ (x_1 h_{1_i} + \cdots + x_k h_{k_i}) \sum\limits_{p=0}^{n-1} (p+1)(x_1 x_{1_i} + \cdots + x_k x_{k_i})^p \\ \prod\limits_{j=1}^{2} (x_1 z_{i1}^j + \cdots + x_k z_{ik}^j) \sum\limits_{p=2}^{n} \frac{p!}{(p-2)!} (x_1 x_{1_i} + \cdots + x_k x_{k_i})^p \end{array} \right\}_{i=1}^{m} . \tag{4.88}$$

Тепер сформулюємо узагальнення теореми 4.10 для багатовимірного евклідового простору E_k.

Теорема 4.11. *Нехай функція* $f : E_k \to R_1$ *задана своїми значеннями* $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, *та значеннями диференціалів Гато* $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i = \overline{1,m}$. *Якщо вузли інтерполювання* γ_i, $i = \overline{1,m}$, *та напрямки перших та других диференціалів Гато* δ_i^1, δ_{i2}^2, δ_{i1}^2, $i = \overline{1,m}$, *у* (4.73) *обрати так, щоб система векторів* (4.86) *була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта* (4.73) *для функції багатьох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми* (4.87) *на просторі* Π_{kn} *у випадку, коли* $3m \le p$, *де* p *— розмірність простору* Π_{kn}.

Розглянемо розв'язок інтерполяційної задачі Ерміта (4.73) у вигляді інтеполянта мінімальної норми (4.76) в евклідовому просторі E_k та подамо його у вигляді

$$P_n(\gamma) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(\gamma) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (f(\gamma_i) l_{0i}(\gamma) + f'(\gamma_i)\delta_i^1 l_{1i}(\gamma) + f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2 l_{2i}(\gamma)). \tag{4.89}$$

Позначимо:

$$\vec{l}(\gamma) = H^{-1} g_H(\gamma) = \left\| \begin{array}{c} l_{0i}(\gamma) \\ l_{1i}(\gamma) \\ l_{2i}(\gamma) \end{array} \right\|_{i=1}^{m} . \tag{4.90}$$

Теорема 4.12. *Нехай виконуються умови теореми 4.11. Тоді елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$, що визначаються формулою* (4.90), *є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта* (4.73) *у скінченновимірному евклідовому просторі E_k.*

Доведення. Покажемо, що елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$ є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта (4.73) у просторі E_k, тобто для його елементів виконуються такі рівності:

$$l_{0i}(\gamma_k) = \delta_{ik}, \;\; l_{1i}(\gamma_k) = 0, \;\; l_{2i}(\gamma_k) = 0, \; i,k = \overline{1,m}, \tag{4.91}$$

$$l'_{0i}(\gamma_k)\delta_k^1 = 0, \;\; l'_{1i}(\gamma_k)\delta_k^1 = \delta_{ik}, \; l'_{2i}(\gamma_k)\delta_k^1 = 0, \; i,k = \overline{1,m}, \tag{4.92}$$

$$l''_{0i}(\gamma_k)\delta_{k2}^2\delta_{k1}^2 = 0, \;\; l''_{1i}(\gamma_k)\delta_{k2}^2\delta_{k1}^2 = 0, \; l''_{2i}(\gamma_k)\delta_{k2}^2\delta_{k1}^2 = \delta_{ik}, \; i,k = \overline{1,m}, \tag{4.93}$$

де δ_{ik} — символ Кронекера.

Для цього знайдемо значення $\vec{l}(\gamma_j)$, $j = \overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції та значення перших та других диференціалів Гато $\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j^1$, $\vec{l}''(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2$ $j = \overline{1,m}$, у цих вузлах. Нехай вектори $\vec{e}_{3i-2}, \vec{e}_{3i-1}, \vec{e}_{3i}$ складаються з нулів, а компоненти цих векторів з індексами $3i-2$, $3i-1$ та $3i$ відповідно дорівнюють одиниці. Враховуючи вигляд вектора $\vec{g}_H(\gamma)$, що визначається формулою (4.88), та матриці H, елементи якої мають вигляд (4.77) – (4.84), одержимо

$$\vec{l}(\gamma_j) = H^{-1}\vec{g}_H(\gamma_j) = H^{-1}\left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma_j)^p \\ \dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i+\alpha_1\delta_i,\gamma_j)^p\Big|_{\alpha_1=0} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i+\sum\limits_{k=1}^{2}\alpha_k\delta_{ik}^2,\gamma_j)^p\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} \end{array}\right\}_{i=1}^{m} =$$

$$= H^{-1}H\vec{e}_{3j-2} = \vec{e}_{3j-2}, \quad j=\overline{1,m}.$$

Це означає, що виконується рівність (4.91). Аналогічно знайдемо $\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j^1,\ j=\overline{1,m}$:

$$\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j^1 = H^{-1}\vec{g}'_H(\gamma_j)\delta_j^1 =$$

$$= H^{-1}\left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(\gamma_i,\gamma_j+\beta_1\delta_j^1)^p\Big|_{\beta_1=0} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}\sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i+\alpha_1\delta_i^1,\gamma_j+\beta_1\delta_j^1)^p\Big|_{\alpha_1=\beta_1=0} \\ \dfrac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\beta_1}\sum\limits_{p=0}^{n}(\gamma_i+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\delta_{ik}^2,\gamma_j+\beta_1\delta_j^1)^p\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=0} \end{array}\right\}_{i=1}^{m} =$$

$$= H^{-1}H\vec{e}_{3j-1} = \vec{e}_{3j-1}, \quad j=\overline{1,m}.$$

тобто рівність (4.92) також виконується. Перевіримо рівність (4.93). Маємо

$$\vec{l}''(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2 = H^{-1}\vec{g}''_H(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2,$$

де вектор

$$\vec{g}''_H(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial \beta_1 \beta_2} (\gamma_i, \gamma_j + \sum_{k=1}^{2} \beta_k \delta_{jk}^2)^p \Big|_{\beta_1=\beta_2=0} \\ \dfrac{\partial^3}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1 \partial \beta_2} \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i + \alpha_1 \delta_i^1, \gamma_j + \sum_{k=1}^{2} \beta_k \delta_{jk}^2)^p \Big|_{\alpha_1=\beta_1=\beta_2=0} \\ \dfrac{\partial^4}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \partial \beta_1 \partial \beta_2} \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \delta_{ik}^2, \gamma_j + \sum_{k=1}^{2} \beta_k \delta_{jk}^2)^p \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0} \end{array} \right\}_{i=1}^{m}.$$

Остаточно отримаємо

$$\vec{l}''(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2 = H^{-1}H\vec{e}_{3j} = \vec{e}_{3j}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Отже, рівність (4.93) виконується. Теорему доведено. □

Зауваження 4.1. *Результати цього підрозділу можна перенести на інтерполяційну задачу Ерміта-Біркхофа, тобто на випадок, коли в умовах* (4.73) *значення деяких диференціалів Гато першого чи другого порядку у вузлах інтерполяції відсутні. Для того, щоб побудувати розв'язок такої задачі, потрібно у матриці H викреслити ті рядки та стовпці, що відповідають диференціалам Гато, які є «пропущеними» в умовах* (4.73)*. Для векторів, наявних у формулі* (4.87)*, виконуємо аналогічні викладки: викреслюємо з них ті елементи, що відповідають пропущеним диференціалам.*

Отже, в цьому підрозділі одержано умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі Ерміта у скінченновимірному евклідовому просторі E_k у випадку, коли задані значення функції та її диференціалів Гато першого та другого порядків у цих вузлах. Показано, вона має єдиний розв'язок мінімальної норми, породженої скалярним добутком із гаусовою мірою у випадку недовизначеності вихідних даних. Доведено, що фундаментальні поліноми інтерполяційної задачі Ерміта (4.73) входять до складу інтерполянта мінімальної норми (4.87).

4.4 Інтерполяційна задача Ерміта-Біркхофа у гільбертовому просторі з мірою

В підрозділі 4.1 побудовано інтерполяційний поліном Ерміта мінімальної норми, що породжена скалярним добутком із гаусовою мірою [27] та показано, що він має властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня В цьому підрозділі розв'язано екстремальну задачу для інтерполяційного полінома Ерміта-Біркхофа та показано, що розв'язок поставленої задачі є єдиним.

Нехай X, Y — гільбертові простори (X — сепарабельний), B — кореляційний оператор міри μ на X, $KerB = \emptyset$, міра μ має перший момент, що дорівнює нулю, а другий є обмеженим. Оператор $F : X \to Y$ (в загальному випадку нелінійний) заданий своїми значеннями $F(Bx_j)$, $\ j = \overline{1,m}$ та значеннями диференціалів Гато $F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \widetilde{0,k_j},\ j = \overline{1,m}$, $Bx_j, Bv_{ji}^{(i)} \in X,\ i = \widetilde{0,k_j},\ j = \overline{1,m}$. Запис $i = \widetilde{0,k_j}$ означає, що існують пропуски певних диференціалів Гато. Розглянемо постановку інтерполяційної задачі Ерміта-Біркхофа: для оператора $F(x)$ потрібно побудувати такий поліном $p(x)$ степеня n, що відповідає інтерполяційним умовам

$$p^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)} = F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)}, i = \widetilde{0,k_j},\ j = \overline{1,m}. \quad (4.94)$$

Нехай Π_n — множина неперервних на X операторних поліномів степеня n, що визначається за формулою (4.1). Введемо на множині Π_n скалярний добуток (2.1) та норму

$$\|P\|_H^2 = (P, P)_H.$$

Позначимо:

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)}, i = \widetilde{0, k_j}\}_{i=1}^{m},$$

$$\vec{q}_H = \{q^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)}, i = \widetilde{0, k_j}\}_{i=1}^{m},$$

$$g^B = g(Bu, v) = \sum_{p=0}^{n}(Bu, v)^p,\ Bu, v \in X.$$

Нехай $H = \|H^{ls}\| = \|h_{ij}^{ls}\|_{i=\widetilde{0,k_i},\ j=\widetilde{0,k_s}}$ – симетрична матриця, де

$$h_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1 \dots \partial\alpha_i \partial\beta_1 \dots \partial\alpha_j} g^B(x_l + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_{ip}^{(i)},$$

$$x_s + \sum_{p=1}^{j} \beta_p v_{sp}^{(i)})|_{\alpha_1=\dots=\alpha_i=\beta_1=\dots=\beta_j=0},$$

де H^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці H [16], Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори матриці H з нульовим власним числом, $A_0 = E - H^+H$ — ідемпотентна матриця, E — одинична матриця. В монографії [218] доведено теорему 4.13:

Теорема 4.13. *Для існування розв'язку інтерполяційної задачі* (4.94) *в гільбертовому просторі необхідно та достатньо виконання умови*

$$Z\vec{F}_H = \vec{0}. \tag{4.95}$$

Якщо ця умова виконується, то формула

$$p(x) = q(x) + \left\langle \vec{F}_H - \vec{q}_H, H^+\vec{g}_H(x) \right\rangle,\ \ q(x) \in \Pi_n \tag{4.96}$$

описує всю множину операторних поліномів Ерміта-Біркхофа n-го степеня, що відповідають інтерполяційним умовам (4.94).

В [218] показано, що умова (4.95) еквівалентна умові (4.49). Подамо $p(x)$, що визначається формулою (4.96), у вигляді

$$p(x) = p_0(x) + q_0(x),$$

де

$$p_0(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \right\rangle, \tag{4.97}$$

$$q_0(x) = q(x) - \left\langle \vec{q}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \right\rangle. \tag{4.98}$$

Теорема 4.14. *Нехай виконується умова* (4.95). *Тоді поліном* $p_0(x)$, *що визначається формулою* (4.97), *є розв'язком екстремальної задачі*

$$\|p_0\| = \underset{q \in \Pi_n}{inf} \|p\| = \left(<< H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H >> \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.99}$$

і цей розв'язок єдиний. Тут p належить множині інтерполяційних поліномів Ерміта-Біркхофа (4.96),

$$<< \vec{a}, \vec{b} >>= \sum_{i=1}^{M} (a_i, b_i)_Y, \ a_i, b_i \in Y, \ \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m), \ \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

M *— кількість інтерполяційних умов* (4.94).

Доведення. Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо випадок, коли задані значення оператора $F(Bx_i)$, $i = \overline{1,m}$ та значення його других диференціалів Гато $F(Bx_i)Bv_{i2}^{(2)}Bv_{i1}^{(2)}$, $i = \overline{1,m}$.

Покажемо, що

$$\vec{q}_0 = \left\{ q(Bx_i), \frac{\partial^2}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} q(Bx_i + \gamma_1 Bv_{i1}^{(2)} + \gamma_2 Bv_{i2}^{(2)})|_{\gamma_1 = \gamma_2 = 0} \right\}_{i=1}^{m} = \vec{0}.$$

Позначимо $\vec{e}_{2k-1}$ — вектор, що складається із нулів, а компонента з індексом $2k-1$ дорівнює одиниці. Маємо

$$q_0(Bx_k) = q(Bx_k) - \left\langle \vec{q}_H, H^+\vec{g}_H(Bx_k)\right\rangle =$$

$$= q(Bx_k) - \left\langle \vec{q}_H, H^+H\vec{e}_{2k-1}\right\rangle = q(Bx_k) - \langle \vec{q}_H, (E - A_0)\vec{e}_{2k-1}\rangle =$$

$$= q(Bx_k) - \langle (E - A_0)\vec{q}_H, \vec{e}_{2k-1}\rangle = q(Bx_k) - q(Bx_k) + \langle A_0\vec{q}_H, \vec{e}_{2k-1}\rangle = 0,$$

оскільки для будь-якого $p \in \Pi_n$ [218]:

$$A_0\vec{p}_H = \vec{0}. \tag{4.100}$$

Позначимо $\vec{e}_{2k}$ — вектор, що складається із нулів, а компонента із індексом $2k$ дорівнює одиниці. Розглянемо $q_0''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)}$:

$$q_0''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} = q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} -$$

$$- \left\langle \vec{q}_H, H^+\frac{\partial^2}{\partial\gamma_1\partial\gamma_2}\vec{g}_H(Bx_k + \gamma_1 Bv_{k1}^{(2)} + \gamma_2 Bv_{k2}^{(2)})|_{\gamma_1=\gamma_2=0}\right\rangle =$$

$$= q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - \left\langle \vec{q}_H, H^+H\vec{e}_{2k}\right\rangle =$$

$$q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - \langle \vec{q}_H, (E - A_0)\vec{e}_{2k}\rangle =$$

$$= q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - \langle (E - A_0)\vec{q}_H, \vec{e}_{2k}\rangle =$$

$$= q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} + \langle A_0\vec{q}_H, \vec{e}_{2k-1}\rangle = 0$$

на підставі рівності (4.100). Одержали, що $\vec{q}_0 = \vec{0}$.

Розглянемо:

$$\|p\|^2 = \|p_0 + q_0\|^2 = \|p_0\|^2 + 2(p_0, q_0) + \|q_0\|^2. \tag{4.101}$$

Нехай $L_k(x, x, \ldots, x)$ — k-та операторна степінь полінома $q_0(x)$, $\vec{z} = H^+\vec{F}_H$, $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{2m})$. В подальших викладках будемо використовувати результат [218]: для p-лінійного оператора $L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p) : X^p \to Y$ має місце рівність

$$\int\limits_X \cdots \int\limits_X \prod_{j=1}^{p}(x_j, v_j)(y, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p))_Y \mu(dv_p) \cdots \mu(dv_1) =$$

$$= (y, L_p(Bx_1, Bx_2, \ldots, Bx_p))_Y, \quad \forall y \in Y. \tag{4.102}$$

Покажемо, що $(p_0, q_0) = 0$. Маємо

$$(p_0, q_0) = \left(\left\langle \vec{F}_H, H^+\vec{g}_H(x)\right\rangle, q_0(x)\right) =$$

$$= \left(\left\langle \vec{F}_H, H^+\left\{g(x_j, x)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}g(x_j + \alpha_1 v_{j1}^{(2)} + \alpha_2 v_{j2}^{(2)}, x)|_{\alpha_1=\alpha_2=0}\right\}_{j=1}^{m}\right\rangle, q_0\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k-1}\sum_{p=0}^{n}(x_k, x)^p, q_0(x)\right) +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}(x_k + \alpha_1 v_{k1}^{(2)} + \alpha_2 v_{k2}^{(2)}, x)^p|_{\alpha_1=\alpha_2=0}, q_0(x)\right). \tag{4.103}$$

Розглянемо перший доданок із останньої рівності. На підставі (4.102) дістанемо:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k-1}\sum_{p=0}^{n}(x_k, x)^p, q_0(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \prod_{j=1}^{p} (x_k, v_i)(z_{2k-1}, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_k))_Y \mu(dv_p) \ldots \mu(dv_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=0}^{n} (z_{2k-1}, L_p(Bx_k, Bx_k, \ldots, Bx_k))_Y =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (z_{2k-1}, q_0(Bx_k))_Y = 0, \tag{4.104}$$

оскільки $q_0(Bx_k) = 0,\ k = \overline{1, m}$. Розглянемо другий доданок в (4.103):

$$\left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} (x_k + \alpha_1 v_{k1}^{(2)} + \alpha_2 v_{k2}^{(2)}, x)^p |_{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}, q_0(x) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=2}^{n} p(p-1)(z_{2k}(x_k, x)^{p-2}(v_{k1}^{(2)}, x)(v_{k2}^{(2)}, x), L_p x^p) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=2}^{n} \frac{p(p-1)}{p!} \int_X \cdots \int_X \left(z_{2k} \frac{\partial^p}{\partial \alpha_1 \ldots \partial \alpha_p} \left(x_k, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i \right)^{p-2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(v_{k1}^{(2)}, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i \right) \left(v_{k2}^{(2)}, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i \right) |_{\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0}, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p) \right)_Y \times$$

$$\times \mu(dv_p) \mu(dv_{p-1}) \ldots \mu(dv_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{(p-2)!} \int_X \cdots \int_X \Big(z_{2k}(p-2)! \Big[(v_{k1}^{(2)}, v_1)(v_{k2}^{(2)}, v_2)(x_k, v_3) \cdots (x_k, v_p) +$$

$$+ (x_k, v_1)(v_{k1}^{(2)}, v_2)(v_{k2}^{(2)}, v_3)(x_k, v_4) \cdots (x_k, v_p) + \cdots +$$

$$+(x_k, v_1)\cdots(x_k, v_{p-2})(v_{k1}^{(2)}, v_{p-1})(v_{k2}^{(2)}, v_p)\Big], L_p(v_1, v_2, \dots, v_p)\Big)_Y \times$$

$$\times\mu(dv_p)\mu(dv_{p-1})\dots\mu(dv_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=2}^{n}\Big(z_{2k}, \Big[L_p(Bv_{k1}^{(2)}, Bv_{k2}^{(2)}, Bx_k, \dots, Bx_k)+$$

$$+L_p(Bx_k, Bv_{k1}^{(2)}, Bv_{k2}^{(2)}, Bx_k, \dots, Bx_k) + \cdots +$$

$$+\ L_p(Bx_k, \dots, Bx_k, Bv_{k2}^{(2)}, Bv_{k1}^{(2)})\Big]\Big)_Y =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=2}^{n}\Big(z_{2k}, L_p''(Bx_k, Bx_k, \dots, Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)}\Big)_Y =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big(z_{2k}, q_0''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)}\Big)_Y = 0, \tag{4.105}$$

оскільки $q_0''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} = 0$. На підставі рівностей (4.103) – (4.105) одержимо, що

$$(p_0, q_0) = 0 \tag{4.106}$$

Враховуючи рівності (4.101), (4.106) маємо

$$\|p\|^2 = \|p_0 + q_0\|^2 = \|p_0\|^2 + \|q_0\|^2 \geq \|p_0\|^2 \tag{4.107}$$

і рівність має місце у випадку, коли $q_0 = 0$. Отже $\inf\|p\|$ досягається коли $p = p_0$. У формулах (4.100) – (4.102) замінемо q_0 на p_0, тоді дістанемо

$$\|p_0\|^2 = (p_0, p_0) = \Big\langle\Big\langle H^+\vec{F}_H, \vec{F}_H\Big\rangle\Big\rangle\ .$$

Покажемо, що розв'язок екстремальної задачі (4.99) буде єдиним. Припустимо, що існує поліном $l_0(x)$ з множини інтерполяційних поліномів Ерміта-Біркхофа, що є розв'язком задачі (4.99), $l_0(x) \neq p_0(x)$ і такий, що

$$\|l_0(x)\|^2 = \left\langle\left\langle H^+\vec{F}_H, \vec{F}_H\right\rangle\right\rangle.$$

На підставі (4.103)–(4.105), коли $q_0(x) = l_0(x)$ маємо

$$\|l_0 - p_0\|^2 = \|l_0\|^2 - 2(l_0, p_0) + \|p_0\|^2 =$$

$$= \left\langle\left\langle H^+\vec{F}_H, \vec{F}_H\right\rangle\right\rangle - 2\left\langle\left\langle H^+\vec{F}_H, \vec{F}_H\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle H^+\vec{F}_H, \vec{F}_H\right\rangle\right\rangle = 0.$$

Отримали суперечність. Отже розв'язок екстремальної задачі є єдиним. Теорему доведено. □

В цьому розділі знайдено розв'язок екстремальної задачі (4.99) та показано, що інтерполяційний поліном Ерміта-Біркхофа (4.97) мінімальної норми (що породжена скалярним добутком (2.1)) — єдиний [202]. Для інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта показано, що інтерполянт (4.97) тотожно співпадає із інтерполяційним поліномом, який побудовано за методом ортогональних моментів, при цьому такі інтерполянти є гранично інваріантними відносно багаточленів відповідного степеня. Аналогійний результат можна отримати для (4.97). При доведенні такого твердження викладки будуть аналогічними до доведення відповідних теорем для інтерполяційних формул Лагранжа та Ерміта.

4.5 Фундаментальні поліноми інтерполяційної формули Ерміта в лінійному нормованому та евклідовому просторах

У цьому розділі у лінійному нормованому просторі розглянуто інтерполяційну формулу Ерміта, що отримано в розділі 4.1 та показано, що вона містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтерполянта Ерміта на поліномах відповідного степеня у випадку скінченновимірного евклідового простору. Зауважимо, що в розділі 2.8 одержано аналогічні результати для операторного інтерполяційного поліному Лагранжа.

Нехай X — гільбертовий, Y — лінійній, нормований простори, $(\cdot,\cdot)_X$ — скалярний добуток в X. Позначимо Π_n — множину операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n вигляду (4.1). Оператор $F : X \to Y$ (в загальному випадку нелінійний) заданий своїми значеннями у вузлах інтерполяції $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ та значеннями диференціалів Гато $F^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(k)}v_{ik-1}^{(k)}\cdots v_{i1}^{(k)}$ у цих вузлах за напрямками $v_{ik}^{(k)}, v_{ik-1}^{(k)}, \ldots, v_{i1}^{(k)} \in X$, $k=\overline{1,k_i}$, $i=\overline{1,m}$,[110]:

$$F^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(k)}v_{ik-1}^{(k)}\cdots v_{i1}^{(k)} = \frac{\partial^k}{\partial\alpha_1\cdots\alpha_k}F\left(x_i+\sum_{p=1}^{k}\alpha_p v_{ip}^{(k)}\right)\Bigg|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0}.$$

Потрібно знайти такий операторний поліном $P_n(x) \in \Pi_n$, що відповідає інтерполяційним умовам (4.45).

