НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМЕНІ В. М. ГЛУШКОВА

**Кашпур Олена Федорівна**

УДК 517.988

# Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2023

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук, професор
**Касьянов Павло Олегович,**
Навчально-науковий комплекс інститут прикладного системного аналізу "Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
директор;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
**Попов Олександр Володимирович,**
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, старший науковий співробітник відділу чисельних методів та комп'ютерного моделювання;

доктор фізико-математичних наук, професор
**Хапко Роман Степанович,**
Львівський національний університет імені Івана Франка, завідувач кафедри обчислювальної математики.

Захист відбудеться «07» липня 2023 р. о 11:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.194.02 Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою: 03187, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою: 03187, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 40.

Автореферат розіслано «06» червня 2023 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Дмитро ТЕРЛЕЦЬКИЙ

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Задача поліноміальної інтерполяції операторів в абстрактних гільбертових та скінченновимірних евклідових просторах є актуальною проблемою прикладної математики.

Розв'язання задач ідентифікації об'єктів невідомої структури, синтезу оптимальних систем (у формулюванні Н. Вінера) можна розглядати як варіанти задач про наближення операторів у відповідних функціональних просторах. Інтерполяція є одним із методів апроксимації операторів.

Обґрунтуванням наближення поліномами неперервної функції однієї змінної є теорема Вейєрштраса. У подальшому М. Стоун узагальнив цю теорему на клас неперервних функцій багатьох змінних. Для неперервного функціоналу аналогом теореми Вейєрштраса є теорема Фреше. П. Прентер доведено аналогічну теорему для неперервного оператора, що заданий на дійсному сепарабельному просторі. Для банахових просторів такий результат одержаний В. Істратеску та І. К. Даугаветом. На підставі наведених теорем вивчення багатьох нелінійних систем можна звести до їх поліноміального наближення. Відомі аналітичні методи ідентифікації, які розроблено для лінійних систем, можна застосовувати для полілінійних та поліноміальних. Отже, теорію поліноміального наближення можна розглядати як зв'язок між лінійною та нелінійною теоріями.

Важливість досліджень в області поліноміальної інтерполяції підтверджується багатьма прикладними задачами. На практиці досить часто зустрічаються нелінійні системи, які описуються операторними поліномами. Такі системи знаходять численні застосування в таких галузях як розпізнавання образів, екологія, динаміка урбанізації, економіка, нейрологія, теорії лазерів, інтелектуальному аналізі даних, балістиці, оптиці, тощо.

В теорії наближення операторів розроблено інтерполяційні методи апроксимації функціоналів та операторів як у функціональних, так і у лінійних просторах. Основні результати, що стосуються цього питання, одержано такими авторами, як С. Ю. Ульм, В. В. Полль, У. Портер, П. М. Прентер, П. І. Соболевський, Л. А. Янович, В. Л. Рвачов, В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, О. М. Литвин, P. Kergin, L. Fillipson, C. A. Michelli, І. І. Демків, Р. С. Хапко, А. П. Худяков, G. Allasia.

Зазначимо деякі особливості поліноміальної операторної інтерполяції. Насамперед, це неєдиність розв'язку інтерполяційної задачі. На відміну від класичних інтерполяційних формул, операторний інтерполянт не зберігає поліноми відповідного степеня. Властивість збереження багаточленів відповідного степеня має важливе значення при одержанні оцінок точності інтерполяційних формул та дослідженні збіжності інтерполяційних процесів у разі збільшення числа вузлів, а також для побудови квадратурних формул при обчисленні континуальних інтегралів. Саме інтерполяційні поліноми з такою властивістю можна використовувати в задачах ідентифікації, моделювання та для широкого класу задач, що дозволяють звести вивчення нелінійної структури до вивчення його поліноміального наближення.

Одним із важливих аспектів поліноміальної інтерполяції є конструктивна побудова операторного інтерполянта, аналіз точності та питання збіжності інтерполяційних процесів. Незначна кількість публікацій у цій області насамперед обумовлена неабиякими труднощами дослідження таких наближень.

У працях В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова побудовано основи загальної теорії поліноміальної операторної інтерполяції в абстрактних гільбертових та векторних просторах. Авторами розглянуто інтерполяційні операторні задачі типу Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа: конструктивно побудовано всю множину інтерполянтів, одержано необхідні та достатні умови існування операторного інтерполяційного поліному, описано всю множину операторних інтерполяційних поліномів відповідного степеня та з цієї множини виділено підмножину інтерполянтів, що зберігають багаточлени відповідного степеня, знайдено оцінки точності та досліджено збіжність деяких інтерполяційних процесів. Оскільки в цих роботах побудовано всю множину інтерполянтів заданого степеня у довільному векторному просторі, то результати робіт авторів, що наведені вище, є частинним випадком результатів, одержаних В. Л. Макаровим та В. В. Хлобистовим.

При розв'язанні задач, пов'язаних із точністю інтерполяції, у випадку довільної нелінійності апроксимуючого оператора, результати мають у більшості випадків теоретичний інтерес та малоефективні на практиці. Якщо розглянути поліноміальну інтерполяцію у гільбертовому просторі, то можна отримати більш вагомі результати. Зауважимо, що при розв'язанні прикладних задач поширені випадки, коли інформація про оператор, що апроксимуємо, є збуреною, а отже, постає питання про точність інтерполяційних формул та вплив неусувної похибки на розв'язок задачі.

На практиці здебільшого не вистачає інформації про об'єкт, що досліджуємо. Як відомо, в скінченновимірному евклідовому просторі для існування єдиного розв'язку інтерполяційної задачі потрібно виконання певних співвідношень між числом вузлів та степенем полінома, тому застосувати класичні інтерполяційні формули для такого випадку неможливо. До того ж, узагальнення класичних інтерполяційних формул для функцій багатьох змінних у разі збігу кількості вузлів інтерполяції та розмірності простору поліномів, на якому шукаємо розв'язок, призводить до громіздких формул, які є складними за реалізацією. Отже, в скінченновимірному евклідовому просторі потребує вирішення проблема знаходження розв'язку інтерполяційної задачі в умовах недовизначеності.

Усе вище викладене обумовлює актуальність та важливість теорії поліноміальної операторної інтерполяції у гільбертовому та в скінченновимірному евклідовому просторах та доцільність її подальшого розвитку, а саме: вирішення проблеми пошуку розв'язку інтерполяційних задач в умовах недовизначеності, знаходження умов існування єдиного розв'язку та інваріантної розв'язуваності поставленої задачі в скінченновимірному евклідовому просторі; знаходження оцінок точності інтерполяційних формул та дослідження збіжності інтерполяційних процесів у гільбертовому просторі з мірою у разі збуреної вихідної інформації про оператор, що апроксимуємо, знаходження інтерполянтів, які мають властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня.