Введемо позначення:

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(x_j)h_{ji}^{(i)}h_{j,i-1}^{(i)}\ldots h_{j1}^{(i)},\ i=\overline{0,k_j}\}_{j=1}^{m}, \tag{4.108}$$

$$\vec{g}_H(x) = \left\{\frac{\partial^i}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_i}g\left(x_j+\sum_{p=1}^{i}\alpha_p h_{jp}^{(i)}, x\right)\Bigg|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_i=0},\ i=\overline{0,k_j}\right\}_{j=1}^{m}, \tag{4.109}$$

матриця H визначається на підставі формул (4.47), (4.48), Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори симетричної матриці H з нульовим власним числом, H^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці H [213]. Нехай виконується умова (4.49), тобто

$$A_0\vec{F}_H = \vec{0}, \tag{4.110}$$

де $A_0 = E - H^+H = E - HH^+$ — ідемпотентна, симетрична матриця.

Розглянемо інтерполяційний поліном Ерміта

$$P_n(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^+\vec{g}_H(x) \right\rangle, \tag{4.111}$$

що належить множині (1.18) та має серед усіх інтерполянтів, що відповідають умовам (4.45) мінімальну норму [138], яка породжена скалярним добутком (4.56).

Вузли інтерполювання оберемо таким чином, щоб матриця H мала обернену ($H^+ = H^{-1}$). Тоді на підставі (4.110) операторна задача Ерміта (4.56) буде мати розв'язок при будь-яких значеннях оператора F та значеннях диференціалів Гато $F^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(k)}v_{ik-1}^{(k)}\cdots v_{i1}^{(k)}$, $k = \overline{0,k_i}$, $i = \overline{1,m}$, у вузлах $x_i, i = \overline{1,m}$. Це означає, що задача (4.56) є інваріантно розв'язною. В [77] наведено умови інваріантної розв'язуваності операторної задачі Ерміта. В цьому випадку інтерполянт Ерміта (4.111) набуває вигляду:

$$P_n(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^{-1}\vec{g}_H(x) \right\rangle. \tag{4.112}$$

Нехай X, Y — лінійні нормовані простори, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в X. Розглянемо розв'язок задачі (4.45) у вигляді інтерполянта мінімальної норми (4.112). Вузли інтерполяції та напрямки диференціалів Гато оберемо таким чином, щоб матриця H була невиродженою. В розділах 4.3.1 та 4.3.2 для скінченновимірного евклідового простору E_k знайдено умови, які накладаються на систему вузлів інтерполяції, при виконанні яких матриця H є неособливою, та одержано умови інваріантної розв'язуваності задачі Ерміта у випадку, коли у вузлах інтерполяції задано значення оператора F та значення його диференціалів Гато до першого та до другого порядків відповідно. Введемо позначення:

$$\vec{h}(x) = H^{-1}\vec{g}_H(x) = \left\{ \begin{matrix} h_{i0}(x) \\ h_{i1}(x) \\ \cdots \\ h_{ik_i}(x) \end{matrix} \right\}_{i=1}^{m} . \tag{4.113}$$

Покажемо, що компоненти вектора $\vec{h}(x)$ є фундаментальними поліномами інтерполяційної формули Ерміта (4.112). Маємо:

$$\vec{h}(x_k) = H^{-1}\vec{g}_H(x_k) = H^{-1}H\vec{e}_k = \vec{e}_k,$$

де $\vec{e}_k$ — вектор у якого на k-му місці стоїть одиниця, решта — нулі. Ця рівність означає, що

$$h_{i0}(x_k) = \delta_{ik}, \ \ i,k = \overline{1,m}, \ h_{ij}(x_k) = 0, \ \ j = \overline{1,k_i}, \ \ i,k = \overline{1,m},$$

де δ_{ik} — символ Кронекера. Знайдемо $\vec{h}^{(q)}(x_k)v_{kq}^{(q)} \cdots v_{k1}^{(q)}$. Одержимо

$$\vec{h}^{(q)}(x_p)v_{kq}^{(q)} \cdots v_{k1}^{(q)} = H^{-1}\vec{g}_H^{(q)}(x_p)v_{kq}^{(q)} \cdots v_{k1}^{(q)} =$$

$$= H^{-1}H\vec{e}_{k_1+\cdots+k_{q-1}+p+k},$$

тобто

$$h_{ij}^{(q)}(x_p)v_{pq}^{(p)} \cdots v_{p1}^{(p)} = \delta_{ip}, q = \overline{1,k_p}, \ \ j = \overline{0,k_i}, p, i = \overline{1,m}.$$

Таким чином довели таку теорему:

Теорема 4.15. *Нехай виконуються умови* (4.49). *Тоді елементи вектора* $\vec{h}(x)$, *що визначаються формулою* (4.113), *є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта* (4.45) *у лінійному нормованому просторі* X.

Надалі формулу (4.112) запишемо в іншому вигляді та зведемо її до інтерполяційної формули Ерміта. Для цього введемо позначення:

$$P_{nj0}(x) = g(x_j, x), \quad P_{nj1}(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} g(x_j + \alpha_1 v_{11}^{(1)}, x)\bigg|_{\alpha_1=0},$$

$$P_{nj2}(x) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} g(x_j + \alpha_1 v_{21}^{(2)} + \alpha_2 v_{22}^{(2)}, x)\bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{njk_j}(x) = \frac{\partial^{k_j}}{\partial \alpha_{k_j} \cdots \partial \alpha_1} g(x_j + \sum_{p=1}^{k_j} \alpha_p v_{jp}^{(k_j)}, x)\bigg|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_{k_j}=0}.$$

В цих позначеннях вектор $\vec{g}_H(x)$ та матриця $H = \|H^{js}\|_{j,s=1}^m$ запишуться у такому вигляді:

$$\vec{g}_H(x) = \begin{Bmatrix} P_{nj0}(x) \\ P_{nj1}(x) \\ \cdots \\ P_{njk_j}(x) \end{Bmatrix}_{j=1}^m, \tag{4.114}$$

$$\|H^{js}\| = \begin{Vmatrix} P_{nj0}(x_s) & P_{nj0}^{(1)}(x_s) v_{s1}^{(1)} & \cdots & P_{nj0}^{(k_s)}(x_s) v_{sk_s}^{(k_s)} \cdots v_{sk_s}^{(k_s)} \\ P_{nj1}(x_s) & P_{nj1}^{(1)}(x_s) v_{s1}^{(1)} & \cdots & P_{nj1}^{(k_s)}(x_s) v_{sk_s}^{(k_s)} \cdots v_{sk_s}^{(k_s)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{njk_j}(x_s) & P_{njk_j}^{(1)}(x_s) v_{s1}^{(1)} & \cdots & P_{njk_j}^{(k_s)}(x_s) v_{sk_s}^{(k_s)} \cdots v_{sk_s}^{(k_s)} \end{Vmatrix} = \tag{4.115}$$

$$= \|P^{(p)}_{njq}(x_s)v^{(p)}_{sp}\cdots v^{(p)}_{s1}\|_{q=\overline{0,k_j},p=\overline{0,k_s}}.$$

Нехай $(P^{(p)}_{njq}(x_s)v^{(p)}_{sp}\cdots v^{(p)}_{s1})^{-1}$, $q = \overline{0,k_j}, p = \overline{0,k_s}$, $j,s = \overline{1,m}$ — елементи оберненої матриці H^{-1}. Маємо [48]:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{m}\left\{F(x_j)\sum_{s=1}^{m}\left\{(P_{nj0}(x_s))^{-1}P_{nj0}(x)\right\} + \right.$$

$$+F'(x_j)v^{(1)}_{j1}\sum_{s=1}^{m}\left\{(P^{(1)}_{nj1}(x_s)v^{(1)}_{s1})^{-1}P_{nj1}(x)\right\} + \cdots + \tag{4.116}$$

$$\left. +F^{(k_j)}(x_j)v^{(k_j)}_{jk_j}\cdots v^{(k_j)}_{j1}\sum_{s=1}^{m}\left\{(P^{(k_s)}_{njk_j}(x_s)v^{(k_s)}_{sk_s}\cdots v^{(k_s)}_{s1})^{-1}P_{njk_j}(x)\right\}\right\}.$$

Розглянемо випадок, коли $X = E_2$ є скінченновимірним евклідовим простором, $F : E_2 \to R_1$, $\gamma \in E_2, \gamma = (x,y)$, $\gamma_i = (x_i,y_i)$, $v^{(p)}_{ij} = (\alpha^{pj}_i, \beta^{pj}_i)$, $j = \overline{1,p}$, $p = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,m}$. Функція $F(\gamma)$ задана своїми значеннями $F(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато $F^{(p)}(\gamma_i)v^{(p)}_{ip}\cdots v^{(p)}_{i1}$, $p = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,m}$. Вузли інтерполяції та напрямки диференціалів оберемо таким чином, щоб матриця H була неособливою. В цьому випадку формула (4.48) запишеться у вигляді

$$g(\gamma_i,\gamma_j) = \sum_{p=0}^{n}(x_ix_j + y_iy_j)^p,$$

а інтерполяційний поліном Ерміта $P_n(\gamma)$ визначається формулами (4.114) – (4.116).

Нехай M — кількість інтерполяційних умов (4.45). Надалі будемо вважати, що кількість вузлів m задано (фіксовано), а отже і M є фіксованим. Степінь інтерполяційного полінома n обираємо з нерівності

$$M \le \min p = \overline{p},$$

де p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ [12].

Приклад 4.2. *Нехай* $m = 2$, $\gamma_i = (x_i, y_i), i = 1, 2$, $\gamma_1 = (0, 1), \gamma_2 = (1, 0)$, $v_1 = (1, 0)$. *Задані значення* $F(\gamma_1)$, $F'(\gamma_1)v_1$, $F(\gamma_2)$, $M = 3$. *Вузли* $\gamma_i, i = 1, 2$ *та напрямок диференціала Гато* v_1 *задовольняють умови теореми 1 із роботи [204]. Отже, в цьому випадку інтерполяційна задача Ерміта є інваріантно розв'язною, а побудований розв'язок буде єдиним. Це означає, що матриця* H, *що визначається на підставі формул* (4.47), (4.48) *є невиродженою.*

Визначимо степінь інтерполянта із нерівності

$$M = 3 \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \overline{p} = 3.$$

Одержали, що $n = 1$. *Побудуємо інтерполяційний поліном Ерміта* $P_1(\gamma)$. *З урахуванням формул* (4.47), (4.48) *отримаємо*

$$H = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & -11 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

вектори (4.108), (4.109) *набувають вигляду*

$$\vec{F}_H = \begin{Vmatrix} F(\gamma_1) \\ F'(\gamma_1)v_1 \\ F(\gamma_2) \end{Vmatrix}, \quad \vec{g}_H(x, y) = \begin{Vmatrix} 1 + x \\ x \\ 1 + y \end{Vmatrix}.$$

Знайдемо вектор $\vec{h}(x, y)$:

$$\vec{h}(x,y) = H^{-1}\vec{g}_H(x,y) = \begin{Vmatrix} 1-y \\ -1+x+y \\ y \end{Vmatrix},$$

$$h_1(x,y) = 1-y, \;\; h_2(x,y) = -1+x+y, \;\; h_3(x,y) = y.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що виконуються рівності

$$h_i(\gamma_j) = \delta_{ij}, \;\; i = 1,3, \;\; h_2(\gamma_j) = 0, \;\; j = 1,2,$$

$$h_i'(\gamma_j)v_1 = 0, \;\; i = 1,3, \;\; h_2'(\gamma_j)v_1 = \delta_{1j}, \;\; j = 1,2,$$

а інтерполяційний поліном $P_1(x,y)$ *запишеться таким чином*

$$P_1(\gamma) = F(\gamma_1)h_1(\gamma) + F'(\gamma_1)v_1h_2(\gamma) + F(\gamma_2)h_3(\gamma).$$

Нехай $F(x,y) = 1+2x-3y$. *Тоді*

$$F(1,0) = 3, \;\; F'(1,0)v_1 = 2, \;\; F(0,1) = -2,$$

$$P_1(x,y) = 3(1-y) + 2(-1+x+y) - 2y = 1+2x-3y,$$

тобто у випадку $m = 2$, $M = 3$, $\overline{p} = 3$, $n = 1, k_1 = 1, k_2 = 0$ *інтерполянт* $P_1(x,y)$ *є точним на поліномі першого степеня.*

Приклад 4.3. *Нехай* $m = 2$, $\gamma_i = (x_i, y_i), i = 1,2$, $\gamma_1 = (1,0)$, $\gamma_2 = (0,1)$, $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$. *Задано* $F(\gamma_i)$, $F'(\gamma_i)v_i$, $i = 1,2$, $M = 4$. *Обрані вузли інтерполяції та напрямки диференціалів Гато відповідають умовам теореми 1 [203]. Це означає, що матриця* H *є неособливою. Степінь інтерполянта обираємо з нерівності*

$$M = 4 \leq \min \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \overline{p} = 6.$$

Отже, $n = 2$. *Побудуємо інтерполяційний поліном* $P_2(\gamma)$. *Матриця* H, *що визначається формулами* (4.47), (4.48), *набуває вигляду*

$$H = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{Vmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{11} \begin{Vmatrix} 30 & -18 & -25 & 15 \\ -18 & 13 & 15 & -9 \\ -25 & 15 & 30 & -18 \\ 15 & -9 & -18 & 13 \end{Vmatrix}.$$

Вектори (4.108), (4.109) *запишуться так*

$$\vec{F}_H = \begin{Vmatrix} F(\gamma_1) \\ F'(\gamma_1)v_1 \\ F(\gamma_2) \\ F'(\gamma_2)v_2 \end{Vmatrix}, \quad \vec{g}_H(x,y) = \begin{Vmatrix} 1+x \\ x \\ 1+y \\ y \end{Vmatrix}.$$

Обчислимо $\vec{h}(x,y)$:

$$\vec{h}(x,y) = H^{-1}\vec{g}_H(x,y) = \begin{Vmatrix} 1+x+x^2 \\ x+2x^2 \\ 1+y+y^2 \\ y+2y^2 \end{Vmatrix}.$$

Тоді інтерполянт Ерміта (4.116) *можна записати таким чином:*

$$P_2(\gamma) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ F(\gamma_i)h_{2i-1}(\gamma) + F'(\gamma_i)v_i h_{2i}(\gamma_i) \right\},$$

де

$$h_1(x,y) = 1+x+x^2, h_2(x,y) = x+2x^2, h_3(x,y) = 1+y+y^2, h_4(x,y) = y+2y^2.$$

Поліноми $h_i(\gamma), i = \overline{1,4}$, *відповідають співвідношенням*

$$h_{2i-1}(\gamma_k) = \delta_{ik}, h_{2i}(\gamma_k) = 0, i, k = 1, 2, h'_{2i-1}(\gamma_k)v_k = 0, h'_{2i}(\gamma_k)v_k = \delta_{ik},$$

$i, k = 1, 2$, *тобто вони є фундаментальними поліномами інтерполяційної формули Ерміта.*

Нехай $F(x, y) = 1 + x - y + x^2$, *тоді*

$$F(1, 0) = 3, \quad F(1, 0)v_1 = 3, F(0, 1) = 0, \quad F(1, 0)v_2 = -1.$$

Інтерполяційний поліном Ерміта має вигляд

$$P_2(x, y) = \frac{1}{11}(9 + 15x - 7y + 9x^2 - 2y^2),$$

тобто у випадку $M = 4$, $\overline{p} = 6$, $n = 2$ *інтерполянт Ерміта* (4.116) *не є точним на поліномі другого степеня двох змінних.*

Таким чином для скінченновимірного евклідового простору E_2 можна зробити такий висновок: у випадку $M < \overline{p}$ маємо єдиний інтерполянт Ерміта мінімальної норми, при цьому він не є точним на поліномах відповідного степеня (приклад 4.3). Цей інтерполянт називають недовизначеним. Якщо $M = \overline{p}$, то інтерполяційний поліном Ерміта єдиний та є точним на поліномах відповідного степеня [8] (приклад 4.2).

Аналогічні міркування та перетворення можна провести для евклідового простору E_k, $\gamma \in E_k$, $\gamma = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, де кількість вузлів m та число інтерполяційних умов M задано (фіксовано), а степінь інтерполянта n визначаємо з умови

$$M \leq \min p = \overline{p}, \quad p = \frac{(n + k)!}{n!k!}, \quad k \geq 2, \tag{4.117}$$

де p — розмірність простору поліномів n-го степеня в E_k [8]. Вузли інтерполяції та напрямки диференціалів Гато із (4.45) обираємо таким чином, щоб існувала обернена матриця до матриці H (4.47), (4.48), а степінь інтерполяційного полінома визначаємо з нерівності (4.117).

Сформулюємо наступний висновок для простору E_k у вигляді теореми:

Теорема 4.16. *Нехай m, M задані, функція багатьох змінних $F : E_k \to R_1, k \geq 2$. задана значеннями $F(x_i)$, $i = \overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції $x_i, i = \overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато у цих вузлах до відповідного порядку $k_i, i = \overline{1,m}$ за напрямками $v_{ip}^{(p)} \cdots v_{i1}^{(p)}$, $p = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,m}$. Тоді, якщо $M = \overline{p}$, то інтерполянт Ерміта $P_n(\gamma)$, $\gamma \in E_k$, що визначається формулою* (4.116), *буде точним на всіх поліномах степеня не вище n, а якщо $M < \overline{p}$, то інтерполянт мінімальної норми $P_n(\gamma)$ не має такої властивості.*

Висновки до розділу 4

В підрозділі 4.1 у гільбертовому просторі з мірою побудовано поліном типу Ерміта у випадку, коли задані значення нелінійного оператора та його перші диференціали Гато у вузлах. Доведено, що інтерполянт має мінімальну норму на множині інтерполянтів типу Ерміта з фіксованими інтерполяційними умовами та асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня. Наведено узагальнення теореми про інтерполянт мінімальної норми. Розглянуто питання про точність та збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора другого степеня в разі зростання кількості вузлів.

У підрозділі 4.2 у гільбертовому просторі з мірою побудовано інтерполяційні поліноми типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа, у випадку заданих значень нелінійного оператора та його диференціалів Гато у вузлах до певного порядку включно. Показано, що інтерполянти асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня. Для поліноміального оператора наведено інтерполянт Абеля-Гончарова, що є інваріантно граничним для поліномів відповідного степеня.

У підрозділі 4.3 розглянуто інтерполяційні задачі Ерміта в скінченновимірному евклідовому просторі у випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато до першого та до другого порядків відповідно у вузлах інтерполяції. Показано, що ці задачі мають єдиний розв'язок мінімальної норми на множині інтерполянтів, що відповідають фіксованим інтерполяційним умовам. Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку цих задач. Показано, що інтерполянт мінімальної норми є розв'язком задачі Ерміта в умовах недовизначеності, тобто коли вихідної інформації недостатньо, щоб однозначно визначити інтерполяційний поліном. Всі умови теорем одержано в термінах значень функції та її похідних та в термінах матриць, що побудовані за системою вузлів інтерполяції.

У підрозділі 4.4 у гільбертовому просторі з мірою доведено теорему про інтерполяційний поліном типу Ерміта-Біркхофа, що має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів, які відповідають фіксованим інтерполяційним умовам типу Ерміта-Біркхофа та показано, що він є єдиним розв'язком відповідної інтерполяційної задачі.

У підрозділі 4.5 у лінійному нескінченновимірному нормованому просторі та в скінченновимірному евклідовому просторі показано, що інтерполяційний поліном Ерміта, що має мінімальну норму, яка породжена гаусовою мірою, містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтепроляційних формул Ерміта на поліномах відповідного степеня.

Джерела, що використані у розділі 4

Для написання цього розділу було використано 19 джерел [8], [12], [16], [26], [27], [72], [77], [85], [101], [107], [110], [140], [175], [186], [205], [213], [218], [227], [226], посилання на які зазначені в тексті розділу.

Основні результати розділу 4 викладено в статтях: [43], [44], [48], [138], [139], [140], [143], [202], [203], [204], [78].

Розділ 5

Застосування операторної інтерполяції для розв'язання прикладних задач

5.1 Операторна інтерполяція та системи лінійних рівнянь і нерівностей в евклідових просторах

Розв'язання прикладних задач достатньо часто призводить до неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей, у зв'язку з чим постають питання про їх сумісність. Відповідь на ці питання у випадку рівнянь надає теорема Кронекера-Капеллі [56], а у випадку нерівностей — теорема С. М. Чернікова [147]. В цьому підрозділі наведено аналоги згаданих теорем та показано зв'язок цих теорем з поліноміальним інтерполянтом першого степеня в евклідових просторах та умовами його існування.

Наведемо результати, які будуть використані для подальшого викладення матеріалу. Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Aa = y, \tag{5.1}$$

де $A : R_n \to R_m$, $A = \|\alpha_{ij}\|_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Теорема 5.1. *(Кронекер-Капеллі) [56]. Система лінійних алгебраїчних рівнянь* (5.1) *тоді і тільки тоді сумісна, коли ранг розширеної матри-*

ці $\overline{A}$ дорівнює рангу матриці A.

В деяких випадках, на практиці, більш зручно користуватись іншим формулюванням теореми 5.1. В роботі [4] розглянуто псевдообернення лінійних операторів в гільбертових та евклідових просторах.

Позначимо $E_n,\ E_m$ — евклідові простори, E — одинична матриця. Використовуючи властивості псевдоберненого оператора в евклідових просторах наведено наступне твердження [4].

Теорема 5.2. *Для розв'язуваності рівняння*

$$Aa = y,\ A : E_n \to E_m \tag{5.2}$$

необхідно та достатньо виконання умови

$$(E - AA^+)y = 0, \tag{5.3}$$

де A^+ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці A. Для будь-якого $y \in E_m$

$$\inf \{\|Aa - y\|_{E_m} : a \in E_n\} = \|(E - AA^+)y\|_{E_m},$$

при цьому точна нижня границя досягається для

$$a = A^+y + (E - A^+A)z,\ z \in E_n.$$

Система (5.2) збігається із системою лінійних алгебраїчних рівнянь (5.1). Отже, умова (5.3) є умовою сумісності системи рівнянь (5.1) і вона є аналогом теореми Кронекера-Капеллі.

Наведемо відомий результат [147] щодо умов розв'язуваності лінійної системи нерівностей. Нехай $\alpha_{ik},\ z_k,\ a_i,\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m}$ — комплексні числа, $\varepsilon_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},$

$$|\alpha_{i1}z_1 + \alpha_{i2}z_2 + \dots + \alpha_{in}z_n - a_i| \le \varepsilon_i,\ i = \overline{1,m} \tag{5.4}$$

— система нерівностей ранга r, а індекси $\mu_1,\ \mu_2, \dots, \mu_r$ обрані таким чином, що принаймні один із визначників

$$|\alpha_{i_r\mu_l}| = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1\mu_1} & \dots & \alpha_{i_1\mu_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i_r\mu_1} & \dots & \alpha_{i_r\mu_r} \end{vmatrix} \tag{5.5}$$

не дорівнює нулю. Має місце теорема 5.3 (С. М.Черніков) [147].