Ця дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку результатів робіт В. Л. Макарова та В. В. Хлобистова та одержанню нових результатів, що пов'язані з поліноміальною операторною інтерполяцією.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконана в рамках науково-дослідної роботи № 97059 "Теорія інтерполяції нелінійних операторів в гільбертових просторах" (номер державної реєстрації 0197U003075, термін виконання 1998-2000 рр.) на кафедрі методів обчислювального експерименту факультету кібернетики, науково-дослідної роботи № 16КФ015-02 "Теорія і методи розробки інтелектуальних інформаційних технологій та систем" (державний номер реєстрації 0116U006378, термін виконання 2023-2025 рр.) на кафедрі математичної інформатики, держбюджетної теми № 022БФ015-03 "Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони" (державний номер реєстрації 0122U002026, термін виконання 2023 р.) на кафедрі обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

**Мета і завдання дослідження.**

Метою дисертаційної роботи є розвиток теорії поліноміальної операторної інтерполяції в гільбертових та в скінченновимірних евклідових просторах.

Завданнями роботи є:

— вирішення проблеми пошуку розв'язку інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності, одержання умов єдиності розв'язку та інваріантної розв'язуваності цих задач в скінченновимірному евклідовому просторі;

— дослідження збіжності інтерполяційних процесів та знаходження оцінок точності інтерполяційних формул Лагранжа у випадку збуреної вихідної інформації в гільбертовому просторі з мірою;

— дослідження точності інтерполяційних формул Лагранжа та Ерміта на поліномах відповідного степеня;

— розв'язання екстремальних задач на множині інтерполяційних поліномів Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі з мірою;

*Об'єкт досліджень* — поліноміальні, цілі та нелінійні оператори.

*Предмет досліджень* — задачі операторної інтерполяції типу Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа, збіжність інтерполяційних процесів та оцінки точності інтерполяційних формул.

*Методи дослідження* — методи функціонального аналізу, методи операторної інтерполяції, теорія матриць, методи обчислювальної математики.

**Наукова новизна одержаних результатів.**

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертаційного дослідження і виносяться на захист, полягають у тому, що:

*вперше:*

— вирішено проблему пошуку розв'язку інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності в скінченновимірному евклідовому просторі: знайдено умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі. Показано, що розв'язок є єдиним та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів при фіксованих інтерполяційних умовах;

— доведено, що в гільбертовому просторі з мірою загалом відсутня збіжність інтерполяційного процесу Лагранжа з мінімальною нормою до поліноміального оператору, при цьому похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною, знайдено систему вузлів інтерполяції, для якої інтерполяційний процес є збіжним, досліджено точність та збіжність інтерполяційного процесу Ерміта;

— одержано оцінки точності інтерполяції поліноміальних, цілих операторів в гільбертовому просторі з мірою та поліноміальних, цілих функціоналів, що визначені на просторах $L_2(0,1)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ у випадку збуреної вихідної інформації та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якої не покращує точності інтерполяції;

— у лінійному топологічному просторі знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду;

— у гільбертовому просторі побудовано інтерполянти Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа, що є асимптотично точними на поліномах відповідного степеня;

— розв'язано екстремальні задачі на множині інтерполяційних поліномів Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі з мірою;

— досліджено точність інтерполяційних формул мінімальної норми Лагранжа та Ерміта на поліномах відповідного степеня в лінійному нескінченновимірному просторі із скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі. Доведено, що інтерполяційні формули містять фундаментальні поліноми;

— знайдено нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь та нерівностей, які пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах. Знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь.

*Удосконалено* методи дослідження збіжності інтерполяційних процесів та доведення оцінок точності інтерполяційних формул у випадку збуреної вихідної інформації про оператор, що апроксимуємо, в гільбертовому просторі з мірою.

*Набула подальшого розвитку* теорія операторної інтерполяції в гільбертових та скінченновимірних евклідових просторах.

**Практичне значення одержаних результатів.**

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати дисертаційного дослідження можуть знайти практичне застосування при розв'язанні прикладних задач таких, як: ідентифікація систем, розпізнавання образів, екології, балістики, економіки, геодезії, нейрології, теорії лазерів, тощо. Іншим напрямом використання одержаних результатів є застосування побудованих на континуальній множині вузлів інтерполяційних поліномів для обчислення континуальних інтегралів. Наукові та прикладні результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні курсів "Ідентифікація систем при детермінованих впливах" для студентів кафедри обчислювальної математики, "Технології чисельного моделювання", "Методи негладкої оптимізації" для студентів освітньої програми "Прикладна математика" освітнього ступеня "Магістр". Також ці результати можуть знайти застосування в навчальних процесах фізико-математичних факультетів інших закладів вищої освіти України та закордонних наукових установ.

**Особистий внесок здобувача.**

Загальний план дослідження, його основний напрям визначено доктором фізико-математичних наук, професором Хлобистовим В. В. Усі основні наукові результати дисертаційної роботи одержано автором самостійно. В роботах [1 - 4, 6 - 8, 14 - 17], що виконані у співавторстві з Хлобистовим В. В., якому належить постановки задач, особистий внесок здобувача полягає в доведенні теоретичних результатів; в [5] здобувачем написано вступ, наведено приклади до доведених теорем та зроблено висновки; [9 - 11] здобувачу належить побудова інтерполянтів Ерміта та Ерміта-Біркхофа степеня більше другого та доведення теорем про асимтотичне збереження інтерполянтом поліномів відповідного степеня; в роботі [12] здобувачем доведено теореми, всі основні твердження роботи доведені з рівноцінним внеском кожного із співавторів; у [13] автору належить постановка задачі, побудова інтерполяційних поліномів Ерміта та Ерміта-Біркхофа; у [18] співавторам належить постановка задачі, ідея доведення теорем щодо систем нерівностей належить В. Л. Макарову, здобувачем доведено теоретичні результати. Статті без співавторів виконані самостійно.

**Апробація результатів дисертації.**

Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на міжнародних наукових конференціях та семінарах, серед яких: Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (м. Київ, Україна, 2002, 2004, 2006 рр.); Міжнародна конференція “Обчислювальна та прикладна математика” (м. Київ, Україна, 2002, 2009, 2011, 2014, 2022 рр.); Міжнародна конференція “Питання оптимізації обчислень” (ПОО – XXXII, м. Кацивелі, Україна, 2005 р.); International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU – 2011, 2021, Skhidnytsia, Ukraine); XVII International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability” (DSMSI, Kyiv, Ukraine, 2015); XXXV International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU – 2020, Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, 2020); XXXVII International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU – 2022, Sheki–Lankaran, Republic of Azerbaijan, 2022); науковий семінар “Обчислювальна та прикладна математика” кафедри обчислювальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник — член-кореспондент НАН України С. І. Ляшко, 2023); науковий семінар “Методи обчислювальної математики” інституту кібернетики імені В. М. Глушкова (керівники — академік НАН України В. К. Задірака, академік НАН України О. М. Хіміч, проф. А. В. Гладкий, 2022); науковий семінар Науково-дослідного відділу системної математики Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” (керівник — проф. П. О. Касьянов, 2022).

**Публікації.**

Основні результати дисертації опубліковано у 36 наукових працях, серед яких: 23 статі у наукових фахових виданнях України [1 - 23], 10 статей у виданнях, що індексуються міжнародними наукометричними базами Scopus та Web of Science Core Collection [1, 3, 6, 12, 14, 17 – 19, 21, 22], зокрема 5 статей опубліковано без співавторів, 13 праць та тез доповідей наукових конференцій [24 - 36].

**Структура і обсяг дисертації.**

Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації становить 314 сторінок, з них основного тексту — 248 сторінок. Список використаних джерел налічує 244 найменування та займає 31 сторінку, 5 додатків розміщеноно на 16 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**У вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, зазначено зв’язок роботи з науковими програмами, темами; визначено мету, завдання, об’єкт, предмет, методи дослідження, розкрито наукову новизну, практичне значення одержаних результатів; наведено характеристику апробацій і публікацій дисертанта, у яких відображено основні положення роботи, структуру та обсяг дисертації.

**У першому розділі** розглянуто постановку задач операторної інтерполяції типу Лагранжа, Ерміта, Ерміта-Біркхофа, проведено аналіз літературних джерел, що присвячені питанням поліноміальної операторної інтерполяції та наведено зміст дисертації по розділах.

**У другому розділі** для інтерполяційної задачі Лагранжа досліджено питання про точність та збіжність інтерполяційного процесу в гільбертовому просторі з мірою у випадку збуреної вихідної інформації, в скінченновимірному евклідовому просторі розв’язано задачу інтерполяції в умовах недовизначеності та знайдено умови єдиності розв’язку та інваріантної розв’язуваності поставленої задачі. У лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі досліджено точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Показано, що інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

Зокрема, у **підрозділі 2.1** доведено, що в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу, але похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною.

Нехай $X, Y$ — гільбертові простори ($X$ є сепарабельним), $\mu$ — деяка міра на $X$ така, що її перший момент дорівнює нулю, а другий обмежений, $B$ — кореляційний оператор міри, він є ядерним, $KerB = \emptyset$. Позначимо через $\Pi_n$ множину неперервних операторних поліномів степеня $n$ вигляду:

$$\Pi_n = \left\{ P_n(x) : P_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n \right\}, \tag{1}$$

де $L_0 \in Y$, $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k})$, $k = \overline{1,n}$, $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — неперервна, симетрична $k$-лінійна операторна форма. Оснастимо множину $\Pi_n$ скалярним добутком

$$(P_1, P_2)_H = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \Big( L_k^{(1)}(v_1, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, \ldots, v_k) \Big)_Y \mu(dv_k) \cdots \mu(dv_1) \quad (2)$$

та нормою

$$\|P\|_H = (P, P)_H^{\frac{1}{2}},$$

$L_k^{(1)}, L_k^{(2)}$ — $k$-лінійні операторні форми поліномів $P_1, P_2$ відповідно, $(\cdot, \cdot)_Y$ — скалярний добуток в $Y$.

Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — система власних ортонормованих елементів оператора $B$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — система відповідних власних значень, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ . Нехай надалі $x_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, тоді $Bx_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Введемо матрицю

$$\Gamma_m = \left\| \sum_{k=0}^{n} (Bx_i, x_j)_X^k \right\|_{i,j=1}^{m},$$

де $(\cdot, \cdot)_X$ — скалярний добуток в $X$. Оператор $F : X \to Y$ заданий своїми значеннями $F(Bx_i)$, $i = \overline{1, m}$. Визначимо задачу поліноміальної операторної інтерполяції таким чином: знайти поліном $P^I \in \Pi_n$, для якого виконуються інтерполяційні умови

$$P^I(Bx_i) = F(Bx_i), \;\; i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Позначимо $\overline{F} = \{F(Bx_i)\}_{i=1}^{m}$, $Z$ — матрицю, рядками якої є координати власних векторів матриці $\Gamma$, що відповідають нульовим власним числам. Нехай виконується умова існування розв'язку задачі (3), яка отримана в роботах В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова

$$Z\overline{F} = \overline{0}.$$

Наведемо основні результати цього підрозділу.

**Теорема 1.** *У гільбертовому просторі з мірою в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу*

$$P^*(x) = \left\langle \overline{F}, \Gamma_m^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(x_i, x)_X^k\}_{i=1}^{m} \right\rangle \quad (4)$$

*до оператора* $F \in \Pi_n$, *де* $\langle \overline{z}, \overline{\alpha} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} z_i \alpha_i$, $\langle\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} (u_i, v_i)_Y$,

$$\overline{z} = \{z_i\}_{i=1}^{m}, \overline{u} = \{u_i\}_{i=1}^{m}, \overline{v} = \{v_i\}_{i=1}^{m} \in Y^m, \overline{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{m} \in R^m.$$

*Якщо ж* $n = 1$, *то інтерполяційний процес збігається до оператора* $P^*$ *в метриці простору* $H$ *коли* $m \to \infty$.

У працях В. В. Хлобистова доведено, що інтерполянт (4) має мінімальну норму на множині інтерполяційних поліномів

$$\Pi_n^I = \left\{P : P \in \Pi_n, P(Bx_i) = F(Bx_i), i = \overline{1,m}\right\},$$

тобто є розв'язком екстремальної задачі

$$\|P^*\|_H^2 = \min_{P \in \Pi_n^I} \|P\|_H^2 = \left\langle\left\langle \Gamma_m^{-1}\overline{F}, \overline{F}\right\rangle\right\rangle.$$

У подальшому в цьому підрозділі показано, що в сепарабельному гільбертовому просторі $X$ похибка інтерполяції може бути як завгодно малою величиною.

**Теорема 2.** *Для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер* $M = M(\varepsilon)$ *і така гаусова міра* $\mu = \mu(\varepsilon)$ *на гільбертовому сепарабельному просторі* $X$, *що коли* $m > M$, *то*

$$\Delta_m = \|F - P^*\|_H < \varepsilon,$$

*де* $F \in \Pi_n$, $\|\cdot\|_H$ *визначається континуальним інтегралом за гаусовою мірою* $\mu$.