Теорема 5.3. *Необхідною та достатньою умовою сумісності системи* (5.4)*є існування такої системи індексів* $\nu_1,\ \nu_2, \dots, \nu_r$ *при яких* $|\alpha_{\nu_k\mu_l}| \ne 0$ *та існує принаймні один розв'язок* $(u_{\nu_1},\ u_{\nu_2},\ \dots, u_{\nu_r})$ *системи*

$$|\overline{z}_{\nu_i} - a_{\nu_i}| = \varepsilon_{\nu_i},\ i = \overline{1,r},$$

$$\overline{z}_{\nu_i} = \alpha_{\nu_i1}z_1 + \alpha_{\nu_i2}z_2 + \dots + \alpha_{\nu_in}z_n,\ i = \overline{1,r},$$

що відповідає співвідношенням

$$|\begin{vmatrix} \alpha_{\nu_1\mu_1} & \dots & \alpha_{\nu_1\mu_r} & u_{\nu_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu_r\mu_1} & \dots & \alpha_{\nu_r\mu_r} & u_{\nu_r} \\ \alpha_{j\mu_1} & \dots & \alpha_{j\mu_r} & a_j \end{vmatrix}| \le \varepsilon_j|\begin{vmatrix} \alpha_{\nu_1\mu_1} & \dots & \alpha_{\nu_1\mu_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu_r\mu_1} & \dots & \alpha_{\nu_r\mu_r} \end{vmatrix}|,\ j = \overline{1,m}.$$

Якщо числа $\varepsilon_i,\ i = \overline{1,m}$ в (5.4) покладемо рівними нулю, то система нерівностей (5.4) перетвориться в систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Отже з теореми 5.3, як наслідок, одержимо необхідну та достатню умову сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь: система лінійних рівнянь тоді і тільки тоді сумісна, коли ранг матриці не зміниться у разі розширення цієї матриці стовпцем вільних членів. Цей наслідок також буде аналогом теореми Кронекера -Капеллі [220].

Для встановлення зв'язку теорем 5.1 — 5.3 з поліноміальним інтерполюванням у евклідових просторах нам будуть потрібні деякі відомі результати з [77].

Нехай $F : X \to Y$ ($X,\ Y$ — гільбертові простори), $x_i \in X,\ i = \overline{1,m}$, $E,\ \Gamma$ — квадратні матриці m-го порядку, E — одинична матриця,

$$\Gamma = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x_j)^p \right\|_{i,j=\overline{1,m}},\ 0^0 = 1,$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в X, Γ^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці Γ [16], [25], [179]. Використаємо результати монографії [77], що наведені у вступі. В теоремі 1.2 наведено умови, за яких існує операторний інтерполяційний поліном n-го степеня $P_n(x)$ з інтерполяційними умовами $P_n(x_i) = F(x_i) = y_i,\ i = \overline{1,m}$, в теоремі 1.3 описано всю множину операторних інтерполяційних поліномів Лагранжа. Також в [77] доведено, що інтерполянт мінімальної норми (породженою скалярним добутком з гаусовою мірою [27]) має вигляд

$$\overline{P_n}(x) = \left\langle y, \Gamma^+ \| \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p \|_{i=\overline{1,m}} \right\rangle, \tag{5.6}$$

Розглянемо розв'язання лінійної інтерполяційної задачі в скінченновимірному евклідовому просторі. Нехай $f : E_n \to R_1$, E_n — n-вимірний евклідовий простір, $u \in E_n$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Інтерполяційний поліном першого степеня для $f(u)$ запишемо у вигляді

$$P_1(u) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{5.7}$$

з вузлами інтерполяції $u_k,\ k=\overline{0,m}$:

$$\begin{gathered} u_0=(0,0,\ldots,0),\\ u_1=(\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1n}),\\ u_2=(\alpha_{21},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{2n}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_m=(\alpha_{m1},\alpha_{m2},\ldots,\alpha_{mn}) \end{gathered} \tag{5.8}$$

та інтерполяційними умовами

$$P_1(u_k)=f(u_k)=y_k,\ k=\overline{0,m},\ y_0=0. \tag{5.9}$$

На підставі теореми 1.2 маємо:

Теорема 5.4. *Для розв'язання інтерполяційної задачі* (5.7) – (5.9) *необхідно та достатньо виконання рівності*

$$(E-\Gamma^+\Gamma)y=0, \tag{5.10}$$

де $y=(0,y_1,y_2,\ldots,y_m)$, $\Gamma=\left\|\sum\limits_{p=o}^{1}(u_i,u_j)^p\right\|_{i,j=\overline{0,m}}$, $0^0=1$, $(\cdot,\cdot)$ *— скалярний добуток в* E_n, Γ^+ *— псевдообернена матриця Мура-Пенроуза [16], [25], [179] до матриці* Γ, E *— одинична матриця розмірності* $(m+1)\times(m+1)$.

Оскільки це являє собою еквівалент теореми 5.1 в сенсі сумісності системи (5.1), то аналогом теореми 5.1 (Кронекера-Капеллі) є рівність (5.10), при цьому розв'язок лінійної інтерполяційної задачі (5.7) — (5.9) в сенсі існування полінома (5.7), що має мінімальну норму, породжену скалярним добутком з гаусовою мірою [27], виглядає таким чином [45], [77]

$$P_1(u)=\left\langle y,\Gamma^+\|\sum_{p=0}^{1}(u_i,u)^p\|_{i=\overline{0,m}}\right\rangle, \tag{5.11}$$

де $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i,\ \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),\ \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$. Для інтерполяційного полінома 1-го степеня матриця Γ набуває вигляду

$$\Gamma = \left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|_{i,j=\overline{0,m}} = I + G(u_0, u_1, \ldots, u_m),$$

I — квадратна матриця розмірності $(m+1) \times (m+1)$ з елементами, що дорівнюють одиниці, $G(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ – матриця Грама. Тоді

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 + (u_1, u_1) & \ldots & 1 + (u_1, u_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 + (u_m, u_1) & \ldots & 1 + (u_m, u_m) \end{array} \right\|, \tag{5.12}$$

$\det \Gamma = \det G(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

Зауваження 5.1. *Наведена рівність* (5.10) *дає, як і результат теореми Кронекера-Капеллі, необхідну та достатню умову сумісності лінійної системи алгебраїчних рівнянь. В деяких дослідженнях формула* (5.10) *може бути використана для побудови інтерполяційного наближення функції багатьох змінних у вигляді полінома мінімальної норми* (5.11).

Зауваження 5.2. *Якщо $m = n$, то розмірність матриці Γ в* (5.10) *на одиницю більше, ніж матриці A в* (5.3). *При побудові псевдообернених матриць достатньо великих розмірностей відмінність витрат при обчисленні Γ^+ та A^+ є несуттєвою.*

Розглянемо приклади застосування результатів теореми 5.4.

Приклад 5.1. *Перевіримо умову сумісності системи рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - x_2 = -1 \end{cases}.$$

Маємо $rang(A) = rang(\overline{A}) = 1$. *Отже система рівнянь сумісна. Перевіримо рівність* (5.10). *Вузли інтерполяції* (5.1) *в цьому випадку запишуться так:*

$$u_0 = (0,\,0),\; u_1 = (1,\,1),\; u_2 = (-1,\,-1),$$

та $y = (0,\,1,\,-1)$, *матриця* (5.12) *набуває вигляду*

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix},$$

Використовуючи скелетний розклад матриці Γ *[16], одержимо*

$$\Gamma^+ = \frac{1}{72}\begin{Vmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 17 & -1 \\ 8 & -1 & 17 \end{Vmatrix}, \tag{5.13}$$

$$(E - \Gamma^+\Gamma)y = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Умова (5.10) *теореми 5.4 виконується, отже система рівнянь має розв'язок, тобто є сумісною. Використовуючи рівність* (5.10) *ми можемо не тільки відповісти на питання про сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а і побудувати лінійний інтерполяційний поліном мінімальної норми* (5.11) *для функції двох змінних* $f(x_1, x_2)$, *що задана своїми значеннями. Так, матриця* Γ^+ *визначається рівністю* (5.13), *інтерполянт* (5.11) *набуває вигляду*

$$P_1(x_1, x_2) = 0,5(x_1 + x_2).$$

Приклад 5.2. *Розглянемо систему рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 = -1 \end{cases}.$$

Тоді $rang(A) = 1$, $rang(\overline{A}) = 2$ *і система несумісна. Повертаючись до теореми 5.4, маємо*

$$u_0 = (0,0),\ u_1 = (1,1),\ u_2 = (-1,-1),\ y = (0,\ 2,\ -1),$$

а на підставі викладеного вище перевіримо умову (5.10)

$$(E - \Gamma^+\Gamma)y = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Отже відповідна інтерполяційна задача немає розв'язку, а це означає, що система рівнянь несумісна.

Приклад 5.3. *Розглянемо систему рівнянь*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}.$$

Для даної системи $rang(A) = rang(\overline{A}) = 2$. *В цьому випадку система є сумісною, матриця* A *— невироджена. Матриця* Γ *має обернену* $\Gamma^+ = \Gamma^{-1}$, *а отже задача інтерполяції* (5.7) – (5.9) *— інваріантно розв'язна, тобто має розв'язок при будь-якій правій частині. Дійсно*

$$(E - \Gamma^+\Gamma)y = (E - \Gamma^{-1}\Gamma)y = 0$$

і умова (5.10) *виконується при будь-яких значеннях функції у вузлах інтерполяції.*

Розглянемо умову існування інтерполяційного полінома першого степеня від n змінних, який на m вузлах задовольняє заданій системі нерівностей. Інтерполяційний поліном першого степеня шукаємо у вигляді

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n. \tag{5.14}$$

Сформулюємо **задачу 1**: потрібно знайти умови, при виконанні яких існує такий поліном (5.14) або, що теж саме, такий вектор $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, що буде виконуватись інтерполяційна система нерівностей

$$P_1(u_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0,$$

$$f_{1j} \leqslant P_1(u_j) = a_0 + a_1\alpha_{j1} + a_2\alpha_{j2} + \cdots + a_n\alpha_{jn} \leqslant f_{2j},\ j = \overline{1,m}, \tag{5.15}$$

на векторах

$$u_0 = \|\alpha_{0i} = 0\|_{i=\overline{1,n}},\ u_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jn}),\ j = \overline{1,m}$$

з дійсними компонентами при заданих $f_{1j},\ f_{2j},\ j = \overline{1,m}$.

Розглянемо дійсний випадок та покладемо для системи нерівностей (5.4): $z_i = x_i,\ a_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$, для системи нерівностей (5.15):

$$f_{1i} = -\varepsilon_i + y_i,\ f_{2i} = \varepsilon_i + y_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Тоді умови (5.15) можна розглядати як існування такої послідовності $g_j, j = \overline{0,m}$ для якої

$$P_1(u_j) = g_j,\ j = \overline{0,m}, \tag{5.16}$$

при цьому повинні виконуватись нерівності

$$f_{1j} \leqslant g_j \leqslant f_{2j},\ j = \overline{1,m},\ g_0 = a_0 = 0. \tag{5.17}$$

Згідно з теоремою 5.4 інтерполяційний поліном (5.14) з умовами (5.16) буде існувати тоді і тільки тоді, коли буде мати місце рівність

$$(E - \Gamma^+\Gamma)\|g_j\|_{j=\overline{0,m}} = 0, \tag{5.18}$$

де Γ має вигляд (5.12). Поглянемо на (5.18), як на необхідну і достатню умову (5.3) розв'язності системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Gamma y = \|g_j\|_{j=\overline{0,m}}.$$

Подіємо на обидві частини рівняння матрицею $m \times (m+1)$

$$S = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді одержимо таку рівність

$$S\Gamma y = AA^T y = \|g_j\|_{j=\overline{1,m}}. \tag{5.19}$$

Позначимо $A^T y = x$. У покомпонентному вигляді система (5.19) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i = g_j,\ j = \overline{1,m}. \tag{5.20}$$

Але, за припущенням і за побудовою, система (5.20) має розв'язок $x_i = a_i,\ i = \overline{1,n}$, причому вірними є нерівності (5.17). Таким чином приходимо до такого твердження: результати теорем 5.3 і 5.4 еквівалентні в сенсі сумісності системи (5.15).

Знайдемо умови, за яких існує хоча б один розв'язок системи (5.15). Для цього розглянемо таку m-параметричну систему рівнянь

$$P_1(u_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_0 = 0,$$

$$a_0 + a_1\alpha_{j1} + a_2\alpha_{j2} + \ldots + a_n\alpha_{jn} = t_j f_{1j} + (1 - t_j) f_{2j}, \tag{5.21}$$

$$t_j \in [0,\ 1],\ j = \overline{1, m},$$

де

$$f_{1j} \leq t_j f_{1j} + (1 - t_j) f_{2j} \leq f_{2j},\ j = \overline{1, m},\ \forall t_j \in [0, 1]. \tag{5.22}$$

Тоді наше завдання полягає у тому, щоб з'ясувати, чи існує таке значення параметрів $t_j \in [0, 1]$, при яких буде виконуватись умова розв'язності системи (5.21), тобто, чи буде мати місце рівність

$$(E - \Gamma^+\Gamma) \left\| \begin{array}{c} 0 \\ t_1 f_{11} + (1 - t_1) f_{21} \\ \ldots \\ t_m f_{1m} + (1 - t_m) f_{2m} \end{array} \right\| = 0. \tag{5.23}$$

Система (5.23) відносно $t_j \in [0, 1],\ j = \overline{1, m}$, це система лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо ця система має розв'язок, то підставимо його у (5.21) і тим самим визначаємо вектор $\|g_j\|_{j=\overline{0,m}}$, а отже тоді і система (5.15) має розв'язок. Якщо ж система (5.23) не має розв'язку, то система (5.15) також не має розв'язку. Запишемо систему рівнянь (5.23) у вигляді

$$(E-\Gamma^+\Gamma)\left\|\begin{array}{c} 0+0 \\ t_1(f_{11}-f_{21})+f_{21} \\ t_2(f_{12}-f_{22})+f_{22} \\ \cdots \\ t_m(f_{1m}-f_{2m})+f_{2m} \end{array}\right\| =$$

$$= (E-\Gamma^+\Gamma)\left\|\begin{array}{c} 0 \\ t_1(f_{11}-f_{21}) \\ t_2(f_{12}-f_{22}) \\ \cdots \\ t_m(f_{1m}-f_{2m}) \end{array}\right\| + (E-\Gamma^+\Gamma)\left\|\begin{array}{c} 0 \\ f_{21} \\ f_{22} \\ \cdots \\ f_{2m} \end{array}\right\| = 0. \qquad (5.24)$$

Позначимо $\bar{t}_i = t_i(f_{1i} - f_{2i}),\ i = \overline{1,m}$, і запишемо загальний розв'язок [4] системи (5.24)

$$\left\|\begin{array}{c} 0 \\ \bar{t}_i \end{array}\right\|_{i=\overline{1,m}} = (E-\Gamma^+\Gamma)^+(E-\Gamma^+\Gamma)\left\|\begin{array}{c} 0 \\ -f_{2i} \end{array}\right\|_{i=\overline{1,m}} +$$

$$+\big(E-(E-\Gamma^+\Gamma)^+(E-\Gamma^+\Gamma)\big)\left\| \ w_i \ \right\|_{i=\overline{0,m}}$$

і шукаємо такий вектор $w = \left\| \ w_i \ \right\|_{i=\overline{0,m}}$, щоб виконувались умови $t_i \in [0,1],\ i = \overline{1,m}$. Проілюструємо останні міркування на простому прикладі.

Приклад 5.4. *Розв'язати систему нерівностей*

$$\begin{cases} -1 \le x_1 + x_2 \le 1 \\ 1/2 \le -x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}.$$

Система рівнянь (5.21) *буде мати вигляд*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -t_1 + (1 - t_1) \\ -x_1 - x_2 = t_2/2 + (1 - t_2) \end{cases}.$$

З прикладу 5.1 маємо

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}, \ \Gamma^+ = \frac{1}{72}\begin{Vmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 17 & -1 \\ 8 & -1 & 17 \end{Vmatrix}.$$

Запишемо необхідні та достатні умови сумісності системи (5.23) *для прикладу 5.4*

$$(E - \Gamma^+\Gamma)\begin{Vmatrix} 0+0 \\ -t_1 + (1 - t_1) \\ t_2/2 + (1 - t_2) \end{Vmatrix} = (E - \Gamma^+\Gamma)\begin{Vmatrix} 0+0 \\ -2t_1 + 1 \\ -t_2/2 + 1 \end{Vmatrix} = 0,$$

де матриці $\Gamma, \ \Gamma^+, \ (E - \Gamma^+\Gamma)$ *визначені в прикладі 5.1. Тоді одержимо*

$$\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 \\ -2t_1 \\ -t_2/2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи буде $t_1 = 1 - t_2/4$*, а загальний розв'язок системи нерівностей можна подати у вигляді*

$$x_1 = -z - 2t_1 + 1, x_2 = z, \ z \in R_1, \ t_1 \in [3/4, 1].$$

В подальшому розглянемо комплексні евклідові простори $\widetilde{E}_m, \widetilde{E}_n$. Нехай $\alpha_{ij}, \ z_j, \ y_i, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$ — комплексні числа. Система нерівностей С. М.Чернікова має вигляд

$$|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} z_j - y_i| \leq \varepsilon_i, \ i = \overline{1,m}. \tag{5.25}$$

Знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності системи нерівностей (5.25). Розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} z_j - y_i = \varepsilon_i s_i,\ |s_i| \leq 1,\ i = \overline{1,m}. \tag{5.26}$$

Якщо існують такі комплексні числа $s_i,\ i = \overline{1,m}$, що система (5.26) буде розв'язною, то і система нерівностей (5.25) також буде розв'язною і навпаки. Запишемо (5.26) у матрично - векторному вигляді

$$\|\alpha_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \|z_j\|_{j=\overline{1,n}} = \|y_i + \varepsilon_i s_i\|_{i=\overline{1,m}}.$$

Сформулюємо **задачу 2**: знайти умови, при виконанні яких існує такий поліном (5.14), визначений в комплексному n-вимірному евклідовому просторі $\widetilde{E}_n$ або, що теж саме, такий вектор $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, що буде виконуватись інтерполяційна система рівнянь

$$\begin{aligned} &P_1(u_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = a_0 = 0, \\ &P_1(u_j) = a_0 + a_1\alpha_{j1} + a_2\alpha_{j2} + \dots + a_n\alpha_{jn} = y_j + \varepsilon_j s_j,\ j = \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

на інтерполяційних вузлах

$$u_0 = \|\alpha_{0i} = 0\|_{i=\overline{1,n}},\ u_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{jn}),\ j = \overline{1,m}.$$

Згідно з теоремою 5.4 сформуємо матриці $\Gamma,\ \Gamma^+$ і запишемо необхідні та достатні умови розв'язності системи (5.27)

$$(E - \Gamma^+\Gamma)\|y_i + \varepsilon_i s_i\|_{i=\overline{0,m}} = 0,\ y_0 = 0,\ s_0 = 0. \tag{5.28}$$

Систему (5.28) можна розглядати, як лінійну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $s_i,\ i = \overline{1,m}$. Умови розв'язності системи (5.28) з додатковими умовами

$$|s_i| \le 1,\ i = \overline{0,m} \tag{5.29}$$

дадуть умови розв'язності задачі С. М.Чернікова. Система (5.28) має вигляд

$$(E - \Gamma^+\Gamma)\|\overline{s}_i\|_{i=\overline{0,m}} = (E - \Gamma^+\Gamma)\big\|-y_i\big\|_{i=\overline{0,m}}, \tag{5.30}$$

де $\overline{s}_i = \varepsilon_i s_i,\ i = \overline{0,m}$. Запишемо її загальний розв'язок

$$\begin{gathered}\|\overline{s}_i\|_{i=\overline{0,m}} = (E - \Gamma^+\Gamma)^+(E - \Gamma^+\Gamma)\big\|-y_i\big\|_{i=\overline{0,m}} + \\ + \big(E - (E - \Gamma^+\Gamma)^+(E - \Gamma^+\Gamma)\big)\|w_i\|_{i=\overline{0,m}}\end{gathered} \tag{5.31}$$

і шукаємо такий вектор $\|w_i\|_{i=\overline{0,m}}$, щоб виконувались умови (5.29). Якщо він існує, то задача С. М.Чернікова (5.25) має розв'язок (5.31), у протилежному випадку не має.

Приклад 5.5. *Знайти такі комплексні числа $z_j,\ j = 1, 2, 3, 4$, які задовольняють систему нерівностей в позначеннях С. М. Чернікова [147]*

$$\Big|\sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} z_j + a_k\Big| \le \frac{1}{2},\ k = 1, 2, 3. \tag{5.32}$$

Ця система визначається матрицею A і вектором $a = (a_1, a_2, a_3)$

$$A = \|\alpha_{kj}\|_{\substack{k=1,2,3\\ j=1,2,3,4}} = \left\|\begin{matrix} 2i & -3+i & 4 & -2+2i \\ -4+i & 2-2i & -1+2i & 3-2i \\ -1+2i & -1-2i & 1+2i & -1-2i \end{matrix}\right\|,\ a = \frac{1}{4}\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|.$$

Застосовуючи скелетний розклад матриці A, побудуємо для неї псевдообернену

$$A^{+} = \frac{1}{1183}\left\| \begin{matrix} -137-37i & -134-99i & -12-36i \\ -60-50i & 36-7i & -11+26i \\ 143-31i & 60+5i & 15-21i \\ 23-131i & 132-9i & -7+31i \end{matrix} \right\|.$$

Згідно з попереднім сформулюємо нашу задачу таким чином. Визначити, чи існують такі комплексні числа $s_k,\ k=1,2,3,$ *з якими система рівнянь з обмеженнями*

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} z_j + a_k = s_k,\ |s_k| \le \frac{1}{2},\ k=1,2,3 \tag{5.33}$$

буде мати розв'язок. Запишемо умови розв'язності (5.3) *цієї системи*

$$(E - AA^{+})(-a+s) =$$

$$= \frac{1}{13}\left\| \begin{matrix} 1 & -1+i & -1+3i \\ -1+i & 2 & -2-4i \\ -1-3i & -2+4i & 10 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} -1/4+\bar{s}_1+i\bar{l}_1 \\ -1/4+\bar{s}_2+i\bar{l}_2 \\ -1/4+\bar{s}_3+i\bar{l}_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

де $s = \|s_k\|_{k=1,2,3},\ s_k = \bar{s}_k + i\bar{l}_k,\ k=1,2,3.$ *Розв'язок останньої системи буде такий*

$$\bar{s}_1 = -\frac{3}{4} - 2\bar{l}_2 + 4\bar{s}_3 + 2\bar{l}_3 + \bar{l}_1, \tag{5.34}$$

$$\bar{s}_2 = \bar{l}_1 - \bar{l}_2 - \frac{1}{2} - \bar{l}_3 + 3\bar{s}_3.$$

Тут величини $\bar{s}_3,\ \bar{l}_3,\ \bar{l}_1,\ \bar{l}_2$ *є довільними, але такими, що* $s_k = \bar{s}_k + i\bar{l}_k,\ k = 1,2,3$ *задовольняють нерівностям в* (5.33). *Наведемо одну з можливих множин розв'язків з всієї множини. Покладемо*

$$\overline{s}_3 = \bar{l}_3 = \bar{l}_1 = \frac{1}{16}. \tag{5.35}$$

Тоді з нерівностей у (5.33) *випливає, що повинна виконуватись нерівність*

$$(\overline{s}_1)^2 \leq \frac{63}{256}, \ \frac{-\sqrt{63}-5}{32} \leq \bar{l}_2 \leq \frac{\sqrt{63}-5}{32}. \tag{5.36}$$

При виконанні умов (5.34), (5.35) *множиною розв'язків системи* (5.33) *буде*

$$\left\| \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{matrix} \right\| = A^{+}(-a+s) + (E - A^{+}A)w, \ \forall w \in C^3, \tag{5.37}$$

див. наприклад [4]. Кожен вектор з множини (5.36) *буде розв'язком задачі* (5.32).