У **підрозділі 2.2** для дослідження збіжності інтерполяційного процесу за вузли інтерполяції було обрано множину $\aleph(m)$:

$$\aleph(m) = \left\{Bx_0 = 0,\ Bx_i = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k},\ k = \overline{1,n}, i_j = \overline{1,m},\ m \geq n\right\}, \quad (5)$$

де $\{e_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована система елементів із $X$, число елементів множини $\aleph(m)$ дорівнює $1+N$, $N = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^k$. Розглянемо інтерполяційний операторний поліном, який побудовано за системою вузлів $Bx_i, i = \overline{0,N}$, вигляду

$$P_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k \left(\sum_{i_k=1}^{m} (x, e_{i_k})_X e_{i_k}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})_X (x, e_{i_2})_X \cdots (x, e_{i_k})_X, \quad (6)$$

де $L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ визначаються за допомогою рекурентної процедури.

$$L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \frac{1}{n!}\left\{F_n(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_n}) + \right.$$

$$+ \left[F_n(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_{n-1}}) + \cdots + F_n(e_{i_2} + e_{i_3} + \cdots + e_{i_n})\right] -$$

$$-\left[F_n(e_{i_1}+e_{i_2}+\cdots+e_{i_{n-2}})+\cdots+F_n(e_{i_3}+e_{i_4}+\cdots+e_{i_n})\right]+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left[F_n(e_{i_1})+F_n(e_{i_2})+\cdots+F_n(e_{i_n})\right]+(-1)^nF_n(0)\big\}, \qquad (7)$$

для знаходження $L_{n-1}(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_{n-1}})$ замінемо у формулі (7) $n$ на $n-1$, а значення $F_n(x)$ на множині вузлів $\aleph(m)$ на

$$F_n(x)-\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{m} L_n(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n})(x,e_{i_1})(x,e_{i_2})\cdots(x,e_{i_n})$$

і т.д.

**Теорема 3.** *Інтерполяційні поліноми $P_n^I(x)$ та $P_n^*(x)$, що побудовані на множині вузлів $\aleph(m)$, тотожно співпадають.*

Ця теорема є підґрунтям для одержання в подальшому оцінок точності та дослідження збіжності інтерполяційного процесу в гільбертовому просторі.

Нехай тепер $F(x)=F_n(x)$ — поліноміальний оператор із множини $\Pi_n$. В роботі довідено збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми на послідовності вузлів $\aleph(m)$ у разі $m\to\infty$.

**Теорема 4.** *Має місце рівність*

$$\lim_{m\to\infty}\|F_n-P_n^*\|_H=0.$$

У **підрозділі 2.3** розглянуто задачу інтерполяції (3) для нелінійного оператора $F: X\to Y$, що заданий своїми значеннями $F(Bx_i)\in Y,\ i=\overline{0,N}$, на множині вузлів $\aleph(m)$. Розв'язок задачі (3) знайдено у вигляді

$$P_{mn}(x;F)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{m} a_{i_1i_2\ldots i_k}(F)(x,e_{i_1})(x,e_{i_2})\cdots(x,e_{i_k}), \qquad (8)$$

де $a_{i_1i_2\ldots i_k}(F)\in Y$ — невідомі коефіцієнти, що є симетричними відносно своїх індексів та визначаються на підставі рекурентної процедури (7).

**Теорема 5.** *Послідовність інтерполяційних поліномів типу Лагранжа* (8) $(m=n,n+1),\ldots$ *має властивість*

$$\lim_{m\to\infty}P_{mn}(x;F)=F_n(x),\ \ \forall x\in X.$$

У теоретичних дослідженнях властивість збереження інтерполянтом поліномів відповідного степеня має важливе значення для отримання оцінок точності інтерполювання та теорем про збіжність інтерполяційних процесів у разі збільшення кількості вузлів. При розв'язанні прикладних задач інтерполянти з такою властивістю використовують для побудови квадратурних формул при обчисленні континуальних інтегралів.

У **підрозділі 2.4** знайдено оцінки точності інтерполяційних формул для поліноміальних та цілих операторів у випадку наближених їх вузлових значень.

Нехай $X$ — сепарабельний гільбертовий простір, $Y$ є предгільбертовим, значення оператора $F \in \Pi_n$ у вузлах $\{Bx_i\}_{i=0}^{N}$ із множини $\aleph(m)$ задані із похибками $\delta_i$, $i = \overline{0, N}$, тобто

$$\widetilde{F(Bx_i)} = F(Bx_i) + \delta_i, i = \overline{0, N}.$$

Інтерполянт, який побудований на послідовності вузлів $\aleph(m)$ у випадку збурених вихідних даних, має вигляд

$$\widetilde{P}_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{m} \widetilde{L}_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \ldots (x, e_{i_k}), \tag{9}$$

де операторні форми $\widetilde{L}_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ визначаються за допомогою рекурентної процедури (7) на підставі значень $\widetilde{F(Bx_i)}$. Оскільки інтерполяційний поліном $\widetilde{P}_n^I$ є лінійним за $F$, то його можна записати у такому вигляді

$$\widetilde{P}_n^I(x) = P_n^I(x) + P_n^{(\delta)}(x), \tag{10}$$

де поліном $P_n^I(x)$ інтерполює оператор, значення якого у вузлах дорівнюють $F(Bx_i)$, а інтерполянт $P_n^{(\delta)}(x)$ апроксимує оператор, значення якого у вузлах дорівнюють $\delta_i$, $i = \overline{0, N}$.

**Теорема 6.** *Нехай значення поліноміального оператора (що інтерполюємо) у вузлах* $Bx_i$, $i = \overline{0, N}$, *задано наближено:* $\widetilde{F(Bx_i)} = F(Bx_i) + \delta_i$, $i = \overline{0, N}$. *Тоді оцінка точності інтерполювання поліномом* (9) *в нормі, що породжена скалярним добутком* (2), *визначається нерівністю*

$$\|F - \widetilde{P}_n^I\|_H^2 < \alpha \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i + \beta\delta, \tag{11}$$

*де* $TrB = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k, \alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1}, \beta = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 (TrB)^k, \delta = \max\limits_{0 \le i \le N} \|\delta_i\|_Y^2.$

Позначимо $E(x)$ — цілу частину числа $x$.

**Теорема 7.** *Нехай оператор* $B$ *визначається за формулою*

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k, \ \lambda_k > 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty, \tag{12}$$

*де* $\lambda_k = q^k$, $q \in (0,1)$, *значення оператора, що інтерполюємо, у вузлах* $Bx_i$, $i=\overline{0,N}$, *з множини* $\aleph(m)$ *задано наближено* $\widetilde{F(Bx_i)} = F(Bx_i) + \delta_i$, $i = \overline{0,N}$. *Тоді у разі виконання нерівності*

$$m > m_0 = E\left(log_q \frac{\beta}{\alpha}(1-q)\delta\right) - 1,$$

*точність інтерполяції не покращується в сенсі оцінки* (11).

Нехай тепер $F : X \to Y$ — цілий оператор, тобто має вигляд

$$F(x) = L_0 + L_1 x + \cdots + L_n x^n + \cdots , \tag{13}$$

а числовий ряд $\|L_0\| + \|L_1\| \cdot \|x\| + \cdots + \|L_n\| \cdot \|x\|^n + \cdots$ збігається для всіх $x \in X$. Позначимо $\Pi_\infty$ множину цілих операторів (13) та на цій множині введемо скалярний добуток

$$(F_1,F_2)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \left(L_k^{(1)}(v_1,\dots,v_k), L_k^{(2)}(v_1,\dots,v_k)\right)_Y \mu(dv_1)\cdots\mu(dv_k) \tag{14}$$

і норму $\|F\|_H = (F,F)_H^{1/2}$, де $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}$ — $k$–лінійні неперервні симетричні операторні форми, що відповідають операторам $F_1, F_2 \in \Pi_\infty$. Нехай оператор $F \in \Pi_\infty$ заданий у вузлах $Bx_i$, $i = \overline{0,N}$ з множини $\aleph(m)$ збуреними значеннями

$$\widetilde{F}(Bx_i) = F(Bx_i) + \delta_i,\ \delta_i \in Y,\ i = \overline{0,N}.$$

У цьому випадку розв'язок $\widetilde{P}_n^I(x,F)$ інтерполяційної задачі (3) матиме вигляд (9), де $\widetilde{L_k}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ визначаються за рекурентною процедурою (7) на підставі значень $\widetilde{F}(Bx_i)$, $i = \overline{0,N}$. Цілий оператор $F \in \Pi_\infty$ подамо у вигляді

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x), \quad F_n \in \Pi_n,$$

де

$$R_n(x) = L_{n+1}x^{n+1} + L_{n+2}x^{n+2} + \cdots .$$

Тоді

$$\widetilde{F}(Bx_i) = F_n(Bx_i) + R_n(Bx_i) + \delta_i.$$

**Теорема 8.** *У випадку збурених значень цілого оператора* $F(x)$ *у вузлах* $Bx_i$, $i = \overline{0,N}$ *із* $\aleph(m)$, *оцінка точності інтерполяції* $F(x)$ *поліномом* (9) *в метриці, що породжена скалярним добутком* (14), *визначається за формулою*

$$\|F - \widetilde{P}_n^I\|_H < \left[\sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i\right]^{1/2} +$$

$$+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\|L_k\|^2(TrB)^k+\max_{0\le i\le N}\|R_n(Bx_i)\|_Y^2\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k\right]^{1/2}+$$

$$+\left[\max_{0\le i\le N}\|\delta_i\|_Y^2\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k\right]^{1/2}, \qquad (15)$$

*де* $TrB=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$, $c_k=\alpha_k(1+\alpha_{k+1})+\cdots(1+\alpha_n)$, $\alpha_k=2^k/k!$, $k=\overline{1,n}$, $c_0=1$.

Послідовності

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}c_k^2(TrB)^k,\;\; U_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2c_k^2(TrB)^k$$

є збіжними у разі $n\to\infty$. Позначимо $S^2=\lim\limits_{n\to\infty}S_n^2$, $U^2=\lim\limits_{n\to\infty}U_n^2$.

Оскільки $F\in\Pi_\infty$, то ряд $\sum\|L_k\|^2(TrB)^k$ збігається, коли $n\to\infty$. Нехай $\varphi_n^2$ — залишок цього ряду після $n$-го члена. Як наслідок теореми 8, справджуються такі теореми.

**Теорема 9.** *Нехай задані збурені значення оператора* $F\in\Pi_\infty$ *у вузлах інтерполяції* $Bx_i$, $i=\overline{0,N}$, *із* $\aleph(m)$ *та виконуються умови:*

$$\max_{0\le i\le N}\|\delta_i\|_Y^2\le\delta^2,\max_{0\le i\le N}\|R_n(Bx_i)\|_Y^2\le\psi_n^2,$$

$m=1,2,\ldots.$ *Тоді має місце нерівність*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\|F-\widetilde{P}_n^I\|_H\le\left[\varphi_n^2+(S^2-1)\psi_n^2\right]^{1/2}+S\delta. \qquad (16)$$

**Теорема 10.** *Нехай виконуються умови теореми 9 та* $\psi_n\to0$ *монотонно у разі* $n\to\infty$. *Тоді у випадку збурених значень оператора* $F\in\Pi_\infty$ *у вузлах* $Bx_i$, $i=\overline{0,N}$, *точність інтерполяції не покращується у сенсі оцінки* (16), *коли* $n\ge n_0$, *де* $n_0$ *— максимальне ціле число, що відповідає нерівності*

$$\varphi_n^2+(S^2-1)\psi_n^2\ge S^2\delta^2.$$

Доведено, що у випадку, коли оператор $B$ визначається за формулою (12) та

$$n>n_0=E\left\{2log_{\frac{q^2}{1-q}}(S\delta)-2log_{\frac{q^2}{1-q}}\left[\frac{1-q}{1-q-q^3}+\frac{S^2-1}{(1-q)^2}\right]\right\}-1,$$

де $1-q-q^3>0$, $q\ne(\sqrt{5}-1)/2$, точність інтерполяції цілого оператора $F$ в метриці простору $H$ не покращується в сенсі оцінки

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\|F-\widetilde{P}_n^I\|_H\le\left\{\left(\frac{q^2}{1-q}\right)^{n+1}\left[\frac{1-q}{1-q-q^3}+\frac{S^2-1}{(1-q)^2}\right]\right\}^{1/2}+S\delta.$$

У **підрозділі 2.5** для цілого та поліноміального функціоналів, які визначені на просторі $L_2(0,1)$, у випадку збуреної вихідної інформації та наближеного обчислення скалярних добутків, що містяться в інтерполяційній формул (9), досліджено точність формули Лагранжа.

Нехай функціонал $F \in \Pi_\infty$, $F : L_2(0,1) \to R^1$ заданий на множині вузлів $\aleph(m)$ збуреними значеннями:

$$\widetilde{F}(Bx_i) = F(Bx_i) + \delta_i, \delta_i \in R^1, i = \overline{0,N},$$

та наближено обчислюються скалярні добутки в просторі $L_2(0,1)$

$$\widetilde{(x, e_i)} = (x, e_i) + \Delta_i, i = \overline{0,N}.$$

За такої постановки задачі інтерполяційний поліном (6) запишеться у вигляді

$$\widetilde{P}_n^I(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{m} \widetilde{L}_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})\widetilde{(x, e_{i_1})}\widetilde{(x, e_{i_2})} \cdots \widetilde{(x, e_{i_1})}, \qquad (17)$$