В цьому підрозділі показано, що необхідні та достатні умови існування лінійного інтерполяційного полінома з [77] еквівалентні необхідним та достатнім умовам сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі [56]) та нерівностей (теорема С. М. Чернікова [147]), при цьому лінійний інтерполянт [77] визначений в комплексному n-вимірному евклідовому просторі. Крім того, згідно з теоремами 1.2, 1.3 [77], надано поліноміальне наближення (інтерполяцію) функції багатьох змінних.

5.2 Умови розв'язуваності систем поліноміальних рівнянь

Розв'язання багатьох прикладних задач зводиться до пошуку розв'язку систем нелінійних рівнянь. Як відомо, задача знаходження розв'язку нелінійної системи розпадається на дві задачі:

1. Дослідження питання про існування та єдиність розв'язку системи нелінійних рівнянь та локалізація її коренів.

2. Знаходження розв'язку системи нелінійних рівнянь із заданою точністю.

Багато публікацій присвячено розв'язанню задачі 2 [2], [109], [215], а саме побудові ітераційних методів, питанням їх збіжності та оцінкам точності знайденого розв'язку. В [2] доведено теореми про знаходження розв'язку нелінійної системи в евклідових просторах, у випадку коли відомі деякі координати розв'язку нелінійної ситеми. На відміну від задачі 2, для задачі 1 не існує загального алгоритму розв'язання поставленої задачі. Як і для одного нелінійного рівняння локалізація коренів нелінійної системи може бути зроблена за допомогою методів математичного аналізу на основі інформації про систему. У випадку системи нелінійних рівнянь з двома невідомими достатньо зручним є графічний метод. Але якщо змінних більше ніж дві, то для розв'язання задачі 2 використовують методи математичного аналізу. Зауважимо, що в [95] наведено огляд теорем та тверджень, за допомогою яких можна з'ясувати питання про існування розв'язку нелінійної системи, але умови ці не є конструктивними. В деяких випадках знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних рівнянь [152]. В [149] наведено умови розв'язності нелінійної системи, але вони містять початкове наближення із околу кореня, тобто це означає, що розв'язок системи існує. Наведемо результати, що будуть використані для подальшого викладення матеріалу. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \cdots + \alpha_{jn}x_n - y_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.38}$$

Відповідно до [148] введемо такі визначення.

Визначення 5.1. *Мінор Δ, що недорівнює нулю та складається із коефіцієтів при невідомих системи* (5.38) *назвемо вузловим мінором цієї системи, якщо відношення до нього всіх визначників, що отримані із Δ додаванням ще одного стовпця — вектора правих частин та будь-якого рядка матриці, невід'ємне. Останні мінори називають супроводжуючими.*

Визначення 5.2. *Вузловий мінор Δ системи* (5.38) *назвемо невід'ємно (недодатньо) орієнтованим відносно невідомого x_k, якщо виконується одна із двох умов:*

1. Жоден із коефіцієнтів при x_k системи (5.38) *не є елементом мінора Δ.*

2. Відношення мінора Δ до визначника, який отримано із Δ при заміні стовпця коефіцієнтів при x_k стовпцем відповідних правих частин системи (5.38)*, невід'ємне (недодатне).*

Визначення 5.3. *Послідовність чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ назвемо цілком Δ-допустимою, якщо виконуються такі умови:*

1. Δ є вузловим мінором системи (5.38).

2. Чи мінор Δ містить стовпчик, що визначається коефіцієнтами при x_k із системи (5.38) *і при заміні елементів цього стовпця відповідними вільними членами y_j перетворюється на нуль, а при заміні відповідними числами s_j перетворюється на визначник Δ^*, що відповідає співвідношенню $\dfrac{\Delta^*}{\Delta} \leq 0$; чи Δ не перетворюється на нуль у випадку першої заміни чи взагалі не містить стовпця із коефіцієнтів при x_k.*

Визначення 5.4. *Якщо існує вузловий мінор Δ системи* (5.38) *такий, що сукупність чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ цілком Δ-допустима відносно кожного із невідомих $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ (з одним і тим самим Δ), то назвемо цю послідовність цілком Δ-допустимою відносно сукупності цих невідомих.*

Теорема 5.5. *(С. М. Черніков [148]) Для того, щоб система лінійних рівнянь* (5.38) *мала хоча б один розв'язок строго від'ємний (строго додатній) відносно сукупності невідомих* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, $1 \le k \le n$ *і недодатній (невід'ємний) відносно сукупності інших невідомих* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$, $0 \le t \le n-1$ *необхідно та достатньо, щоб виконувалась одна із умов:*

1. $y_j = 0$ *та* $s_j = \sum_{i=1}^{k} a_{jn_i} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m.$
2. *Система* (5.38) *має хоча б один недодатньо (невід'ємно) орієнтований відносно сукупності невідомих* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ *та* $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ *вузловий мінор* Δ *такий, що послідовність чисел* $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *є цілком* Δ*-допустимою відносно сукупності цих невідомих.*

В роботі [92] також доведено теореми про знаки розв'язків системи (5.38). Але для перевірки виконання умов цих теорем потрібно обчислювати C_n^r визначників порядку r, де r — ранг матриці системи, n — число невідомих.

Розглянемо розв'язання лінійної інтерполяційної задачі в евклідовому просторі E_n. Нехай $f : E_n \to R_1$, $u \in E_n$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Інтерполяційний поліном першого степеня для $f(u)$ має вигляд (5.7) та відповідає інтерполяційним умовам (5.9), де u_k, $k = \overline{0, m}$ — вузли інтерполяції, що визначаються за допомогою формул (5.1). Для розв'язання інтерполяційної задачі (5.7) – (5.9) на підставі теореми 5.4 необхідно та достатньо виконання рівності (5.10). Розглянемо систему нелінійних рівнянь над полем дійсних чисел вигляду:

$$\alpha_{j1} z_1^k + \alpha_{j2} z_2^k + \cdots + \alpha_{jn} z_n^k - y_j = 0, \quad k \in N,\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.39}$$

Систему (5.39) будемо називати поліноміальною системою. Введемо позначення: $z_i^k = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ та підставимо в (5.39). В результаті підстановки система (5.39) набуває вигляду:

$$\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \cdots + \alpha_{jn} x_n - y_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.40}$$

Отже, отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Умовою існування розв'язку (5.40) є виконання умови (5.10). В попередньому розділі надано зв'язок між умовами розв'язності систем лінійних рівнянь та поліноміальним інтерполянтом першого степеня в евклідових просторах і умовами його існування. Оскільки поліноміальна система зводиться до (5.40), то умова існування розв'язку нелінійної системи (5.39) також буде еквівалентна умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня в евклідовому просторі.

Розглянемо систему (5.39) у випадку, коли k — непарне. Задача розв'язання поліноміальної системи звелася до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5.40). Її розв'язок існує, якщо виконується умова (5.10). Таким чином маємо:

Теорема 5.6. *Нехай в* (5.39) $k = 2l - 1, l \in N$ *та виконується умова* (5.10) *теореми 5.5. Тоді система поліноміальних рівнянь* (5.39) *над полем дійсних чисел має розв'язок.*

Нехай в (5.39) k є парним. Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (5.40) із обмеженнями

$$x_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots n. \tag{5.41}$$

Для того, щоб існував розв'язок системи (5.40) з умовами (5.41) необхідно щоб виконувались умови теореми 5.5, а виконання нерівностей (5.41) забезпечує виконання умов теореми 5.4. Одержали такий результат:

Теорема 5.7. *Нехай* $k = 2l, l \in N$ *та виконуються умови теорем 5.5 та 5.4. Тоді система нелінійних рівнянь* (5.39) *над полем дійсних чисел має розв'язок.*

Приклад 5.6. *З'ясувати, чи існує розв'язок системи нелінійних рівнянь*

$$\begin{cases} z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0, \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 = 1, \\ 2z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2 + z_4^2 = -1/2. \end{cases} \tag{5.42}$$

Позначимо $z_i^2 = x_i,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$. *Тоді отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1/2, \end{cases} \tag{5.43}$$

із обмеженнями (5.41). *З'ясуємо, чи виконуються умови теореми 5.4. Побудуємо матрицю* Γ. *Для цього вузли інтерполяції* u_i, $i = \overline{0,3}$ *та* y *оберемо так:*

$$u_0 = (0,0,0,0),\ \ u_1 = (1,-1,1,-1),\ \ u_2 = (1,-1,-1,1),$$

$$u_3 = (2,-1,-2,1),\ \ y = (0,0,1,-1/2).$$

Тоді

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \end{Vmatrix}.$$

Матриця Γ *невироджена, оскільки* $det\Gamma = 16$, *отже умова* (5.10) *виконується і система лінійних рівнянь* (5.43) *має розв'язок. Перевіримо, чи будуть виконуватись обмеження* (5.41). *Для цього необхідно, щоб виконувались умови теореми 5.5. Маємо: для системи* (5.43) *визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

що складається із коефіцієнтів при невідомих x_1 *та* x_3 *із першого та другого рівняння є вузловим мінором. Покажемо, що він є невід'ємно орієнтованим відносно сукупності всіх невідомих* (5.43)*. Згідно із пункту 2 означення невід'ємно орієнтованого вузлового мінора маємо:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \frac{\Delta}{\Delta_1} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \frac{\Delta}{\Delta_2} > 0,$$

отже умови виконуються і Δ *є невід'ємно орієнтованим вузловим мінором відносно всіх невідомих системи* (5.43)*. Оскільки сума* s_j*,* $j = 1, 2, 3$ *коефіцієнтів при невідомих в будь-якому рівнянні* (5.43) *дорівнює нулю, то послідовність чисел* s_1, s_2, s_3 *є цілком* Δ*-допустимою відносно* x_1, x_2, x_3, x_4*. Таким чином, у прикладі виконується друга умова теореми 5.5 і всі розв'язки системи* (5.43) *— додатні, а отже і система* (5.42) *має розв'язок. Можна переконатися, що розв'язком системи* (5.43) *є вектор* $(1, 1/2, 5/2, 3)$.

Розглянемо питання про існування розв'язку системи вигляду

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_1, \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_2, \end{cases} \tag{5.44}$$

де $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — пара дійсних квадратичних форм від n невідомих. Ідея розв'язання поставленої задачі полягає у наступному: потрібно, щоб існувало єдине невироджене лінійне перетворення, яке одночасно переводить дві квадратичні форми $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до канонічного вигляду. Нехай $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — додатньо визначена квадратична форма. Тоді, відповідно до [56], існує таке невироджене лінійне перетворення, що система (5.44) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n^2 = y_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_2, \end{cases} \tag{5.45}$$

Система (5.45) є частинним випадком системи (5.39) у випадку, коли k є парним. Отже (5.45) має розв'язок, якщо виконуються умови теореми 5.7.

Теорема 5.8. *Нехай в* (5.44) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— пара дійсних квадратичних форм, форма* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— додатньо визначена та виконуються умови теореми 5.7 для системи рівнянь* (5.45)*. Тоді система нелінійних рівнянь* (5.44) *має розв'язок.*

Нехай тепер в (5.44) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дві довільні дійсні квадратичні форми. Симетричні матриці A та B є матрицями квадратичних форм $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ відповідно. В [16] показано, що умова $AB = BA$ є необхідною та достатньою для одночасного зведення матриць A та B до діагонального вигляду. В цьому випадку система (5.44) набуває вигляду (5.39), де $k = 2$, $m = 2$. Тоді теорему про існування розв'язку системи (5.44) можна сформулювати таким чином.

Теорема 5.9. *Нехай в* (5.44) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— пара дійсних квадратичних форм яким відповідають матриці* A *та* B*. Якщо виконується рівність* $AB = BA$ *та умови теореми 5.7 для системи рівнянь* (5.39)*, де* $k = 2$, $m = 2$*, то система нелінійних рівнянь* (5.44) *має розв'язок.*

На підставі результатів [16] теорему про розв'язуваність нелінійної системи (5.44) можна сформулювати таким чином:

Теорема 5.10. *Нехай в* (5.44) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— пара дійсних квадратичних форм яким відповідають матриці* A *та* B*,* $detA \neq 0$*. Якщо виконуються умови*

1. Рівняння $det(B-\lambda A)=0$ *має лише дійсні корені.*

2. Матриця $B-\lambda A$ *має всі лише прості елементарні дільники.*

3. Виконуються умови теореми 5.7 для системи рівнянь (5.39)*, де* $k=2$*,* $m=2$*, тоді система нелінійних рівнянь* (5.44) *має розв'язок.*

Нехай $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $v(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — дійсні квадратичні форми від n невідомих. Розглянемо питання про існування розв'язку такої нелінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\tilde{y}_1, \\ g(x_1,x_2,\dots,x_n)=\tilde{y}_2, \\ v(x_1,x_2,\dots,x_n)=\tilde{y}_3. \end{cases} \tag{5.46}$$

Отже, потрібно звести всі три квадратичні форми до канонічного вигляду за допомогою одного лінійного невиродженого перетворення, тобто привести систему (5.46) до вигляду (5.39). Нехай квадратичним формам $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $v(x_1,x_2,\dots,x_n)$ відповідають симетричні матриці A, B та C. В [94] знайдено необхідні та достатні умови діагоналізації трьох дійсних симетричних матриць. На підставі цих результатів теорему про існування розв'язку системи (5.46) можна подати у вигляді [47]:

Теорема 5.11. *Нехай у системі* (5.46) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $v(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *— дійсні квадратичні форми, яким відповідають матриці* A*,* B *та* C*,* $detA\neq 0$*. Якщо виконуються умови*

1. Рівняння $det(B-\lambda A)=0$ *має лише дійсні корені та матриця* $B-\lambda A$ *має всі лише прості елементарні дільники.*

2. Рівняння $det(C-\beta A)=0$ *має лише дійсні корені та матриця* $C-\beta A$ *має всі лише прості елементарні дільники.*

3. $BA^{-1}C=CA^{-1}B$*.*

4. Виконуються умови теореми 5.7 для системи рівнянь (5.39), *де* $k = 2, m = 3$, *тоді система нелінійних рівнянь* (5.46) *має розв'язок.*

Умова 3 теореми 5.11 є достатньо жорсткою умовою, оскільки невеликий клас матриць можуть її задовольняти. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 5.7. *З'ясувати чи буде мати розв'язок система рівнянь:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2-\alpha^2}(x_1^2 + 2x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2) = -1, \ \alpha \in R^1, \ \alpha^2 \neq 2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 1, \\ 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 0. \end{cases} \tag{5.47}$$

Квадратичним формам

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2-\alpha^2}(x_1^2 + 2x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2),$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2,$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2,$$

відповідають симетричні матриці

$$A = \frac{1}{2-\alpha^2}\begin{Vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Перевіримо виконання умови 3 теореми 5.11 для цих трьох матриць. Маємо:

$$BA^{-1}C = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3-\alpha & 1 \\ -3+\alpha & -1 \end{Vmatrix} \tag{5.48}$$

$$CA^{-1}B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3-\alpha & -3+\alpha \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} \tag{5.49}$$

Для виконання умови 3 потрібно щоб знайдені матриці в (5.48) *та* (5.49) *співпадали. Отримаємо*

$$-3 + \alpha = 3,\ 1 = -3 + \alpha.$$

Одержали суперечність. Отже при жодному $\alpha \in R^1$ *умова 3 теореми 5.11 для системи* (5.47) *не виконується.*

Зауваження 5.3. *В роботі Чернікова С. М. [148] доведено теореми про існування додатніх розв'язків системи одноріних алгебраїчних рівнянь. Тому теореми, що наведено в даному розділі на підставі результатів із [148] можна сформулювати для однорідних поліноміальних систем рівнянь.*

5.3 Застосування інтерполяційних формул при розв'язання прикладних задач

5.3.1 Задача оберненої інтерполяції

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані для знаходження розв'язку операторних рівнянь в гільбертових просторах. В цьому підрозділі побудовано алгоритм розв'язання задачі оберненої інтерполяції на підставі інтерполянта мінімальної норми (2.20).

Нехай X, Y — гільбертові простори, X є сепарабельним, $A : X \to Y$ — лінійний оператор для якого існує обернений оператор A^{-1}, що є обмеженим. Розглянемо рівняння

$$Ax = -f. \tag{5.50}$$

Для розв'язання задачі (5.50) з використанням інтерполяційної формули (2.20) оберемо систему лінійно незалежних елементів $x_i,\ i = \overline{1, m}$. Припустимо, що відомі значення

$$f_i = -Ax_i,\ i = \overline{1, m}.$$

Система елементів $f_i \in X$ є також лінійно незалежною. Побудуємо наближення оберненого оператора A^{-1} на підставі інтерполяційного поліному мінімальної норми (2.20), що відповідає інтерполяційним умовам (2.17). Зауважимо, що у разі використання формули (2.20) не потрібно задавати початкове наближення для невідомого оператора A^{-1}. Для цього випадку інтерполянт (2.20) набуває вигляду

$$P(-f) = \left\langle \vec{x}, \Gamma_m^{-1}\vec{l}(-f) \right\rangle, \tag{5.51}$$

де $\vec{x} = \{x_i\}_{i=1}^m$.

Для визначення вектора $\vec{l}(-f) = \{(-f, \widetilde{f}_i)\}_{i=1}^m$ та елементів матриці

$$\Gamma_m = \left\| \sum_{p=0}^{1} (B\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_j) \right\|_{i,j=1}^m$$

потрібно задати додатньовизначений, самоспряжений, ядерний оператор B, що міститься в інтерполяційних умовах (2.17), при цьому таким чином, щоб виконувались рівності

$$B\widetilde{f}_i = -f_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.52}$$

Оператор B оберемо найпростішим чином, щоб розв'язання рівняння (5.52) не було трудоємним за часом. Із (5.52) знаходимо невідомі $\widetilde{f}_i$, $i = \overline{1, m}$.

Таким чином, матриця Γ_m та вектор $\vec{l}(-f)$, що містяться в інтерполяційній формулі (5.51) повністю визначені, а отже інтерполянт мінімальної норми (5.51) для знаходження оберненого оператора A^{-1} також є визначеним.

Переваги запропоновано алгоритму щодо розв'язання операторного рівняння (5.50) на підставі формули (5.51) полягають у наступному: один раз побудований алгоритм, який пов'язаний з реалізацією інтерполяційного процесу (5.51), одержимо наближення для оберненого оператора A^{-1} за допомогою якого можна розв'язати цілий клас задач. Запропонований алгоритм не вимагає існування початкового наближення для знаходження A^{-1}. Відмітимо, що задача оберненої інтерполяції була розглянута в [126], але в цій роботі було застосовано інший інтерполяційний процес, який вимагає початкового наближення для A^{-1}.

В [126] для розв'язання задачі (5.50) було обрано рекурентну процедуру такого вигляду:

$$L^I_{1,m}(-f) = L^I_{1,m-1}(-f) - \left\langle \vec{\partial}_1, \Gamma_1^{-1}\vec{l}_1(-f) \right\rangle, m = 1, 2, \ldots, L^I_{1,0} = 0, \quad (5.53)$$

де

$$\vec{\partial}_m(x) = L^I_{1,m-1}(x) - L_1(x),$$

$$\vec{\partial}_1 = \left(\partial_1(B\widetilde{f}_1), B\widetilde{f}_2, \ldots, B\widetilde{f}_m))\right) = (0, 0, \ldots, L_{1,m-1}(-f_m) - u_m)\,,$$

$$\vec{l}_1(-f) = \left((-f, \widetilde{f}_1), (-f, \widetilde{f}_2), \ldots, (-f, \widetilde{f}_m))\right)$$

$$= ((-f, f''_1), (-f, f''_2), \ldots, (-f, f''_m))\,.$$

В наведених формулах $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $L_2(0,1)$.

Проілюструємо алгоритм розв'язання для двоточкової крайової задачі та порівняємо одержані результати з результатами із [126]. Нехай

$$Ax = x'' - tx = -f(t), \;\; t \in (0,1), \;\; x(0) = x(1) = 0.$$

Задамо ортогональну система елементів $x_i = \sin(\pi i t)$, $i = \overline{1,m}$. Обчислимо

$$f_i = -Ax_i = x_i'' - tx_i, \;\; i = \overline{1,m}.$$

Оператор B оберемо у такий спосіб:

$$B\widetilde{f} = \int\limits_0^1 G(x,\xi)\widetilde{f}(\xi)d\xi$$

де

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \xi(1-x), & 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

Для знаходження невідомих елементів $\widetilde{f}_i$, $i = \overline{1,m}$ двічі продиференціюємо рівність

$$B\widetilde{f}_i = -f_i.$$

Одержимо

$$\widetilde{f}_i = f_i'', \;\; i = \overline{1,m}$$

Елементи матриці Γ_1 обчислюються на підставі скалярних добутків

$$(B\widetilde{f}_i, \widetilde{f}_j)_{L_2(0,1)} = -(f_i'', f_j)_{L_2(0,1)} = (f_i', f_j')_{L_2(0,1)},$$

дістанемо

$$\Gamma_1 = \left\| \sum_{p=0}^{1} (f_i', f_j')_{L_2(0,1)} \right\|_{i,j=1}^{m}.$$

Отже, всі вектори та матриці із (5.51) знайдено.

Для $\widetilde{f} = (\pi^2 + x) sin \pi x$ наведемо таблицю значень $\Delta_m = \|u^* - P_{1,m}^*\|_{L_2[0,1]}$, де в другому стовпці $P_{1,m}^* = P_1^*$ наближення, яке побудовано на підставі інтерполяційної формули (2.20), для третього стовпця використано інтерполяційну формулу (5.53) $P_{1,m}^* = L_{1,m}^I$ [126], де за початкове наближення обрано $L^I_{1,0} = 0$, для четвертого стовпця для розрахунків використано інтерполянт $P^*_{1,m} = L^I_{1,m}$ (5.53) [126], де за початкове наближення обрано $L^I_{1,0} = Bf$.

Δ_m

m	$P^*_{1,m} = P^*_1$	$P^*_{1,m} = L^I_{1,m}, (L^I_{1,0} = 0)$	$P^*_{1,m} = L^I_{1,m}, (L^I_{1,0} = Bf)$
1	0,01828911803	0,493459	0,001061
3	0,000176240995	0,490534	0,000758
5	0,000029461822	0,486462	0,000303
10	0,00000402259	0,483087	0,000081

Результати обчислювального експерименту наведено у додатку 2.

5.3.2 Побудова поверхонь

Задача побудови поверхонь поширена при розв'язанні багатьох прикладних задачах, а саме: задача про розповсюдження забруднень, в геології, в комп'ютерній графіці, містобудування, визначення траєкторії руху об'єкта, в автобудівній промисловості, коли виникає задача побудови математичного представлення ескізу (вперше такий підхід застосувала компанія Renault) і в подальшому вже використовують інтерактивну інтерполяцію.

Наближення функцій багатьох змінних є достатньо складною задачею при реалізації відомих алгоритмів у разі розв'язання прикладних задач [53]. Розглянемо застосування результатів, які одержані в підрозділах 2.7, 2.8, де розв'язана задача інтерполювання функцій в скінченновимірному евклідовому просторі E_k, $k \geq 2$ в умовах недовизначеності, тобто коли не вистачає інформації про досліджуєму функції для однозначної побудови її наближення, та покажемо переваги отриманих в роботі результатів в порівнянні з вже існуючими алгоритмами.

В дисертаційній роботі доведено, що для існування єдиного розв'язку інтерполяційної задачі

$$P_n(\gamma_i) = f(\gamma_i), \;\; i = \overline{1, m}, \;\; m \le p, \tag{5.54}$$

де $p = \dfrac{(n+k)!}{n!k!}$ — розмірність простору Π_{kn} поліномів k змінних n степеня, потрібно обрати число вузлів $m \le p$, а вузли інтерполяції $\gamma_i \in E_k$ таким чином, щоб система векторів (2.101) була лінійно незалежною. При виконанні цих умов задача буде мати розв'язок при будь-яких значеннях функції у вузлах, а розв'язок задачі має вигляд інтерполянта мінімальної норми. При цьому, якщо за функцію $f(\gamma)$, $\gamma \in E_k$ обрати поліном $f(\gamma) \equiv f_n(\gamma)$, кількість вузлів $m = p$, то побудований інтерполянт $P_n(\gamma)$ буде тотожно співпадати з $f_n(\gamma)$, тобто $P_n(\gamma) \equiv f_n(\gamma)$.

Нехай вузли інтерполяції обрано так, що розв'язок задачі (5.54) існує та покладемо $m = p$. Складність алгоритму обчислення інтерполяційного полінома мінімальної норми (2.102) в деякій «точці» γ за кількістю арифметичних операцій на множині Π_{kn} визначається за формулою:

$$Q_1(m, n, k) = \frac{1}{3}m^3 + (2k+n-2)(m^2+m) + 2(m+1)^2 + m + O(m^2),$$

де $m = \dfrac{(n+k)!}{n!k!}$, $(2k+n-2)m^2$ — кількість операцій для обчислення матриці Γ_m, $(2k+n-2)m$ — вектора $\sum\limits_{p=0}^{n}\{(\gamma,\gamma_i)\}_{i=1}^{m}$, $\dfrac{1}{3}m^3 + O(m^2)$ — вектора $\Gamma_m^{-1}\sum\limits_{p=0}^{n}\{(\gamma,\gamma_i)\}_{i=1}^{m}$. Знаходження

$$\vec{q}(\gamma) = \Gamma_m^{-1}\sum_{p=0}^{n}\{(\gamma,\gamma_i)\}_{i=1}^{m}$$

зводиться до розв'язання системи рівнянь із симетричною матрицею Γ_m

$$\Gamma\vec{q}(\gamma) = \sum_{p=0}^{n}\{(\gamma, \gamma_i)\}_{i=1}^{m},$$

що потребує $\dfrac{1}{3}m^3 + O(m^2)$ арифметичних операцій.

Класичні інтерполяційні формули [12] для функції k-змінних ($k > 2$) при розв'язання прикладних задач не використовують. В цьому випадку для знаходження інтерполянта

$$P_{nk}(\gamma) = P_{nk}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k +$$

$$+a_{11}x_1^2 + \cdots a_{kk}x_k^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{kk\ldots k}x_k^n, \qquad (5.55)$$

тобто визначення всіх невідомих коефіцієнтів із (5.55) зводиться до розв'язання системи рівнянь (5.54). Для цього потрібно використати $\dfrac{2}{3}m^3 + O(m^2)$ арифметичних операцій. Тоді для обчислення $P_{nk}(\gamma)$ необхідно використати

$$Q_2(m, n, k) = \frac{2}{3}m^3 + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{(k-i)!(i-1)!} + (n+1)^k + 1 + O(m^2)$$

арифметичних операцій. Якщо порівнювати ці два алгоритми за кількістю арифметичних операцій за сталою при m^3 при фіксованих n та k отримаємо, що обчислення інтерполяційного полінома потребує вдвічі менше операцій. Більш того, якщо розглянути випадок $m < p$, то для однозначного знаходження коефіцієнтів із (5.55) потрібно накладати додаткові обмеження на інтерполянт.

Зауважимо, що для побудови поверхонь використовують інтерполяційні сплайни на нерегулярних вузлах, мінімізацію певного критерію, поверхні Без'є [188], B-сплайни, методи Кунса [178] та Гордона [5], [122], [192], що базуються на тензорних добутках та інші.

Апроксимація функцій багатьох змінних за допомогою кусково-поліноміальної інтерполяції розглядалась в багатьох роботах, але не існує ефективного алгоритму побудови інтерполяційних формул. Розробка методу мінімізації критерію базується на теорії відтворюючих ядер та призводить до сплайнів певного вигляду, при цьому потрібно впорядкувати вузли інтерполяції та у випадку, коли $m > 10^2$ виникають певні труднощі при обчисленні сплайнів. У випадку застосування функцій (поверхонь) Без'є у разі великої кількості вузлів інтерполяції виникають поліноми високого степеня, що призводить до накопичування похибок. Більшість з наведених методів вимагає розбиття області на підобласті (трикутні, прямокутні елементи) на яких апроксимуємо функцію. На останніх кроках алгоритму потрібно з'єднати побудовані апроксимації таким чином, щоб виконувались певні умови, наприклад, були відомі значення не лише функції, а і її похідних.

На відміну від методів, що розглянуто вище, формула інтерполяційного полінома мінімальної норми має достатньо просту структуру та записується у термінах векторів та матриць для побудови яких використовуються інтерполяційні вузли та значення функції у цих вузлах. При наближенні поверхні, що є поліномом, та у випадку, коли число вузлів m дорівнює розмірності простору поліномів, побудований інтерполяційний поліном тотожно співпадає із функцією, що апроксимуємо.

У додатку 3 наведено приклади побудови поверхонь для $m < p$ та $m = p$.

Побудову поверхонь можна застосовувати при розв'язання задачі про визначення траєкторії руху об'єктів: на підставі теореми Стоуна [235], яка є узагальненням теореми Вейєрштраса на клас неперервних функцій із R_n, траєкторію руху можна подати як перетин двох поверхонь порядку n:

$$\begin{cases} P_n^{(1)}(x,y,z) = \sum\limits_{i,j,k=0, i+j+k\le n}^{n} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k = 0, \\ P_n^{(2)}(x,y,z) = \sum\limits_{i,j,k=0, i+j+k\le n}^{n} \beta_{ijk} x^i y^j z^k = 0. \end{cases} \tag{5.56}$$

Припустимо, що відомі деякі координати рухомого об'єкту. В роботах [124], [125] запропоновано алгоритм визначення координат рухомого об'єкту у випадку сферичного фронту хвилі, в [106] проведено порівняльний аналіз визначення координат повітряних об'єктів. Отже будемо вважати, що координати об'єкту є відомими.

Побудуємо траєкторію руху об'єкту як криву, що є перетином двох поверхонь. Нехай (x_i, y_j, z_i), $i = \overline{1,m}$ — відомі координати об'єкту. Для побудови поверхні $P_n^{(1)}(x,y,z)$ із (5.56) розглянемо таку задачу. Нехай функція $z = z(x,y)$ задана своїми значеннями $z_i = z(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,m}$. Побудуємо апроксимацію $z = z(x,y)$ у вигляді інтерполяційного полінома мінімальної норми (5.51). Нехай виконуються умови теореми (2.22). Степінь інтерполянта оберемо на підставі теореми 2.24 із нерівності

$$m \le \min \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Зауважимо, що інтерполянт мінімальної норми належить множині інтерполянтів (1.10).

За поверхню $P_n^{(2)}(x,y,z)$ оберемо із множини (1.10) інтерполяційний поліном вигляду

$$P_n^{(2)}(\gamma) = P_n^{(2)}(x,y,z) = Q_n(x,y,z) - \left\langle \vec{Q}_n, \Gamma_m^{+} \sum_{p=0}^{n} \{(\gamma,\gamma_i)\}_{i=1}^{m} \right\rangle, \tag{5.57}$$

де $Q_n \in \Pi_n$, множина Π_n визначається за формулою (1.1), $\gamma = (x,y,z)$, $\gamma = (x_i, y_i, z_i)$, $\vec{Q}_n = \{Q_n(\gamma_i)\}_{i=1}^{m}$, $\Gamma_m^{+} = \left\| \sum\limits_{p=0}^{n} (\gamma_i, \gamma_j)^p \right\|_{i,j=1}^{m}$. Значення інтерполянта $P_n^{(2)}(\gamma)$ у вузлах γ_i, $i = \overline{1, m}$ дорівнюють нулю, а отже виконується умова існування розв'язку (1.9) інтерполяційної задачі $P_n^{(2)}(\gamma_i) = \vec{0}$.

Результати чисельного експерименту наведено у додатку 3.

Висновки до розділу 5

В підрозділі 5.1 пропонуються нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь (еквівалентні теоремі Кронекера-Капеллі) та нерівностей (еквівалентні теоремі С.М.Чернікова), пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах.

В підрозділі 5.2 знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь в евклідовому просторі та показано, що вони еквівалентні умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня, значення якого на спеціальних інтерполяційних вузлах збігаються з відповідною лінійною системою алгебраїчних рівнянь, тобто лінійною системою, до якої зводиться система поліноміальних рівнянь за допомогою певної заміни змінних.

В підрозділі 5.3 застосовано одержані результати дисертаційної роботи до розв'язання прикладних задач: побудовано алгоритм для задачі оберненої інтерполяції для знаходження розв'язку лінійного операторного рівняння, розглянуто побудову поверхонь за допомогою інтерполяційного полінома мінімальної норми для нелінійних функцій та поліномів, на підставі цих результатів розв'язано задачу про визначення траєкторії руху об'єкта.

Джерела, що використані у розділі 5

Для написання даного розділу було використано 25 джерел [2], [4], [5], [12], [16], [25], [27], [53], [56], [77], [92], [94], [95], [109], [122], [124], [125], [147],

[148], [149], [152], [178], [192], [215], [235], посилання на які зазначені в тексті розділу.

Основні результати розділу 5 викладено в роботах: [47], [220].

Висновки

Дисертація присвячена розвитку теорії поліноміальної операторної інтерполяції в гільбертових та евклідових просторах, зокрема, оцінкам точності та питанням збіжності інтерполяційних процесів в гільбертовому просторі з мірою. В скінченновимірному евклідовому просторі вирішено проблему пошуку розв'язку інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності, тобто коли не вистачає вихідної інформації для однозначної побудови інтерполяційного поліному, одержанню умов існування єдиного розв'язку та інваріантної розв'язуваності поставленої задачі.

У розділі 1 наведено постановки задач операторної інтерполяції та проведено аналіз літературних джерел за темою дисертаційних досліджень.

У розділі 2 основним об'єктом вивчення є інтерполяційна задача типу Лагранжа в гільбертовому та в скінченновимірному евклідовому просторах. Доведено теореми про точність та збіжність інтерполяційних процесів в гільбертовому просторі з мірою. У випадку, коли інтерполяційний процес не є збіжним, показано, що точність інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною, знайдено кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якого не покращує точності інтерполяції. В скінченновимірному евклідовому просторі для інтерполяційної задачі Лагранжа знайдено умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку в умовах, коли вихідної інформації про досліджуємий об'єкт недостатньо.

У підрозділі 2.1 доведено, що в абстрактному гільбертовому просторі з мірою в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу з мінімальною нормою до поліноміального оператору. Показано, що для лінійного оператора інтерполяційний процес є збіжним. Доведено, що в сепарабельному гільбертовому просторі з гаусовою мірою похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною.

У підрозділі 2.2 для гільбертового простору показано, що інтерполяційний поліном мінімальної норми та інтерполянт, що побудований за методом ортогональних моментів тотожно співпадають у випадку фіксованих інтерполяційних умов. Доведена збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми, що побудований за системою вузлів, яка обрана певним чином, до поліноміального оператора.

У підрозділі 2.3 у гільбертовому просторі з мірою розглянуто інтерполяційні формули Лагранжа, у випадку заданих значень нелінійного оператора у вузлах та показано, що інтерполянти асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня. Саме інтерполяційні поліноми з такою властивістю можна використовувати для побудови квадратурних формул при обчисленні континуальних інтегралів, в задачах ідентифікації та моделювання, в дослідженнях для нелінійних операторних систем.

У підрозділі 2.4 знайдено оцінку точності інтерполяції поліноміального та цілого операторів у разі збуреної вихідної інформації та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якої не покращує точності інтерполяційних формул.

У підрозділі 2.5 для цілого та поліноміального функціоналів, що визначені на просторі $L_2(0,1)$ та мають збурені значення у вузлах інтерполяції, знайдено оцінку точності у випадку, коли скалярні добутки, що містяться в інтерполяційній формулі Лагранжа обчислюються наближено. Одержано кількість інтерполяційних вузлів перевищення якої не покращує оцінку точності.

У підрозділі 2.6 для цілого та поліноміального функціоналів, що визначені на просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(0, \pi)$ та мають збурені значення у вузлах інтерполяції, знайдено оцінку точності у випадку, коли скалярні добутки, що містяться в інтерполяційній формулі Лагранжа обчислюються наближено. Одержано кількість інтерполяційних умов перевищення якої не покращує оцінку точності.

У підрозділі 2.7 знайдено умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі Лагранжа в евклідовому просторі в умовах недовизначеності. При цьому показано, що розв'язок єдиний та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів при фіксованих інтерполяційних умовах.

У розділі 2.8 в лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі досліджена точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Показано, що ця інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

У розділі 3 основним об'єктом вивчення є інтерполяційний поліном Ньютона інтегрального вигляду, що побудований на континуальній множині вузлів.

В підрозділі 3.1 в лінійному топологічному просторі для оператора однієї змінної знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду. Розглянуто приклади таких інтерполянтів.

В підрозділі 3.2 в лінійному топологічному просторі наведено узагальнення інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних в сенсі визначення умов, за яких має місце континуальність відповідної множини вузлів.

У розділі 4 основним об'єктом вивчення є інтерполяційна задача типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі з мірою та в скінченновимірному евклідовому просторі.

В підрозділі 4.1 у гільбертовому просторі з мірою побудовано поліном типу Ерміта у випадку, коли задані значення нелінійного оператора та його перші диференціали Гато у вузлах. Доведено, теорему про інтерполянт, що має мінімальну норму на множині інтерполяційних поліномів Ерміта з фіксованими інтерполяційними умовами. Узагальнено цю теорему для задачі з довільними інтерполяційними умовами Ерміта. Показано, що інтерполянт мінімальної норми асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня. Розглянуто питання про точність та збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора в разі зростання кількості вузлів.

У підрозділі 4.2 у гільбертовому просторі з мірою розглянуто інтерполяційні поліноми типу Ерміта, у випадку заданих значень нелінійного оператора та його диференціалів Гато у вузлах до певного порядку включно. Показано, що інтерполянти асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня. Наведено інтерполяційні формули Ерміта-Біркхофа та Абеля-Гончарова, що є гранично інваріантними відносно поліномів. Дані формули є альтернативою відомим операторним інтерполянтам, набагато простіші за конструкцією побудови та асимптотично інваріантні щодо поліномів відповідного степеня. Наявність оцінок точності дозволяє застосовувати такі інтерполянти для наближення поліноміальних, цілих та диференційованих операторів.

У підрозділі 4.3 розглянуто інтерполяційні задачі Ерміта в скінченновимірному евклідовому просторі у випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато до першого та до другого порядків відповідно у вузлах інтерполяції. Показано, що ці задачі мають єдиний розв'язок мінімальної норми серед усіх інтерполянтів, що відповідають фіксованим інтерполяційним умовам. Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку цих задач. Показано, що інтерполянт мінімальної норми є розв'язком задачі Ерміта в умовах недовизначеності, тобто коли вихідної інформації недостатньо, щоб однозначно визначити інтерполяційний поліном.

У підрозділі 4.4 у гільбертовому просторі з мірою доведено теорему про інтерполяційний поліном Ерміта-Біркхофа, що має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів, які відповідають фіксованим інтерполяційним умовам та показано, що він є єдиним розв'язком відповідної інтерполяційної задачі.

У підрозділі 4.5 у лінійному нескінченновимірному нормованому просторі та в скінченновимірному евклідовому просторі показано, що інтерполяційний поліном Ерміта мінімальної норми містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтерполяційних формул Ерміта на поліномах відповідного степеня в евклідовому просторі.

У розділі 5 розглянуто розв'язання прикладних задач на підставі одержаних результатів в дисертаційній роботі.

В підрозділі 5.1 пропонуються нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь (еквівалентні теоремі Кронекера-Капеллі) та нерівностей (еквівалентні теоремі С.М.Чернікова), пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах.

В підрозділі 5.2 знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь в евклідовому просторі та показано, що вони еквівалентні умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня, значення якого на спеціальних інтерполяційних вузлах збігаються з відповідною лінійною системою алгебраїчних рівнянь, тобто лінійною системою, до якої зводиться система поліноміальних рівнянь за допомогою заміни змінних.

В підрозділі 5.3 застосовано одержані результати дисертаційної роботи до розв'язання прикладних задач: побудовано алгоритм для задачі оберненої інтерполяції для знаходження розв'язку лінійного операторного рівняння, розглянуто побудову поверхонь за допомогою інтерполяційного полінома мінімальної норми, на підставі цих результатів розв'язано задачу про визначення траєкторії руху об'єкта.

Список використаних джерел

[1] Авербух В. И. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах/ В. И. Авербух, О. Г. Смолянов. // Успехи математических наук. — 1967. — 22, №6. — С. 201 – 260.

[2] Айзенберг Л. А. К решению систем нелинейных алгебраических уравнений с помощью многомерного логарифмического вычета. О разрешимости в радикалах / Л. А. Айзенберг, В. А. Болотов, А. К. Цих. // Доклады АН СССР. — 1980. — 252, №1. — С. 11 – 14.

[3] Антосик П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. — М.: Мир, 1976. — 311 с.

[4] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Алберт. — М.: Наука, 1977. — 224 с.

[5] Астионенко И. А. Трикубиская интерполяция по Кунсу как задача на геометрическую вероятность / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко. // Вісник Харьківського національного університету. — 2010. — №926. — С. 25 – 30.

[6] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. — М.: Наука, 1965. — 407 с.

[7] Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

[8] Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — Москва; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. — 2002. — 848 с.

[9] Бабенко К. Є. Про інтерполяцію функції двох змінних в обмеженій області за ї ї значеннями на множині кривих, заданих параметрично / К. Є. Бабенко, В. Л. Макаров, Р. С. Хапко, В. В. Хлобистов. // Доповіді Національної академії наук України. — 2013. — №2. — С. 7 – 12.

[10] Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. — М.: Наука, 1973. — 632 с.

[11] Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М.; Наука, 1969. — 368 с.

[12] Березин И. С. Методы вычислений. Том 1 / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М.: Наука, 1966. — 632 с.

[13] Бэслер И. О приближении нелинейных операторов полиномами Вольтера / И. Бэслер, И. К. Даугавет. // Труды Санкт-Петербургского математического общества. — 1991. — С. 53 – 64.

[14] Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. — М.: Мир, 1974. — 126 с.

[15] Вулих В. З. Введение в функциональный анализ / В. З. Вулих. — М.: Наука, 1967. — 415 с.

[16] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит., 2010. — 558 с.

[17] Гихман И. И. Теория случайных процессов. Том 1 / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1971. — 664 с.

[18] Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. — М.: Гостехиздад, 1954. — 327 с.

[19] Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. — М., Мир, 1979. — 304 с.

[20] Даугавет И. К. О полиномиальном приближении операторов / И. К. Даугавет. // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета, серия 1, выпуск 3. — 1994. — №15. — С. 23 – 26.

[21] Демків І. І. Інтерполяційні операторні поліноми в гільбертовому просторі / І. І. Демків. // Вісник Національного унівеситету "Львівська політехніка". Серія фізико-математичні науки. — 2011. — №696. — С. 56 – 63.

[22] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 512 с.

[23] Директор С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. — М.: Мир, 1974. — 464 с.

[24] Жидков Н.П. Линейные апроксимации функционалов / Н. П. Жидков. — М.: Физматлит., 1977. — 262 с.

[25] Жуковский Е. Л. Введение в теорию систем / Е. Л. Жуковский, Р. Ш. Липцер. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — т. 15, №2 — С. 489 – 492.

[26] Евграфів М. А. Інтерполяційна задача Абеля – Гончарова (Сучасні проблеми математики) / М. А. Евграфов. — Видавництво: держав. зд. техн.–теор. літ., 1954. — 128 с.

[27] Егоров А. Д. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. Н. Соболевский, Л. А. Янович. — Минск: Наука и техника, 1985. — 310 с.

[28] Ермаков С. М. О метрических теоремах в теории интерполирования / С. М. Ермаков // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. — 1993. — Вып. 1, №1. — С. 26 – 29.

[29] Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье / В. К. Задирака. — Киев: Наукова думка, 1983. — 213 с.

[30] Задє Л.. Теория линейных систем / Л. Задє, Ч. Дезоер. — М.: Наука, 1970. — 703 с.

[31] Игнатенко М. В. Применение преобразования Ганкеля для построения формул операторного интерполирования / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович. // Весці Нацiональної акадeмiї навук Беларусi. Серiя: фiзiко-математiческi навукi. — 1997. — №2. — С. 5 – 10.

[32] Игнатенко М. В. Применение преобразования Фурье и синус (косинус)–преобразования для построения формул операторного интерполирования / М. В. Игнатенко. // Вестнiк Белорускoго государственного унiверсiтета, Серия 1. Физика. Математика. Информатика. — 1997. — №3. — С. 53 – 58.

[33] Игнатенко М. В. Об операторных интерполяционных формулах специального вида с двукратными узлами / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович. // Весці Нацiональної акадeмiї навук Беларусi. Серiя: фiзiко-математiческi навукi. — 1997. — №4. — С. 35 – 41.