де $\widetilde{L}_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ обчислюються за рекурентними формулами (7), але замість значень функціонала $F(x_i)$ використовують збурені значення $\widetilde{F}(x_i)$. У формулі (14) скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_Y$ у просторі $Y = R^1$ визначимо як добуток чисел. В подальшому припустимо, що

$$|\Delta_i| \le \frac{C}{i^r},\ C = const,\ r > 1.$$

Така оцінка точності має місце, наприклад, для квадратурної формули обчислення $i$-го коефіцієнта Фур'є функцій із класу Ліпшиця у випадку, коли в цій квадратурній формулі кількість проміжків розбиття відрізку інтегрування більше за величину $i^r$, $r > 1$. Оскільки інтерполяційний поліном $\widetilde{P}_n^I(x)$ як оператор по $F$ є лінійним, то з точністю до членів першого порядку малості відносно величин $\Delta_i$, $i = \overline{0,N}$, та $\delta_i$, $i = \overline{0,N}$, його можна записати у вигляді

$$\widetilde{P}_n^I(x) = P_n^I(x) + P_n^{(\delta)}(x) + P_{n-1}^{(\Delta)}(x), \qquad (18)$$

де значення полінома $P_n^I(x)$ у вузлах $Bx_i, i = \overline{0,N}$, дорівнюють $F(Bx_i), i = \overline{0,N}$, значення полінома $P_n^{(\delta)}(Bx_i)$ дорівнюють $\delta_i$, $i = \overline{0,N}$, а поліном $P_{n-1}^{(\Delta)}(x)$ визначається у такий спосіб:

$$P_{n-1}^{(\Delta)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_{k-1}})\Delta_{i_k}.$$

**Теорема 11.** *Нехай задані збурені значення функціонала* $F : L_2(0,1) \to R^1$, $F \in \Pi_\infty$ *на множині вузлів* $\aleph(m)$: $\widetilde{F}(Bx_i) = F(Bx_i) + \delta_i$, $i = \overline{0,N}$, *та нехай виконуються нерівності*

$$|\widetilde{F}(Bx_i)| \leq K = const, |\Delta_i| \leq \frac{C}{i^r},\ r > 1, |\delta_i| \leq \delta, \forall i, i = \overline{0,N}, \tag{19}$$

*скалярні добутки у формулі (17) обчислюються наближено. Тоді оцінка точності інтерполяції поліномом (17) в метриці простору* $H$ *визначається нерівністю*

$$\left\|F - \widetilde{P}_n^I\right\| < \left\{\sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (TrB)^k + \max_{0 \leq i \leq N} \|R_n(x_i)\|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (TrB)^k\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\max_{0 \leq i \leq N} \|\delta_i\|_Y^2 \sum_{k=0}^{n} c_k^2 (TrB)^k\right\}^{1/2} + C\zeta(r)(K+\delta) \left\{\sum_{k=0}^{n-1} k^2 c_k^2 (TrB)^{k-1}\right\}^{1/2},$$

*де* $\zeta(r)$ — *функція Рімана. Якщо ж виконується нерівність*

$$|R_n(x_i)|^2 \leq \psi_n^2,$$

*то має місце оцінка*

$$\varlimsup_{m \to \infty} \|F - \widetilde{P}_n^I\| \leq \left\{\varphi_n^2 + (S^2 - 1)\psi_n^2\right\}^{1/2} + S\delta + C\zeta(r)U(K+\delta).$$

Для поліноміального функціоналу $F_n : L_2(0,1) \to R^1$, значення якого у вузлах інтерполяції задано наближено, доведено такий результат.

**Теорема 12.** *Нехай задані збурені значення функціоналу* $F_n : L_2(0,1) \to R^1$, $F \in \Pi_n$ *на множині вузлів* $\aleph(m)$: $\widetilde{F}_n(Bx_i) = F_n(Bx_i) + \delta_i$, $i = \overline{0,N}$, *скалярні добутки в* $L_2(0,1)$ *обчислюються наближено:* $\widetilde{(x, e_i)} = (x, e_i) + \Delta_i$, $i = \overline{0,N}$, *та виконуються нерівності* (19). *Тоді оцінка точності інтерполяції функціонала* $F_n(x)$ *поліномом (17) в метриці простору* $H$ *з точністю до членів першого порядку малості відносно величин* $\delta_i$ *та* $\Delta_i$, $i = \overline{0,N}$, *визначається за формулою*

$$\|F_n - \widetilde{P}_n^I\|_H < \left\{\alpha_n \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i + \beta_n \delta\right\}^{1/2} + C\zeta(r)(K+\delta)U_{n-1}. \tag{20}$$

Нехай оператор $B$ визначається збіжним рядом (12). Використовуючи оцінку точності інтерполювання (20), одержано формулу для визначення кількості ортонормованих вузлів $m_0$, перевищення якої не покращує цю оцінку:

$$m_0 = E\left(\log_q \frac{\beta_n\delta^2 + C^2\zeta^2(r)U_{n-1}^2(K+\delta)^2}{\alpha_n}(1-q)\right) - 1.$$

У **підрозділі 2.6** знайдено оцінки точності для цілих та поліноміальних функціоналів, що визначені на просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ у випадку збуреної вихідної інформації та наближеного обчислення скалярних добутків

$$\widetilde{(x,e_i)} = (x',e_i')_{L_2(0,\pi)} + (x,e_i)_{L_2(0,\pi)} + \Delta_i, i = \overline{0,N}, \tag{21}$$

в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$. Одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якої не покращує похибку інтерполяції в сенсі отриманих оцінок. Наведемо основні результати цього розділу. Нехай

$$\Delta_i = \Delta_i^1 + \Delta_i^2,\ i = \overline{0,N},$$

$\Delta_i^1$ — похибка обчислення першого інтегралу в правій частині (21), $\Delta_i^2$ — другого.

**Теорема 13.** *Нехай на множині вузлів* $\aleph(m)$ *задані наближені значення* $\widetilde{F}(Bx_i)$, $i = \overline{0,N}$, *цілого функціоналу* $F : \overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi) \to R^1$,

$$\widetilde{F}(Bx_i) = F(Bx_i) + \delta_i, |\widetilde{F}(Bx_i)| \le K = const; |\delta_i| \le \delta \forall i, i = \overline{0,N},$$

*скалярні добутки в* (17) *обчислюються наближено* $\widetilde{(x,e_i)} = (x,e_i) + \Delta_i$, $i = \overline{0,N}$, *та виконуються нерівності*

$$|\Delta_i^1| < \frac{C_1}{i^{r-1}},\ \ |\Delta_i^2| < \frac{C_2}{i^r},\ \ r > 2,\ \ C_k = const, k = 1,2. \tag{22}$$

*Тоді, з точністю до членів першого порядку малості включно відносно величин* $\delta_i$ *та* $\Delta_i$, $i = \overline{0,N}$, *має місце оцінка*

$$\|F - \widetilde{P}_n^I\|_H < \left\{\sum_{k=1}^{n} k^2\|L_k\|^2(TrB)^{k-1}\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda_i\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\|L_k\|^2(TrB)^k + \max_{0\le i\le N}|R_n(x_i)|^2\sum_{k=1}^{n}c_k^2(TrB)^k\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left\{\max_{0\le i\le N}|\delta_i|^2\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left\{C_1\zeta(r-1)+C_2\zeta(r)\right\}(K+\delta)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2c_k^2(TrB)^{k-1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

*де* $\zeta(r)$ *— функція Рімана,* $c_k=\alpha_k(1+\alpha_{k+1})\cdots(1+\alpha_n)$, $\alpha_k=\dfrac{2^k}{k!}$, $k=\overline{1,n}$.