[34] Игнатенко М. В. Формулы операторного интерполирования ньютоновского типа на пространствах функций многих переменных / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович. // Весці Нацiональної акадeмiї навук Беларусi. Серiя: фiзiко-математiческi навукi. — 1998. — №3. — С. 25 – 30.

[35] Игнатенко М. В. Об интерполировании дифференцируемых операторов, заданных на пространствах вектор-функций /М. В. Игнатенко, Л. А. Янович. // Труды Института математики Национальной академии наук Беларуси. — 1998. — Т. 1. — С. 125 – 132.

[36] Игнатенко М. В. К теории операторного интерполирования в пространствах прямоугольных матриц / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович. // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2022. — том 3. — с. 91 -– 106.

[37] Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1968. — 624 с.

[38] Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Мир, 1971. — 400 с.

[39] Кантарович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика / Л. В. Кантарович. // Успехи математических наук. — 1948. — Т. 3, вып. 6. — С. 89 – 185.

[40] Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Кантарович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 741 с.

[41] Кашпур О.Ф. Матричная модификация формул эрмитовой интерполяции операторов в гильбертовом пространстве / О. Ф. Кашпур. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 1994. — №78. — С. 28 – 37.

[42] Кашпур О. Ф. Поліноміальна інтерполяція операторів в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур. — Дисертація кандидата фізико-математичних наук: 01.01.07. — Київ, 1996. — 90 с.

[43] Кашпур О.Ф. Про точні на поліномах інтерполяційні формули в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева, В. В. Хлобистов. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2007. — №1. — С. 168 – 172.

[44] Кашпур О. Ф. Розв'язок інтерполяційних задач типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, О. Д. Трубецкая. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2012. — №12 — С. 122 – 127.

[45] Кашпур О. Ф. До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах / О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов. // Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — №10. — С.10 – 14.

[46] Кашпур О. Ф. Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком / О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов. // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — №8. — С.12 — 17.

[47] Кашпур О. Ф. Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь в евклідових просторах / О. Ф. Кашпур. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2021. —№1. — С.74 – 81.

[48] Кашпур О. Ф. Фундаментальні поліноми інтерполяційної формули Ерміта в лінійному нормованому та в евклідових просторах / О. Ф. Кашпур. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2022. — №2. — С. 50 – 58 .

[49] Ковальчик И. М. Обобщенный винеровский интеграл и его приложения / И. М. Ковальчик, Л. А. Янович. — Минск: Наука и техника, 1989. — 221 с.

[50] Ковальчик Ю. Інтеграли Вінера та Фейнмана: обчислення і нові можливості застосування / Ю. Ковальчик. — Львів, Вертикаль, 1998. — 266 с.

[51] Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. — М.: Мир, 1969. — 447 с.

[52] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Физматлит, 2009. — 572с.

[53] Кононюк А. Е. Обобщенная теория моделирования. Начала. Книга 1. Часть 2. / А. Е. Кононюк. — Київ, Освіта України, 2012. — 708с.

[54] Крейн С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. — М.: Наука., 1972. — 544 с.

[55] Крылов В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. — М.: Наука, — Том 1. — 1976. — 304 с.; Том 2. — 1977. — 400 с.

[56] Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М.: Физматлит., 1963. — 431 с.

[57] Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

[58] Литвин О. М. Інтерлінація функцій / О. М. Литвин. — Харків: "Основа ХДУ, 1992. — 234 с.

[59] Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. — 544 с.

[60] Литвин О. М. Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації / О. М. Литвин, Є. Ю. Матвєєва, В.

І. Межуєв // Управляющие системы и машины. — 2010. — №3. — С. 33 -– 47.

[61] Литвин О. М. Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємоперпендикулярних смугах / О. М. Литвин, Є. Ю. Матвєєва // Управляющие системы и машины. — 2011. — №1. — С. 33 -– 41.

[62] Литвин О. М. Інтерспрітація функцій двох змінних на системі перенних смуг / О. М. Литвин, Є. Ю. Матвєєва // Управляющие системы и машины. — 2013. — №2. — С. 33 -– 41.

[63] Литвин О. М. Обработка аэрокосмических снимком с помощью интерстрипации функций двух переменных / О. М. Литвин, Є. Ю. Матвєєва // Управляющие системы и машины. — 2013. —№2. — С. 111 -– 124.

[64] Литвин О. М. Узагальнена інтерстріпація функцій двох змінних / / О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Славік // Кібернетика та системний аналіз. — 2018. — т. 54, №3. — С. 141 -– 150.

[65] Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация / П. Ж. Лоран — М.: Мир, 1975. — 496 с.

[66] Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М.: Наука, 1965. — 520 с.

[67] Макаров В. Л. Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів / В. Л. Макаров, І. І. Демків, Б. Р. Михальчук. // Доповіді Національної академії наук України. —- 2003. —- № 7. —- С. 7 — 12.

[68] Макаров В. Л. Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук СССР. — 1989. — 307, №3. — С. 534 – 537.

[69] Макаров В. Л. Об общей структуре полиномиальных функциональных интерполянтов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук СССР. — 1991. — 318, №4. — С. 805 – 808.

[70] Макаров В. Л. Полиномиальное интерполирование нелинейных функционалов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук СССР. — 1991. — 321, №4. — С. 470 – 473.

[71] Макаров В. Л. Полиномиальное интерполирование операторов в гильбертовых пространствах / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук России. — 1992. — 324, №4. — С. 742 – 745.

[72] Макаров В. Л. Эрмитова интерполяция операторов в гильбертовых пространствах / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук России. — 1992. — т. 327, №2. — С.183 – 186.

[73] Макаров В. Л. Полиномиальное интерполирование операторов в векторных пространствах / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук России. — 1993. — 329, №2. — С. 135 – 139.

[74] Макаров В. Л. Повышение точности приближений полиномиальных операторов в гильбертовых пространствах методом интерполирования / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук России. — 1994. — 334, №1. — С. 20 – 22.

[75] Макаров В. Л. Полиномиальное интерполирование операторов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 1994. — №78. — С. 18 – 27.

[76] Макаров В. Л. К задаче ермитовой интерполяции в гильбертовом пространстве / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 1994. — №78. — С. 38 – 48.

[77] Макаров В. Л. Основы теории полиномиального операторного интерполирования / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. — Киев: Институт математики НАН Украины, 1998. — 278 с.

[78] Макаров В. Л. Интегральные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур , Б. Р. Михальчук // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №6. — С. 779 – 790.

[79] Макаров В. Л. Існування єдиного, інваріантного інтерполяційного операторного полінома на гільбертовому просторі / В. Л. Макаров, І. І. Демків. // Доповіді Національної академії наук України. — 2003. — №12. — С. 21 – 26.

[80] Макаров В. Л. Про континуальні вузли інтерполювання формул типу Ньютона та Ерміта в лінійних топологічних просторах / В. Л. Макаров, І. І. Демків, В. В. Хлобистов. // Доповіді Національної академії наук України. — 2007. — №12 . — С. 22 – 27.

[81] Макаров В. Л. Інтерполяційні інтегральні операторні дроби в банаховому просторі / В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків. // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — №3 . — С. 17 – 23.

[82] Макаров В. Л. Інтерполяція функціоналів багатьох змінних / В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків. // Доповіді Національної академії наук України. — 2009. — №5. — С.29 – 35.

[83] Макаров В. Л. Функціональні поліноми Ерміта в просторі $Q[0,1]$ / В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків. // Доповіді Національної академії наук України. — 2007. — №8. — С.21 – 25.

[84] Макаров В. Л. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби / В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, Б. Р. Михальчук. // Український математичний журнал — 2003. — т.55, №4. — С.479-488.

[85] Макаров В. Л. Интерполирование операторов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Л. А. Янович. — Киев: Наукова думка, 2000. — 406 с.

[86] Макаров В. Л. До питання континуальності інтерполяційних вузлів для операторів у лінійних топологічних просторах / В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Український математичний журнал — 2010. — т.62, №4. — С.494 – 502.

[87] Манюк Е. М. Интерполяционные многочлены второго порядка для функционалов, заданных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций / Е. М. Манюк, Л. А. Марневская // Весці Нацiональной академії навук Беларусі. Серія фізіко-математіческіх навук— 1996. — №1. — С. 8 – 15.

[88] Мираков В. Е. Принцип мажорант и метод касательных парабол для нелинейных функциональных уравнений / В. Е. Мираков. // Доклады академии наук СССР. Серия Физика. Математика. — 1957. — 113, №5. — С. 977 – 979.

[89] Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів / Б. Р. Михальчук. // Український математичний журнал. — 1999. — т.51, №3. — С.364 – 375.

[90] Михальчук Б. Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою функціональних поліномів та інтегральних ланцюгових дробів / Б.

Р. Михальчук. — Дисертація кандидата фізико-математичних наук: 01.01.07. — Луцьк, 2007. — 129 с.

[91] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1976. — 391 с.

[92] Михельсон В. С. О знаках решения системы линейных уравнений / В. С. Михельсон. // Успехи математических наук — 1954. — том 9. — 3(61). — С. 163 – 170.

[93] Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы / И. П. Мысовских. — М.: Наука, 1981. — 336 с.

[94] Новиков М. А. Одновременная диагонализация трех вещественных симметрических матриц / М. А. Новиков. // Известия вузов. — 2014. — №12. — С. 70 – 81.

[95] Ортега Дж. Итерацонные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт. — М.: Мир., 1975. — 560 с.

[96] Портер У. Современные основания общей теории систем / У. Портер. — М.: Наука. — 1953. — 527 с.

[97] Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теории вероятностей / Ю. В. Прохоров. // Теория вероятностей и ее применение – 1956. – том 1, выпуск 2. — С. 177 – 238.

[98] Прохоров Ю. В. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. — М.: Наука, 1973. — 494 с.

[99] Пупков К. И. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К. И. Пупков, В. И. Капалин, А. С. Ющенко. — М.: Наука, 1976. — 448 с.

[100] Пучков Г. Е. Критерии и методы идентификации систем / Г. Е. Пучков, Ц. С. Хатиашвили. — М.: Наука, 1976. — 448 с.

[101] Пытьев Ю. П. Псевдообратный оператор. Свойства и приложения / Ю. П. Пытьев. // Математический сборник. — 1982. — т.11, №1 — С. 19 – 49.

[102] Рао С. Р. Линейные статистические методы и их приложения / С. Р. Рао. — М.: Наука, 1968. — 547 с.

[103] Рвачев В. А. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. А. Рвачев. — Киев: Наук. думка, 1982. — 550 с.

[104] Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 587 с.

[105] Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975. — 231с.

[106] Свид І. В. Порівняльний аналіз методів визначення координат повітряних об'єктів системами широкозонової мультилатерації / І. В. Свид, В. В. Семенець, О. С. Мальцев, М. Г. Ткач, С. В. Старокожев, О. О. Даценко, І. О. Шевцов // Радіотехніка : Всеукраїнський міжвідомчий науково-технічний збірник. — 2022. — Випуск 209. — С. 162 – 177.

[107] Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве / А. В. Скороход. — М.: Наука, 1975. — 231 с.

[108] Соболевский П. И. Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере / П. И. Соболевский. // Известия академии наук БССР, Серия физико-математических наук. — 1975. — №2. — С. 5 – 12.

[109] Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – М.: Мир, 1985. — 263 с.

[110] Треногин В.А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Физматлит, 2002. — 495 с.

[111] То Х.–С. Гауссовские меры в банаховых пространствах / Х.–С. То. — М.: Мир, 1979. — 176 с.

[112] Торохтий А. П. Конструктивное приближение нелинейных операторов / А. П. Торохтий. // Известия ВУЗов, Математика. — 1991. — №7. — С. 81 – 84.

[113] Ульм С. Ю. Об интерполяционных методах решения нелинейных уравнений в пространствах Банаха / С. Ю. Ульм. // Известия академии наук ЭССР, Серия физико-математических и технических наук — 1963. — 12, №1. — С. 24 – 30.

[114] Ульм С. Ю. Об обобощенных разделенных разностях / С. Ю. Ульм. // Известия академии наук ЭССР, Серия: Физика. Математика. — 1967. — 16, №1. — С. 13 – 26.

[115] Ульм С. Ю. Об обобощенных разделенных разностях / С. Ю. Ульм. // Известия академии наук ЭССР, Серия: Физика. Математика. — 1967. — 16, №2. — С. 146 – 156.

[116] Ульм С. О построении обобщенных разделенных разностей / С. Ульм, В. Поль. // Известия академии наук ЭССР, Серия: Физика. Математика. — 1969. — 18, №1. — С. 100 – 102.

[117] Феденко Н. П. Интерполяционный аналог метода Чебышева для решения операторных уравнений / Н. П. Феденко // Доклады академии наук БССР. — 1972. — 16, №2. — С. 977 – 978.

[118] Форрестер Дж. Динамика развития города / Дж. Форрестер. — М.: Прогресс, 1974. — 281 с.

[119] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — Лань, т. 3, 2009. — 656 с.

[120] Хатсон В. Приложение функционального анализа и теория операторов / В. Хатсон, Дж. Пим. — М.: Мир, 1983. — 431с.

[121] Хаусхолдер А. С. Основи численного анализа / А. С. Хаусхолдер. — М.: Издательство иностранной литературы, 1956. — 320с.

[122] Хомченко А. Н. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность /А.Н. Хомченко, Н.А. Козуб // Проблеми інформаційних технологій. - Херсон: ХНТУ. — 2009. — № 5. — С. 145 – 148.

[123] Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

[124] Хлобыстов В. В. Оценка координат источников сигналов при сферическом фронте волны/ В. В. Хлобыстов // Кибернетика. — 1986. — №1 — С. 9 – 13.

[125] Хлобыстов В. В. Оценка координат источников сигналов и системы измерителей / В. В. Хлобыстов. // Доклады академии наук УССР. серия А. — 1987. — №7 — С. 68 – 70.

[126] Хлобыстов В. В. Полиномиальное интерполирование операторов / В. В. Хлобыстов. — Дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.01.07. — Київ, 1994. — 280 с.

[127] Хлобыстов В. В. О сходимости интерполяционного процесса к целому оператору в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов // Обчи-

слювальна та прикладна математика. — 1997. — №2 (82). — С. 109 – 111.

[128] Хлобыстов В. В. Об экстремальных задачах на множестве интерполяционных операторных полиномов в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов // Обчислювальна та прикладна математика. — 1997. — №2 (82). — С. 97 – 101.

[129] Хлобыстов В. В. О точности интерполирования полиномиальных операторов в гильбертовом пространстве с мерой / В. В. Хлобыстов // Проблемы управления и информатики — 1999. — №5. — С. 100 – 109.

[130] Хлобистов В. В. До питання про точність інтерполяції в гільбертовому просторі з мірою / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського нацонального університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 1999. — №2. — С. 313 – 318.

[131] Хлобыстов В. В. К вопросу о сходимости интерполяционных процессов в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — №6. — С. 166–172.

[132] Хлобыстов В. В. Интерполяционные полиномы в гильбертовом пространстве и некоторые экстремальные задачи / В. В. Хлобыстов. // Фундаментальная и прикладная матемаика. — 2000. — т.6, №1. — С. 237 – 247.

[133] Хлобыстов В. В. Интерполирование полиномиальных операторов в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 1995. — №79. — С. 85 – 91.

[134] Хлобыстов В. В. К задаче интерполирования полиномиальных операторов / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — №3. — С. 106 – 108.

[135] Хлобыстов В.В. Интерполяционные формулы типа Лагранжа в гильбертовом пространстве, инвариантные относительно полиномов / В. В. Хлобыстов. // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — №3. — С.179 – 184.

[136] Хлобыстов В. В. Анализ точности интерполирования целых операторов в гильбертовом пространстве при возмущенных узловых значениях / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №7. — С. 953 – 960.

[137] Хлобистов В. В. Про точність інтерполювання цілих та поліноміальних функціоналів в $\overset{0}{W}{}_2^1(0, \pi)$ у разі їх наближених вузлових значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичнінаки. — 2004 . — №1. — С. 279 – 285.

[138] Хлобистов В. В. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур. // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №2. — С. 437 – 448.

[139] Хлобистов В. В. Операторні інтерполянти в гільбертовому просторі асимптотично точні на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Поповічева // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №4 — С. 306 – 313.

[140] Хлобистов В.В. Інтерполяційне наближення поліномів Тейлора для диференційованих операторів в гільбертовому просторі / В. В. Хло-

бистов, Т. М. Поповічева. // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №2. — С. 324 – 330.

[141] Хлобыстов В. В. Об интерполяционном приближении дифференцируемых операторов в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов, Т. М. Поповичева. // Український математичний журнал. — 2006. — 58, №4. — С. 554 – 565.

[142] Хлобистов В. В. Об интерполяционном приближении дифференцируемых операторов в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобистов, Т. М. Малишева. // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. — 2006. — №3. — С. 270 – 277.

[143] Хлобистов В. В. Про множину операторних інтерполянтів, гранично інваріантних щодо поліномів / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева. // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. — 2006. — №2. — С. 246 – 252.

[144] Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, И. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655р.

[145] Худяков А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита-Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П. Худяков. // Весці Нацiональной академії навук Беларусі. Серія фізіко-математіческіх навук. — 2010. — №4. — С. 29 – 36.

[146] Худяков А. П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А. П. Худяков. // Весці Нацiональной академії навук Беларусі. Серія фізіко-математіческіх навук. — 2012. — №1. — С. 13 – 21.

[147] Черников С. Н. Обобщение теоремы Кронекера-Капелли о системе линейных уравнений / С. Н. Черніков. // Математический сборник. – 1944. – 15(57), №3. — С. 437 – 448.

[148] Черников С. Н. Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств / С. Н. Черніков. // Математический сборник. — 1956. — 38(80), №4. — С. 479 – 508.

[149] Чуйко С. М. Обобщение теоремы Ньютона-Канторовича для систем нелинейных вещественных кранений / С. М. Чуйко. //Доповіді Національної академії наук України. — 2020. — №3. — С. 3 – 9.

[150] Шилов Г. Е. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах / Г. Е. Шилов, Фан-Дык Тинь. — М.: Наука, 1967. — 192 с.

[151] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдварс. — М.: Мир, 1969. — 1072р.

[152] Яковлев М. Н. Разрешимость систем нелинейных уравнений при наличии (γ, δ) - пар сравнения / М. Н. Яковлев. // Zapisi Nauchnogo Seminara POMI — 1992. — 202. — С. 185 – 189.

[153] Янович Л. А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л. А. Янович. — Минск: Навука и тэхника. — 1976. — 384 с.

[154] Янович Л. А. Квадратичное интерполирование функционалов в пространствах непрерывно дифференцируемих функций одной и двух переменных / Л. А. Янович, Н. С. Жаврид. // Весці Національной академії навук Беларусі. Серія фізіко-математіческіх навук. — 1996.— №3 — Р. 8 – 15.

[155] Янович Л. А. О взаимосвязи интерполирования операторов и функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 1998. — 42, №3. — С. 9 – 16.

[156] Янович Л. А. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / Л. А. Янович, А. П. Худяков. // Весцi Нацiональной академiї навук Беларусi. Серiя фiзiко-математiческiх навук. — 2011. — 19, №2. — С. 103 – 114.

[157] Янович Л. А. Интерполяционные форулы Эрмита-Биркгофа для функций матричной переменной / Л. А. Янович. // Весцi Нацiональной академiї навук Беларусi. Серiя фiзiко-математiческiх навук. — 2005. — 49, №3. — С. 30 – 33.

[158] Янович Л. А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л. А. Янович, А. П. Худяков. // Весцi Нацiональной академiї навук Беларусi. Серiя фiзiко-математiческiх навук. — 2012. — 56, №1. — С. 16 – 22.

[159] Allasia G. Lagrange interpolation on arbitrarily distributed data in Banach spaces / G. Allasia, C. Bracco. // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2011. — Vol. 32, Iss.2. — P. 111 -– 125.

[160] Allasia G. Hermite-Birkhoff Interpolation on Arbitrarily Distributed Data in Banach Spaces / G. Allasia, C. Bracco. // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2013. — Vol. 34, Iss. 3. — P. 237 – 254.

[161] Anderson M. Complex Kergin Interpolation / M. Anderson, M. Passare/ // Journal of Approximation Theory. —- 1991. —- №64. — P. 214 -– 225.

[162] Anderson M. Complex Kergin interpolation and the Fantappie transform / M.Anderson, M.Passare. // Mathematische Zeitschrift. — 1991. — 208(2). — P.257 – -271.

[163] Bak T. Contributions to the Theory of Chemical Kinetics / T. Bak. — W A Benjamin Inc New York and Munksgaard; First Edition, 1963. — 101 p.

[164] Barnhill R. E. Smooth interpolation over triangles / R. E. Barnhill. // Computer aided geometric design, Academic Press, N.-Y. — 1974. — P. 45 – 70.

[165] Barnhill R. E. Polynomial interpolation to boundary data on triangles / R. E. Barnhill, J. A. Gregory. // Mathematics of Computation. — 1975. — 29, №131. — P. 726 – 735.

[166] Billings S. A. Identification of nonlinear system — servey / S. A. Billings, J. A. Gregory. // IEE Proceedings D. Control Theory and Applications — 1980. — 127, №6. — P. 272 – 285.

[167] Binderman. Initial operators for generalized in vertible operators / Binderman, Zbignew // Comment Mathematics XXXI. — 1991 — 31. — P. 25 – 37.

[168] Birkhoff G. Interpolation in one and two variables with application t G. Peacewise Hermite Into partial differential equtions / G. Birkhoff, M. Schultz, R. Varga // Numerical Mathematics — 1968 — №11. — P. 232 – 256.

[169] Bloom T. Kergin interpolation of entire functions / T.Bloom // Duke Mathematical Journal. — 1981. — 48. — P.69 – 83.

[170] L.Bos On Kergin interpolation in the disk / L.Bos // Journal of Approximation Theory — 1983. — 37. — P.251-261.

[171] Bruno V. L. An approximate Weierstrass theorem in topological vector space / V. L. Bruno. // Journal of Approximation Theory — 1984. — 42. — P. 1 – 3.

[172] Calvi J.-P. The polynomial projectors that preserve homogeneous differential relations: a new characterization on Kergin interpolation / J.-P.Calvi, L.Filipsson.// East Journal of Approximation. — 2004. — 10, №4. — P.451 – 454.

[173] Carnicer J. M. Multyvariate polynomial interpolation using even and odd polynomials / J. M.Carnicer, C. Godés. — Springer Science+Busness Media B. V., part of Springe Nature, BIY Numer Math., 2017. — 24 p.

[174] Carnicer J. M. Interpolation with symmetric polynomials / J. M.Carnicer, C. Godés. // Numerical Algorithm. — 2017. — №74 — P. 1 – 18.

[175] Chung K. C. On latticies admitting unique Lagrange representations / K. C. Chung, T. H. Yao. // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1977. — Vol. 14, Iss. 4. — P. 735 – 743.

[176] Chapko R. On the interpolation of a function on a bounded domain by its traces on parametric hypersurfaces / R. Chapko, K. Babenko, V. Makarov, V. Khlobystov. // International Journal of Computer Mathematics. — 2014. — №91(8). — P. 1673 – 1682.