**Теорема 14.** *Нехай задані наближені значення поліноміального функціоналу* $F_n:\overset{0}{W}{}_2^1\to R^1$ *на множині* $\aleph(m)$,

$$\widetilde{F}_n(Bx_i)=F_n(Bx_i)+\delta_i, |\widetilde{F}_n(Bx_i)|\le K=const, |\delta_i|\le\delta\forall i, i=\overline{0,N},$$

*скалярні добутки в* (17) *обчислюються наближено та виконуються співвідношення* (22)*. Тоді з точністю до членів першого порядку малості відносно величин* $\delta_i$ *та* $\Delta_i$ *справедлива оцінка*

$$\|F_n-\widetilde{P}_n^I\|_H<\left\{\alpha_n\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda_i+\beta_n\delta^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{C_1\zeta(r-1)+C_2\zeta(r)\right\}U_{n-1}(K+\delta), \tag{24}$$

*де*

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}k^2\|L_k\|^2(TrB)^{k-1},\ \ \beta_n=\sum_{k=0}^{n}c_k^2(TrB)^k.$$

На підставі оцінок (23), (24) знайдено кількість вузлів інтерполяції перевищення якої не покращує точності інтерполювання.

У **підрозділі 2.7** розв'язано інтерполяційну задачу Лагранжа в скінченновимірному евклідовому просторі $E_k$, $k>1$ в умовах недовизначеності, тобто коли вихідної інформації недостатньо для знаходження єдиного розв'язку задачі з інтерполяційними умовами

$$P_n(\gamma_i)=f(\gamma_i),\ \ i=\overline{1,m}, \tag{25}$$

де функція $f:E_k\to R_1$ задана своїми значеннями у вузлах інтерполяції $\gamma_i=(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k})\in E_k$, $i=\overline{1,m}$. Розв'язок інтерполяційної задачі будемо шукати на просторі $\Pi_{kn}$ поліномів $k$ змінних $n$-го степеня розмірності $p=\dfrac{(n+k)!}{n!k!}$, $m\le p$ у вигляді інтерполяційного поліному мінімальної норми (4). Основний результат цього підрозділу сформульований у наступній теоремі.

**Теорема 15.** *Нехай функція* $f:E_k\to R_1$ *задана своїми значеннями* $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$*. Якщо вузли інтерполяції* $\gamma_i$ *обрати таким чином, що відповідна система векторів із*

$$s_i=\left\{\left(\frac{j!}{j_1!j_2!\cdots j_k!}\right)^{1/2}x_{i_1}^{j_1}x_{i_2}^{j_2}\cdots x_{i_k}^{j_k}, j_1+j_2+\cdots+j_k=j, 0!=1\right\}_{j=0}^{n}$$

*буде лінійно незалежною, то задача інтерполяції функції багатьох змінних на просторі* $\Pi_{kn}$ *з умовами* (25), $P_n \in \Pi_{kn}$ *інваріантно розв'язна і має єдиний розв'язок мінімальної норми* (4) *у випадку коли* $m \leq p$, *де* $p$ *— розмірність простору* $\Pi_{kn}$.

У **підрозділі 2.8** в лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі досліджена точність інтерполяційної формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Показано, що інтерполянт мінімальної норми (4) містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

Інтерполянт (4) не є точним на багаточленах відповідного степеня у лінійному нескінченновимірному просторі із скалярним добутком. Якщо розглянемо простір $E_k$, $k > 2$, то одержимо, що у випадку $m = p$ інтерполяційний поліном Лагранжа буде точним на поліномах степеня не вище $n$, а якщо $m < p$, то $P^*(x)$ не має такої властивості.

У **розділі 3** розглянуто питання континуальності вузлів інтерполяції операторних поліномів інтегрального вигляду.

У **підрозділі 3.1** в лінійному топологічному просторі для оператора однієї змінної знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду.

Нехай $X$, $Y$ — лінійні топологічні простори, оператор $F : X \to Y$, $x_i \in X$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$, диференційований за Гато, $F^{(n)}$ — похідна Гато $n$-го порядку. Розглянемо поліном $n$-го степеня вигляду

$$P_n(x) = F(x_0) + \int_a^b F'\left(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0)\right) dg_{\tau_1}(x - x_0) + \cdots +$$

$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} F^{(n)} \left( x_0 + \sum_{i=1}^n g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1}) \right) dg_{\tau_n}(x - x_{n-1}) \ldots dg_{\tau_1}(x - x_0), \quad (26)$$

де $g_\tau$ — лінійний оператор, $g_\tau : X \to X$, $\tau$ – скалярний аргумент, $\tau \in [a, b]$, $g_\tau$ — диференційований за $\tau$ оператор, тобто має $g'_\tau$ — похідну за цим аргументом. Множина операторів $g_\tau$ така, що виконуються умови

$$g_a = 0, \quad g_b = I, \quad (27)$$

де 0, $I$ — нульовий та тотожній оператори відповідно, $dg_{\tau_i} = d_{\tau_i} g_{\tau_i}$. Тоді, як показано в роботах А. Д. Єгорова, П. І. Соболевського, Л. О. Яновіча, поліном (26) буде інтерполяційним, тобто відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n(x_i) = F(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Але, як відмічалося авторами В. Л. Макаровим, В. В. Хлобистовим, І. І. Демківим, для побудови полінома (26) потрібна континуальна інформація щодо оператора та його похідних Гато до $n$-го порядку включно в континуальних точках. Однак інтерполяційний поліном $P_n(x)$ має скінчену множину інтерполяційних вузлів, що неприродно. Для подолання цього недоліку будемо вимагати від операторів $g_\tau$ крім виконання (27), ще умову

$$g_u g_v = g_s, \quad s = \min(u, v). \tag{28}$$

Позначимо таку множину операторів $g_{\tau_i}$ через $G$. Нехай множина $G$ така, що містить недиференційовані за $\tau$ в звичайному розумінні оператори, тобто оператори $g'_{\tau_i}$ будуть «узагальненими», але оператор $F$ повинен бути таким, щоб інтеграли в (26) існували. Позначимо таку множину операторів $F$ через $\Re$.

Розглянемо розв'язок інтерполяційної задачі Лагранжа

$$P_n(\overline{x}_n(\xi)) = F(\overline{x}_n(\xi)). \tag{29}$$

на континуальній множині вузлів

$$\overline{x}_n(\xi) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1}),\ b \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_n \geq a \tag{30}$$

у вигляді інтерполяційного полінома (26).