[177] Chalmers B. L. Remarks of the rank of Hermite-Birkhoff interpolation / B. L. Chalmers, D. J. Johnson, F. T. Metcalf, G. D. Taylor. // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1994. — 11. — P. 254 – 259.

[178] Coons S.A. Surfaces for computer aided design of space forms/ S. A. Coons. // Report MAC-TR41, Project MAC., M.1.T, 1967. —- 105 p

[179] Courrieu P. Fast Computation of Moore-Penrose Inverse Matrices / P. Courrieu. // Neural Information Processing. — 2005. — 8, №2. — P. 25 – 29.

[180] Cowan I. D. Neural Networks / I. D. Cowan, E. R. Cocianielle. — Ed. N. Y.: Springer, 1968. — 181 p.

[181] Cox D. A. Applications of Polynomial Systems / D. A. Cox. — Publisher: AMS, Mathematics, 2020. — 250 p.

[182] Demkiv I. I. Interpolation functional polynomial of the fourth order which does not use substitution rule / I. I. Demkiv. // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2010. — №1 (100). — P. 40 – 59.

[183] De Figuciredo R. I. On the identification of nonlinear dynamical systems / R. I. De Figuciredo, Netravali. // IEEE Transactions on Automatic Control, February. — 1971. — AC, №16. — P. 26 – 38.

[184] De Santis R. M. On time–related propeties of nonlinear systems / R. M. De Santis, W. A. Porter // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1973. — №2 (24). — P. 188 – 206.

[185] Egorov A. D. Functional Integrals Approximate Evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 419 p.

[186] Fillipson L. Kergin interpolation in Banach Spaces / L. Fillipson. // Journal of Approximation Theory. — 2004. — №127. — P. 108 – 123.

[187] Forrester J. W. Urban Dynamics / J. W. Forrester. —– Cambridge,Massachussetts:M.I.T. Press, 1970. — 281 p.

[188] Forrest A. R. Interactive interpolation and approximation by Bezier polinomials / A. R. Forrest // The Computer Journal. — 1972. — V. 15. — №. 1. — P. 71 -– 79.

[189] Frechet M. Sur les fonctionelles continues / M. Frechet. // Annual de l'Ecole Normale Sup., Third Series — 1910. — №27. — P. 193 – 216.

[190] Gimeno V. Obtaining the EEG envelope in real time: a practical method based on homomorphic filtering / V. Gimeno. // Neuropsychobiology. — 1987. — №18. — P. 110 -– 112.

[191] Goel N. S. Nonlinear Models of Interacting Populations / N. S. Goel, S. C. Maitra, E. W. Montrol. — N.Y.: Academic Press, 1971. — 146 p.

[192] Gordon W. An Operator Calculus for Surface and Volume Modeling / W. Gordon.// IEEE Computer Graphics and Applications 3. — 1983. — №7. — P. 18 -– 22.

[193] Green D. G. A note on modelling muscle in physiological regulators / D. G. Green. // Journal of Medical and Biological Engineering (Pergamon Press) — 1969. — vol. 7. — P. 41 -– 48.

[194] Halme A. Polinomial operators for nonlinear systems analysis / A. Halme. // Doctoral dissertation in ACTA Polytechnika Scandinavica . — 1972. — №24.

[195] Haken H. Laser theory, in Handbuch der Physik / H. Haken. — S. Flügge, Ed. Berlin, Germany: Springer – Verlang, 1970, vol. 25. — 320 p.

[196] Howlett P. G. A methodology for constructiv approximation of nonlinear operators defined on noncompact set / P. G. Howlett, A. P. Torokhti. // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 1997. — 19, №2. — P. 118 – 122.

[197] Howlett P. G. Weak interpolation and approximation of non-linear operators on the space $C[0,1]$ / P. G. Howlett, A. P. Torokhti. // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 1998. — 19, №9-10. — P. 1043 – 1052.

[198] Istratesku V. I. A Weierstrass theorem for real Banach spaces / V. I. Istratesku. // J. Appr. Theory. — 1977. — 19, №2. — P. 118 – 122.

[199] Karlin S. On Hermite-Birkhoff interpolation / S. Karlin, J. M. Karon // Journal of Approximation Theory. — 1972. — 6. — P. 90 – 114.

[200] Kashpur O. F. Invariance and uniqueness of solutions to polynomial interpolation problems in Euclidean space / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 2, Iss. 119. — P. 8 – 14.

[201] Kashpur O. F. Lagrange interpolation formula in linear spaces. / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2018. — Vol., Iss. 128. — P. 61 – 67.

[202] Kashpur O. F. Hermite–Birkhoff Interpolation Polynomial of Minimum Norm in Hilbert Space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2021. — Vol. 57, Iss. 5. — C. 803 – 808 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 57, №. 5, 2022, pp. 150 – 156).

[203] Kashpur O. F. Solving Hermite interpolation problem in finite-dimensional Euclidean space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 2. — C. 259 –267 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 2, 2022, pp. 118 – 127).

[204] Kashpur O. F. Hermite Interpolation Polynomial for Functions of Several Variables / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 3. — C. 399 – 408 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 3, 2022, pp. 91 – 100).

[205] Kergin P. Interpolation of C functions / P. Kergin. — Thesis: University of Toronto, 1978.

[206] P.Kergin A natural interpolation of functions / P.Kergin // Journal of Approximation Theory. — 1980. — 29, №4. — P. 278 – 293.

[207] Khlobystov V. On Weak Convergence of an Iteration Process with Minimal Norm in a Hilbert Space / V. Khlobystov, E. Kashpur // Journal of Mathematical Sciences. — 2002. — Vol. 109. — P. 1791 – 1794 (Translate from Zhournal obchysluval‘noi ta prykladnoi matematyky. — 1998. —Vol. 84, №2. — C. 169 – 175).

[208] Khlobystov V. V. On accuracy of polynomial interpolation in Hilbert space in case of approximately given values of operator in nodes / V. V. Khlobystov, E. F. Kashpur // Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2002. — №1. — P. 168 – 174 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, №1, 2002, pp. 168 – 174).

[209] Khlobystov V. V. On estimates of accuracy of interpolation for polynomial and entire functionals in $L_2(0,1)$ / V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2004. — №1. — P. 91 – 97 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, № 1, 2004, pp. 91 – 97).

[210] König H. Vector–valued Lagrange interpolation and mtan convergence of Hermite series/ H. König. – Functional analysis (Lectures notes in pure and applied mathematics series 150) September, 1993. — p. 552.

[211] Labrousse J. Ph. Les operateurs points de continute pour la conorme et l'inverse de Moor–Penrose (Point – of – continuity operators for conorm and the Moor–Penrose inverse)/ J. Ph. Labrousse, M. Mbekhta. // Houston Journal of Mathematics. — 1992. — 18, №1 — P. 7 -– 23.

[212] Lotka A. J. Elements of Mathematical Biology / A. J. Lotka. — New York: Dover., 1957. — 465 p.

[213] Nashed M. Generalized Inverses and Applications / M. Nashed. — New York etc.: Academic Press, 1976. — 1054 p.

[214] Nazarzadeh A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation / A. Nazarzadeh, Kh. Rahsepar Fard, A. Mahmoodi. // Journal of Applied Mathematics. — 2016. — 122, №2 — P. 55 – 70.

[215] Ostrowski A. M. Solution of equations and systems of equations / A. M. Ostrowski. — University of Basel. Academic press, 1960. — 220 p.

[216] Makarov V. L. On the identification of non-linear operators and its application / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov. // Boundary elements IX: Mathematical and Computational Aspects, Springer-Verlag, Berlin. — 1987. — Vol. 1. — P. 43 – 48.

[217] Makarov V. L. The Newton-type interpolation formula for the nonlinear operators and it's application / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov. // Numarical Methods and application: Proceeding of the Second International Conference, Sofia, August 22–27, 1988. — Sofia: Publ. House, 1989. — P. 272 – 283.

[218] Makarov V. L. Methods of operator interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. — Київ: Інститутт математики НАН України, 2010. Т. 83. — 516 p.

[219] Makarov V. L. On continual interpolation nodes for operators in linear topological spaces./ V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — Novermber, 2010. — Vol. 62, Iss.04. — C. 564 – 574. (Ukrainian Original Vol. 62, Iss. 04, 2010, pp. 494 – 503).

[220] Makarov V. L. Operator Interpolation and Systems of Linear Equations and Inequalities in Euclidean Spaces. / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov,

O. F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — april, 2021. — т. 72. — №11. — C. 1758 – 1770 (Ukrainian Original Vol. 72, No. 11, November, 2020, pp. 1524 – 1535).

[221] Micchelli C. A. A constructive approach to Kergin interpolation in $\Re^k$ / C. A. Micchelli. // Rocky Mountain Journal of Mathematics. —- 1980. —- №10. — P. 485 -– 497.

[222] Micchelli C.A. formula for Kergin interpolation in $\Re^n$ / C. A. Micchelli, P. A. Milman. // Journal of Approximation Theory. — 1980. — № 29. — P. 294 -– 296.

[223] Monhler R. R. Bilinear Control Process / R. R. Monhler. N. Y.: Academic Press, 1974. — 223 p.

[224] Moska E. Determination of Volterra kernels from input-output data / E. Moska. // International Journal of Systems Science. — 1972. — 3, №4. — P.357 – 374.

[225] Pisarchuk A. N. Control of multystability in a directly modulated diode laser / A. N. Pisarchuk, B. F. Kuntsevich. // Transaction on Quantum Elektronics. — 2002. – №38 (1). — P.1594 – 1598.

[226] Porter W. A. An overview of polinomic system theory / W. A. Porter. // IEEE Proceeding Special issue on system theory — 1976. — 64, №1. — P.18 – 26.

[227] Porter W. A. Synthesis of polynomic system / W. A. Porter. // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1980. — 11, №2. — P.308 – 315.

[228] Porter W. A. Data interpolation: causality structure and system indefiation / W. A. Porter. // Information and Control. — 1975. — 29, №3. — P.217 – 233.

[229] Prenter P. M. A Weierstrass theorem for real separable Hilbert spaces / P. M. Prenter. // Journal of Approximation Theory. — 1970. — №3. — P. 341 – 351.

[230] Prenter P. M. Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces / P. M. Prenter. // Journal of Approximation Theory. — 1971. — 4, №4. — P. 419 – 432.

[231] Prenter P. On Polynomial Operators and Equations / P. M. Prenter. Nonlinear Functional Analysis and Application. N.Y.: Acad. Press. Rail Edition, 1971. — 566 p.

[232] Sandberg I. W. Approximately – finite memory and input-output maps / I. W. Sandberg // IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications. — 1992. — 39. — P. 549 – 556.

[233] Sandberg I. W. R_+ fading memory and extensions of input-output maps / I. W. Sandberg // IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications. — 2002. — 49. — P. 1586 – 1591.

[234] Shi Y. G. Theory of Birkhoff Interpolation / Y. G. Shi. — New York: Nova Science Publishers, 2003. — 253 p.

[235] Stone M. H. The generalized Weierstrass approximation theorem / M. H. Stone. // Mathematics Magazine. — 1948. — №21. — P. 167 – 183.

[236] Szederknyi G. Computational Analysis of Nonnegative Polynomial Systems / G. Szederknyi. — Publisher Scholars‘ Press, Engineering General, 2014. — 176 p.

[237] Timofte V. Stone-Weierstrass theorem revisited / V. Timofte. // Journal of Approximation Theory. — 2005. — 136. — P. 45 – 89.

[238] Torokhti A. On the constructive approximation of non-linear operators in the modelling of dynamical systems / A. Torokhti, P. G. Howlett. // J. Austral. Mat. Soc. Ser. B. — 1997. — 39. — P. 1 – 27.

[239] Yanovich L. A. Linear Interpolation of Operators in the Space of Continuously Differenyiable Function / L. A. Yanovich, B. I. Stepanov. — Minsk: Institute of Physics, 1995. — Vol. 2. — P. 76 – 82.

[240] Yanovich L. A. Some Interpolation Operator Formula in Functional Spaces / L. A. Yanovich, E. M. Manuk. — Minsk: Institute of Physics, 1995. — Vol. 8. — P. 265 – 270.

[241] Yanovich L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov. // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2011. — №2 (105) — P. 136 – 147.

[242] Yanovich L. A. Construction of Formulae of Operator Interpolation by means of Abel Integral Transform / L. A. Yanovich, M. V. Ignatenko. // Nonlinear phenomena in Complex systems: Proceeding of the sixth annual seminar, Minsk, Belarus, February 10–13, 1997 / B. I. Stepanov Institute of Physics [etc.]; ed.: V. I. Kuvshinov [et. al.] — Minsk: Institute of Physics, 1998. — Vol. 9. — P. 21 – 27.

[243] Yanovich L. A. Interpolation formulae for operators on Cartesian product of the functional spaces / L. A. Yanovich, M. V. Ignatenko. // Modern Trends in Computational Physics: Book of Abstract of the First International Conference,Dubna, Russia, June 15 – 20, 1998 / Join Institute for Nuclear Research [etc.]; ed.: D. I. Morgan [et. al.]. — Dubna: JINR, 1998. — P. 170.

[244] Zhao T. G. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First-and Second-Order Derivative / T. G. Zhao, Y. J. Li. // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2016. — Vol.4, №7 — P. 1269 – 1274.

ДОДАТОК 1. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Khlobystov V. On Weak Convergence of an Iteration Process with Minimal Norm in a Hilbert Space / V. Khlobystov, E. Kashpur // Journal of Mathematical Sciences. — 2002. — Vol. 109, №4. — P. 1791 – 1794 (Translate from Zhournal obchysluval'noi ta prykladnoi matematyky. — 1998. —Vol. 84, №2. — C. 169 – 175).

2. Хлобистов В. В. До питання про точність інтерполяції в гільбертовому просторі з мірою / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 1999. — №2. — С. 313 – 318.

3. Khlobystov V. V. On accuracy of polynomial interpolation in Hilbert space in case of approximately given values of operator in nodes / V. V. Khlobystov, E. F. Kashpur // Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2002. — №1. — P. 168 – 174 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, №1, 2002, pp. 168 – 174).

4. Хлобыстов В. В. Анализ точности интерполирования целых операторов в гильбертовом пространстве при возмущенных узловых значениях / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №7. — С. 953 – 960.

5. Макаров В. Л. Интегральные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур , Б. Р. Михальчук // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №6. — С. 779 – 790.

6. Khlobystov V. V. On estimates of accuracy of interpolation for polynomial and entire functionals in $L_2(0,1)$ / V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur //

Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2004. — №1. — P. 91 – 97 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, № 1, 2004, pp. 91 – 97).

7. Хлобистов В. В. Про точність інтерполювання поліноміальних та цілих функціоналів в $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ у разі їх наближених вузлових значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2004. — №1. — С. 279 – 286

8. Хлобистов В. В. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №2. — С. 316 – 324.

9. Хлобистов В. В. Операторні інтерполянти в гільбертовому просторі асимптотично точні на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Поповічева // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №4 — С. 242 – 248.

10. Хлобистов В. В. Про множину операторних інтерполянтів, гранично інваріантних щодо поліномів / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2006. — №2 — С. 246 – 252.

11. Кашпур О.Ф. Про точні на поліномах інтерполяційні формули в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева, В. В. Хлобистов// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2007. — №1. — С. 168 –172.

12. Makarov V. L. On continual interpolation nodes for operators in linear topological spaces / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — Novermber, 2010. — Vol. 62, Iss. 04. — C. 564 – 574. (Ukrainian Original Vol. 62, Iss. 04, 2010, pp. 494 – 503).

13. Кашпур О. Ф. Розв'язок інтерполяційних задач типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, О. Д. Трубецкая // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2012. — №4 — С. 122 – 127.

14. Kashpur O.F. Invariance and uniqueness of solutions to polynomial interpolation problems in Euclidean space / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of computational and applied mathematics. — 2015. — Vol. 2, Iss. 119. — P. 8 – 14.

15. Кашпур О. Ф. До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах./ О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов// Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — №10. — С. 10 – 14.

16. Кашпур О. Ф. Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком. / О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — №8. — С. 12 – 17.

17. Kashpur O. F. Lagrange interpolation formula in linear spaces / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of computational and applied mathematics. — 2018. — Vol. 2, Iss. 128. — P. 61 – 67.

18. Makarov V. L. Operator Interpolation and Systems of Linear Equations and Inequalities in Euclidean Spaces / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — april, 2021. — Vol. 72. — №11. — C. 1758 – 1770 (Ukrainian Original Vol. 72, No. 11, November, 2020, pp. 1524 – 1535).

19. Kashpur O. F. Hermite–Birkhoff Interpolation Polynomial of Minimum Norm in Hilbert Space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2021. — Vol. 57, Iss. 5. — C. 803 – 808 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 57, №. 5, 2022, pp. 150 – 156).

20. Кашпур О. Ф. Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь в евклідових просторах/ О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2021. —№1. — С. 74 – 81.

21. Kashpur O. F. Solving Hermite interpolation problem in finite-dimensional Euclidean space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 2. — C. 259 –267 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 2, 2022, pp. 118 – 127).

22. Kashpur O. F. Hermite Interpolation Polynomial for Functions of Several Variables / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 3. — C. 399 – 408 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 3, 2022, pp. 91 – 100).

23. Кашпур О. Ф. Фундаментальні поліноми інтерполяційної формули Ерміта в лінійному нормованому та в евклідових просторах / О. Ф. Кашпур // IX Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика / Computational and Applied Mathematics присвяченої 100-річчю академіка І.І. Ляшка, Київ, Україна, 10 – 11 жовтня 2022 р., Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2022. — №2. — С. 50 – 58 .

24. Хлобыстов В. В. О точности интерполирования целых операторов в пространстве $L_2(0,1)$ / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // IX Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, Україна,

16 – 19 травня 2002 р. — С. 387.

25. Хлобистов В. В. Про точність інтерполяції операторних поліномів в гільбертовому просторі у випадку збурених їх значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика"присвячена 80-річчю академіка НАН України І.І.Ляшка Київ, Україна, 9 – 10 вересня 2002 р. — С. 97.

26. Хлобистов В. В. Аналіз точності інтерполяції поліноміальних та цілих функціоналів у випадку наближених вузлових значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // X Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 13 – 15 травня 2004 р. — С. 539.

27. Хлобыстов В. В. Асимптотически инвариантный относительно полиномов интерполянт типа Эрмита в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Міжнародна конференція "Питання оптимізації обчислень"(ПОО – XXXII) присвячено пам'яті академіка В. С. Михалевича, Кацивелі, Україна, 19 – 23 вересня 2005 р. — С. 209.

28. Хлобистов В. В. Про множину операторних інтерполянтів, гранично інваріантних щодо поліномів / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева // XI Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 18 – 20 травня 2006 р. — С. 633.

29. Кашпур О. Ф. Побудова операторних інтерполянтів типу Ерміта, що є асимптотично точними на поліномах / О. Ф. Кашпур // III Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика"присвячена пам'яті академіка НАН України І. І. Ляшка, Київ, Україна, 11 – 12 вересня 2009 р. — . С. 41.

30. Гаркуша В. И. Вычислительные технологии для задач прогнозирования / В. И. Гаркуша, Е. Ф. Кашпур, А. И. Рыженко, Д. И. Черний

// IV Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 8 – 10 вересня 2011 р. — С. 61.

31. Черній Д. І. Технології прогнозування наслідків небезпечних техногенних впливів та катастроф / Д. І. Черній, В. І. Гаркуша, А. Д. Головенко, О. Ф. Кашпур, А. І. Риженко // XVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU – 2011), Skhidnytsia, Ukraine, May 23 –27, 2011. — С. 174 – 176.

32. Гаркуша В. І. Обчислювальні технології комп'ютерного моделювання / В. І. Гаркуша, О. Ф. Кашпур, А. В. Кузьмін, А. І. Риженко, Д. І. Черній // VII Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика Київ, Україна, 9 – 10 жовтня 2014 р. — С. 37.

33. Кашпур О. Ф. Про інваріантну розв'язуваність задачі інтерполяції функції двох змінних/ О. Ф. Кашпур // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability"(DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 27 – 29, 2015. — С. 74.

34. Kashpur O. F. The interpolation of many-variable functions / O. F. Kashpur // XXXV International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2020), Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, May 11 – 15, 2020. — С. 50 – 51.

35. Kashpur O. F. The interpolation problem ana system of nonlinear equations in Euclidean spaces / O. F. Kashpur // XXXVI International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2021), Skhidnytsia, Ukraine, May 11 – 14, 2021. — С. 43.

36. Kashpur O. F. On the invariance and uniqueness of the solution of Hermite interpolation problems in Euclidean space / O. F. Kashpur // XXXV

International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU – 2022), Sheki–Lankaran, Republic of Azerbaijan, November 23 – 25, 2022. — C. 50 – 51.

ДОДАТОК 2. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ДО РОЗДІЛУ 5.3.1

Задача оберненої інтерполяції

$$x''(t) - tx(t) = -f(t), \;\; x(0) = x(1) = 0,$$

$$x^*(t) = xsin(\pi t), \;\; f(t) = -(\pi^2 + 1)tsin(\pi t),$$

$$\Delta_m = \|x^*(t) - P(-f)\|_{C[0,1]}$$

$$P(-f) = \left\langle \vec{x}, \Gamma_m^{-1} \vec{l}(-f) \right\rangle.$$

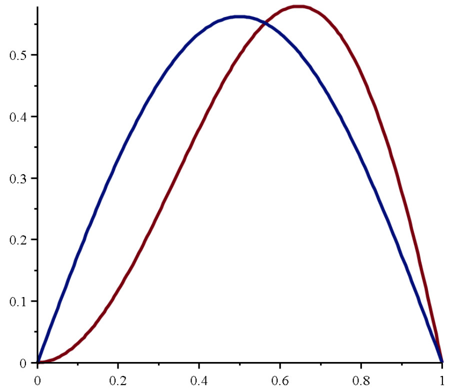


Рис. 1.1: $m = 1, \Delta_1 = 0,2209665958$

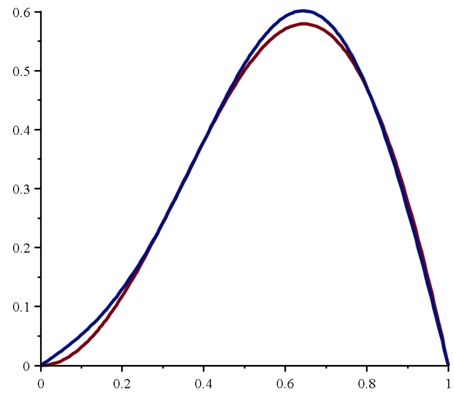


Рис. 1.2: $m = 3, \Delta_3 = 0,0221711549$

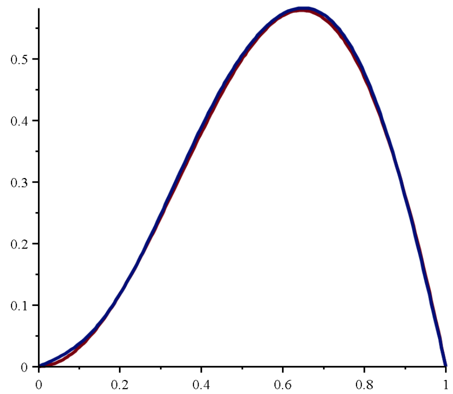


Рис. 1.3: $m = 5, \Delta_5 = 0,0089698160$

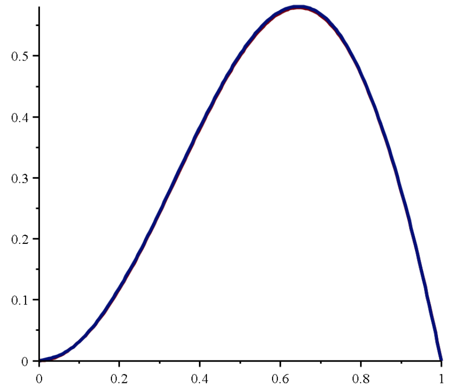


Рис. 1.4: $m = 10, \Delta_{10} = 0,0030220978$

Задача оберненої інтерполяції

$$x''(t) - (1 + cos(t))x(t) = -f(t), \;\; x(0) = x(1) = 0,$$

$$x^*(t) = xsin(\pi t), \;\; f(t) = -(cos(t) + \pi^2 + 2)tsin(\pi t),$$

$$\Delta_m = \|x^*(t) - P(-f)\|_{C[0,1]}$$

$$P(-f) = \left\langle \vec{x}, \Gamma_m^{-1}\vec{l}(-f) \right\rangle .$$

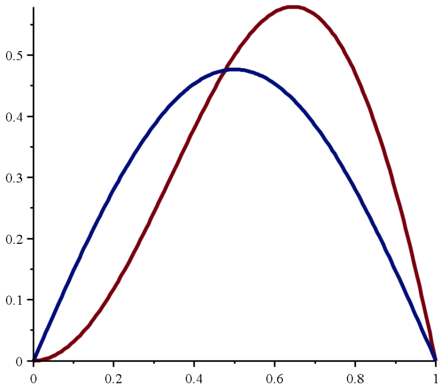


Рис. 1.1: $m = 1, \Delta_1 = 0,1940637617$

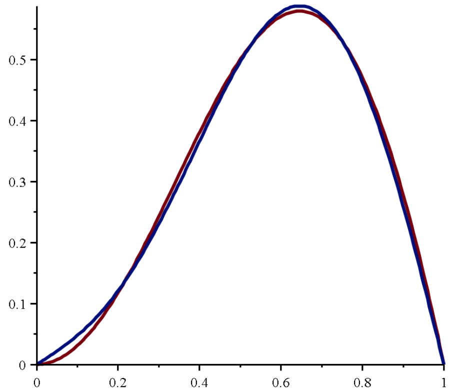


Рис. 1.2: $m = 3, \Delta_3 = 0,01908881009$

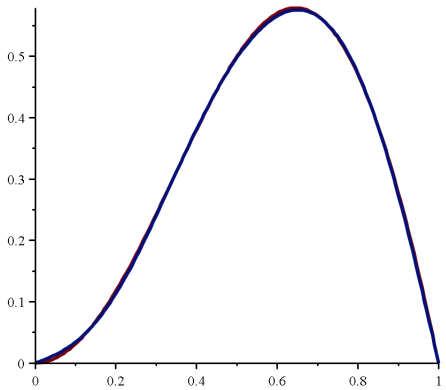


Рис. 1.3: $m = 5, \Delta_5 = 0,006717596705$

Задача оберненої інтерполяції

$$x''(t) - t^2 x(t) = -f(t), \;\; x(0) = x(1) = 0,$$

$$x^*(t) = xsin(\pi t), \;\; f(t) = -(t + \pi^2 + 1)tsin(\pi t),$$

$$\Delta_m = \|x^*(t) - P(-f)\|_{C[0,1]}$$

$$P(-f) = \left\langle \vec{x}, \Gamma_m^{-1}\vec{l}(-f) \right\rangle.$$

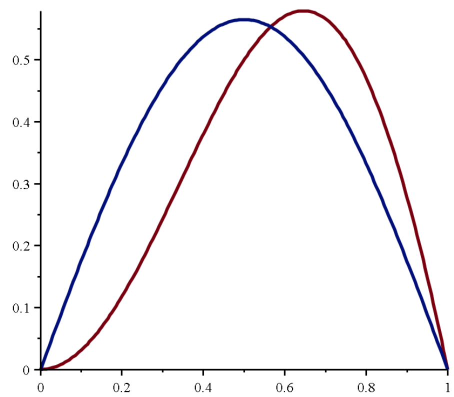


Рис. 1.1: $m = 1, \Delta_1 = 0,2227782037$

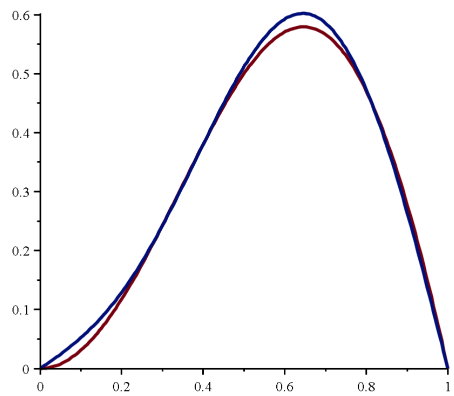


Рис. 1.2: $m = 3, \Delta_3 = 0,02281985668$

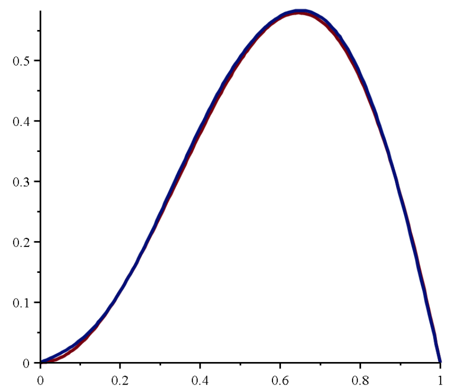


Рис. 1.3: $m = 5, \Delta_5 = 0,0090383047$

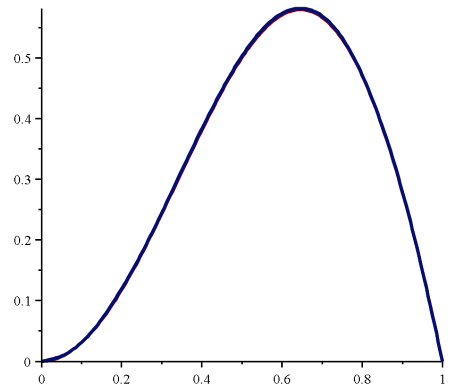


Рис. 1.4: $m = 10, \Delta_{10} = 0,0031306846$

ДОДАТОК 2. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ДО РОЗДІЛУ 5.3.2

Побудова поверхонь

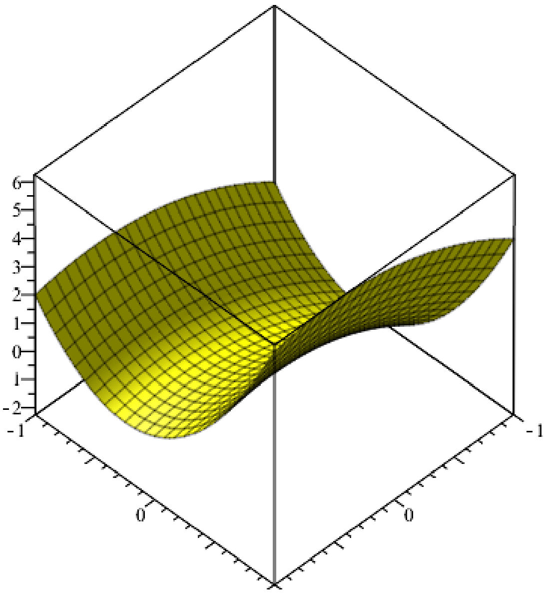


Рис. 1.1: $z = x + 2y - x^2 + 4y^2$

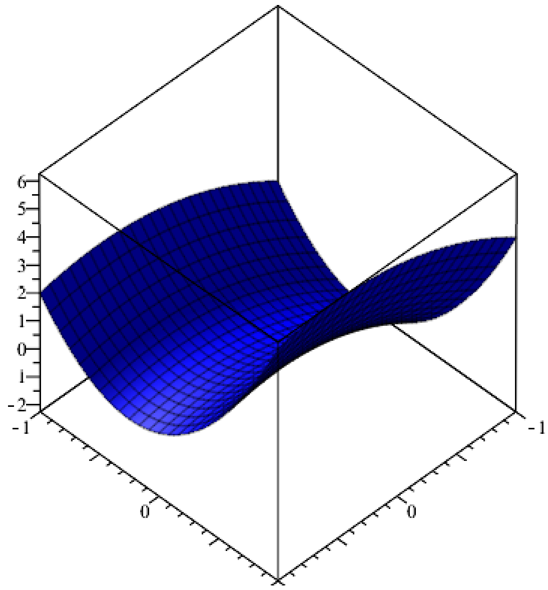


Рис. 1.2: $m = 6, \Delta_6 = 0,00000000$

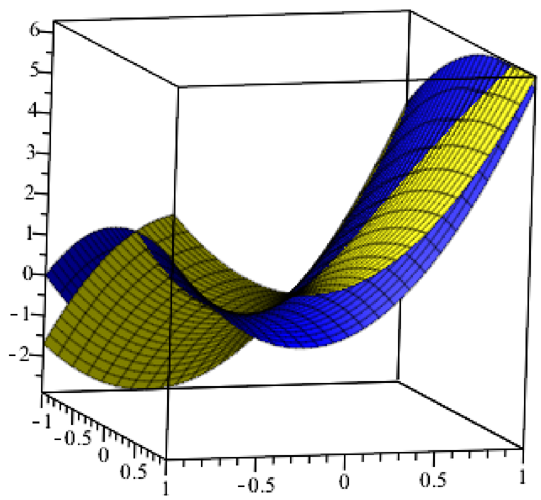


Рис. 1.3: $m = 2, \Delta_2 = 3,507500000$

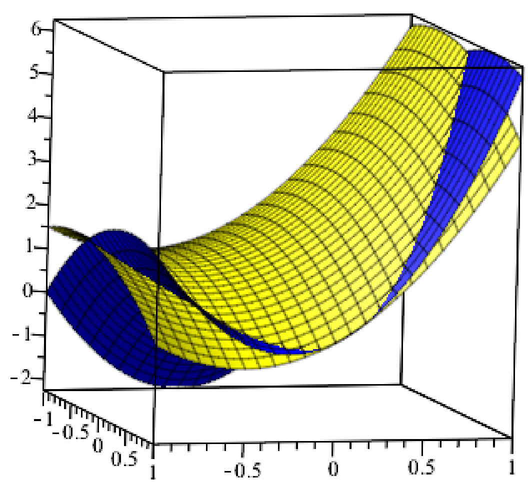


Рис. 1.4: $m = 4, \Delta_4 = 2,000000000$

Побудова поверхонь

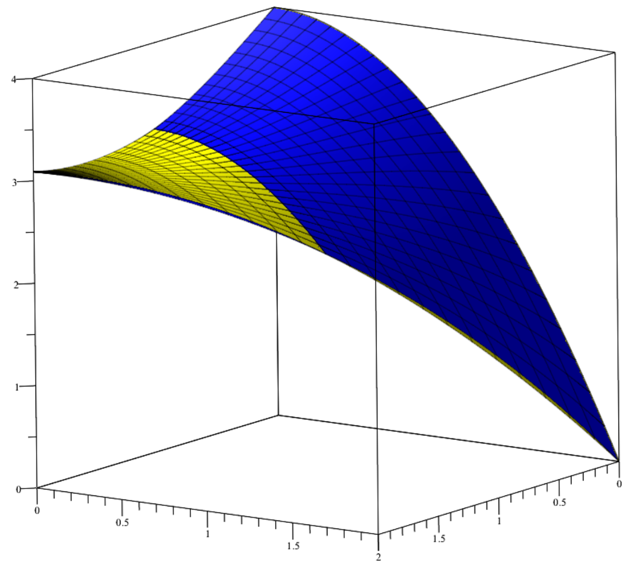


Рис. 1.1: $4 - sinx - z - y^2 = 0, n = 2, m = 5, \Delta_5 = 0,0400102874$

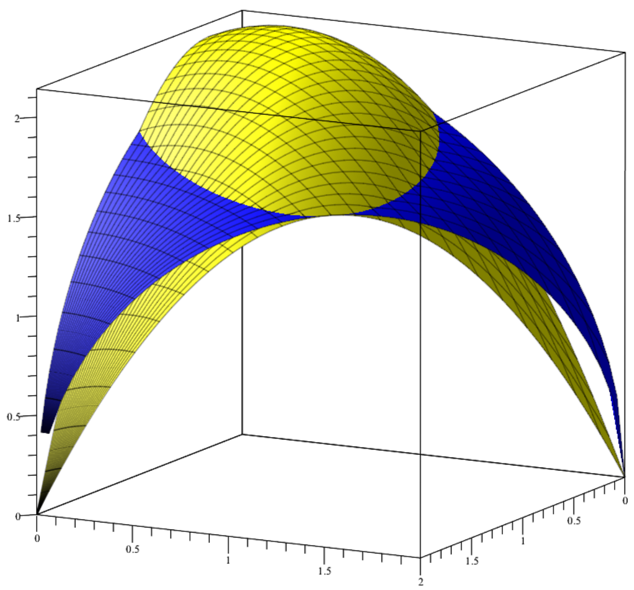


Рис. 1.2: $4 - x^2 - z^2 - y^2 = 0, n = 2, m = 4, \Delta_4 = 0,409966530$

Побудова поверхонь

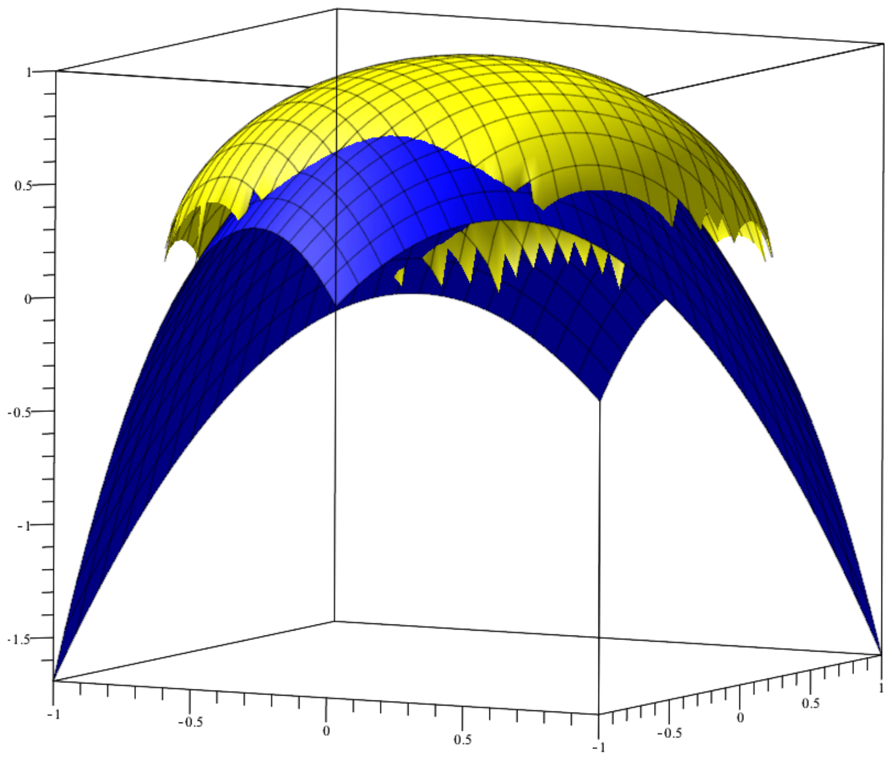


Рис. 1.1: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, n = 3, m = 7, \Delta_7 = 0,5317677287$

Побудова траєкторії руху об'єкта

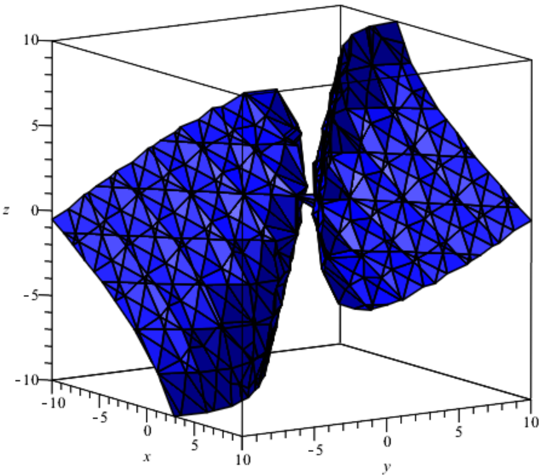


Рис. 1.1: $m = 6, P_2^{(1)}(\gamma)$

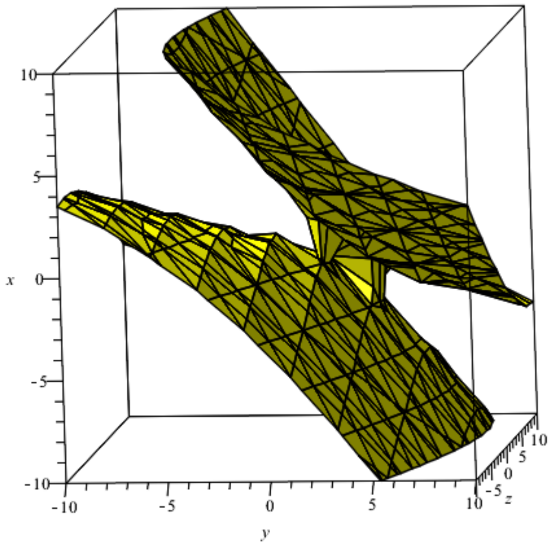
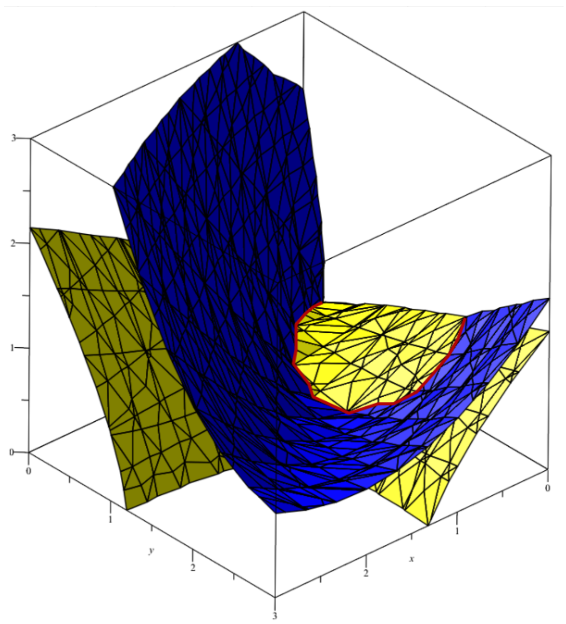


Рис. 1.2: $m = 6, P_2^{(2)}(\gamma)$



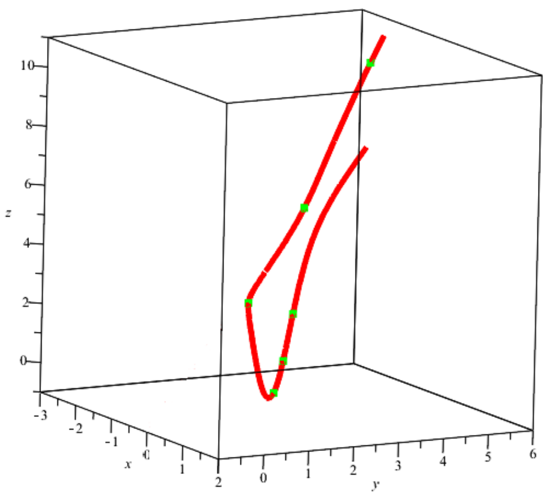


Рис. 1.3: Траєкторія

ДОДАТОК 4. ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ В НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
м. Київ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Декан факультету комп’ютерних
наук та кібернетики
Київського національного
університету імені Тараса Шевченка
__________Анатолій АНІСІМОВ
«___» ________2023 р.

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики * Україна * Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційної роботи Кашпур Олени Федорівни «Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах», поданої на здобуття наукового ступеню доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи.

Наукові результати, що одержані в процесі написання дисертаційної роботи Кашпур Олени Федорівни «Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах», впроваджені у 2006 – 2010 навчальних роках в навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики при викладанні дисципліни «Ідентифікація систем при детермінованих впливах» (лекції для студентів 3 курсу ОС Бакалавр, освітня програма «Прикладна математика»), в 2018-2022 навчальних роках впроваджено про формуванні дисциплін «Технології чисельного моделювання» (лекції та лабораторні заняття для студентів ОС Магістр 2 року навчання), «Методи негладкої оптимізації» (лекції для студентів ОС Магістр 1 року навчання) в межах освітньої програми спеціальності 113, Прикладна математика факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Завідувач кафедри обчислювальної математики,
доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАНУ Сергій ЛЯШКО

Завідувач кафедри моделювання складних систем,
доктор тех. наук, доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Професор кафедри моделювання складних систем,
доктор доктор фізико-математичних наук,
професор Володимир ПІЧКУР

ДОДАТОК 5. ДОВІДКА ПРО ВИКОРИСТАННЯ В НАУКОВО-ДОСЛІДНИХ РОБОТАХ № 97059, № 16КФ015-02, ДЕРЖБЮДЖЕТНІЙ ТЕМІ № 022БФ015-03

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
М. Київ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи
Київського національного
університету імені Тараса Шевченка
________проф. Ганна ТОЛСТАНОВА
«21» 03 2023 р.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка • Україна • Ідентифікаційний код 02070944

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційної роботи Кашпур Олени Федорівни «Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах», поданої на здобуття наукового ступеню доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи.

Результати дисертаційної роботи Кашпур Олени Федорівни «Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах» були використані при виконанні науково-дослідних робіт та держбюджетної теми:

«Теорія інтерполяції нелінійних операторів в гільбертових просторах» (науково-дослідна робота № 97059, номер державної реєстрації 0197U003075),

«Теорія і методи розробки інтелектуальних інформаційних технологій та систем» (науково-дослідна робота № 16КФ015-02, державний номер реєстрації 0116U006378),

«Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони» (держбюджетна тема № 022БФ015-03, державний номер реєстрації 0122U002026) , що виконувалися у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Декан факультету комп'ютерних наук
та кібернетики, керівник науково-дослідної
роботи № 16КФ015-02, доктор фіз.-мат.наук
член-кореспондент НАНУ Анатолій АНІСІМОВ

Завідувач кафедри обчислювальної математики,
керівник держбюджетної теми № 16КФ015-02,
доктор фіз.-мат. наук,
член-кореспондент НАНУ Сергій ЛЯШКО
Керівник науково-дослідної роботи № 97059,
професор, доктор фіз.-мат. наук Володимир ХЛОБИСТОВ