**Теорема 16.** *Нехай* $g_{\tau_i} \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *оператор* $F$ $(n+1)$ *раз диференційований за Гато і такий, що інтеграли в* (26) *існують. Тоді інтерполянт* (26) *має континуальні вузли* (30), *тобто виконуються інтерполяційні умови* (29).

У **підрозділі 3.2** в топологічному лінійному просторі наведено узагальнення інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних в сенсі визначення умов, за яких має місце континуальність відповідної множини вузлів.

Нехай $X, Y, \ldots, Z, V$ — лінійні топологічні простори, $F(x, y, \ldots, z)$ – оператор $m$ змінних $x, y, \ldots, z$, $x \in X$, $y \in Y$, …, $z \in Z$, $F : X \bigoplus Y \bigoplus \bigoplus \cdots \bigoplus Z \to V$. Розглянемо інтерполяційний поліном $n$-го степеня для оператора $F$ $m$ змінних із роботи В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова, І. І. Демківа вигляду:

$$P_{m,n}(F; x, y, \ldots, z) = F(x_0, y_0, \ldots, z_0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega_k} \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_m = k} F^{(i_1 + i_2 + \cdots + i_m)} \left( x_0 + \sum_{i=1}^{i_1} g_{\tau_{i1}}(x_i - x_{i-1}) \right.,$$

$$\left. y_0 + \sum_{i=1}^{i_2} g_{\tau_{i2}}(y_i - y_{i-1}), \ldots, z_0 + \sum_{i=1}^{i_m} g_{\tau_{im}}(z_i - z_{i-1}) \right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{i_1} dg_{\tau_{i1}}(x - x_{i-1}) \prod_{i=1}^{i_2} dg_{\tau_{i2}}(y - y_{i-1}) \cdots \prod_{i=1}^{i_m} dg_{\tau_{im}}(z - z_{i-1}), \tag{31}$$

де $g_{\tau_{is}} : X \to X$, $s = \overline{1,m}$ – лінійні неперервні оператори, $i$ – індекс, що пробігає деякі множини натуральних чисел, $g_{\tau_{is}}$ залежать від скалярних аргументів $\tau_{is}$ з $[a, b]$, мають перші похідні за цими аргументами та задовольняють умовам (27), $x_i \in X$, $i = 0, 1, 2, \dots i_1$, $y_i \in Y$, $i = 0, 1, 2, \dots i_2, \dots$, $z_i \in Z$, $i = 0, 1, 2, \dots i_m$ – вузли інтерполяції за кожною змінною;

$$\Omega_k = \Omega_{i_1} \times \Omega_{i_2} \times \cdots \times \Omega_{i_m}, i_1 + i_2 + \cdots + i_m = k,$$

$$\Omega_{i_s} = \{(\tau_{1s}, \tau_{2s}, \dots, \tau_{i_s s}) : 0 \le \tau_{1s} \le 1, 0 \le \tau_{2s} \le \tau_{1s}, \dots, 0 \le \tau_{i_s s} \le \tau_{i_s - 1, s}\},$$

$s = 1, 2, \dots, m$, а похідні від $F$ розуміються в сенсі Гато, $dg_{\tau_{is}} = d_{\tau_{is}} g_{\tau_{is}}$.

Інтерполянт (31) має вузли $(x_p, y_q, \dots, z_r)$, а у випадку, коли

$$X = Y = \cdots = Z = V = R^1,$$

отримаємо поліном Ньютона (поліном найменшого степеня) для функції $m$ змінних. Основним результатом цього підрозділу є теорема про континуальну множину вузлів для інтерполяційного полінома (31).

**Теорема 17.** *Нехай оператори* $g_{\tau_{is}} \in G, s = 1, 2, \dots,$ $F \in \Re$, *похідна Гато* $F^{(n+1)}$ *існує за кожною змінною. Тоді континуальними вузлами інтерполяційного полінома* (31) *будуть точки*

$$\left( x_0 + \sum_{i=1}^{i_1} g_{\xi_{i1}}(x_i - x_{i-1}), y_0 + \sum_{i=1}^{i_2} g_{\xi_{i2}}(y_i - y_{i-1}), \dots, z_0 + \sum_{i=1}^{i_m} g_{\xi_{im}}(z_i - z_{i-1}) \right),$$

*де*

$$b \ge \xi_{11} \ge \xi_{21} \ge \cdots \ge \xi_{i_1 1} \ge a, \ \ b \ge \xi_{12} \ge \xi_{22} \ge \cdots \ge \xi_{i_2 2} \ge a, \dots,$$

$$b \ge \xi_{1m} \ge \xi_{2m} \ge \cdots \ge \xi_{i_m m} \ge a, \ \ i_1 + i_2 + \cdots + i_m = k, \ \ k = 1, 2, \dots, n.$$

У **четвертому розділі** розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта в гільбертовому та скінченновимірному евклідовому просторах.

В **підрозділі 4.1** розв'язано екстремальну задачу про інтерполяційний поліном мінімальної норми на множині інтерполянтів Ерміта.

Нехай $X, Y$ — гільбертові простори. Оператор $F : X \to Y$, в загальному випадку нелінійний, заданий у вузлах інтерполяції $Bx_i, i = \overline{1,m}$, своїми значеннями $F(Bx_i), i = \overline{1,m}$, та значеннями своїх диференціалів Гато

$$F^{(k)}(Bx_i) Bv_{ik}^{(k)} Bv_{ik-1}^{(k)} \cdots Bv_{i1}^{(k)}, k = \overline{0, j_i}, i = \overline{1,m},$$

де

$$F^{(k)}(Bx_i)Bv_{ik}^{(k)}Bv_{ik-1}^{(k)}\cdots Bv_{i1}^{(k)} = \frac{\partial^k}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_k}F\left(Bx_i+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j Bv_{ij}^{(i)}\right)\Bigg|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0}.$$

Потрібно знайти такий поліном $P_n : X \to Y$ із множини (1), що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n^{(k)}(Bx_i)v_{ik}^{(k)}Bv_{ik-1}^{(k)}\cdots Bv_{i1}^{(k)} = F^{(k)}(Bx_i)v_{ik}^{(k)}Bv_{ik-1}^{(k)}\cdots Bv_{i1}^{(k)}, \tag{32}$$

$$k=\overline{0,j_i}, i=\overline{1,m}.$$

Позначимо

$$\vec{F}_H = \left\{F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)}Bv_{j,i-1}^{(i)}\dots Bv_{j1}^{(i)},\ i=\overline{0,k_j}\right\}_{j=1}^{m},$$

$$\vec{q}_H = \left\{q^{(i)}(Bx_j)Bh_{ji}^{(i)}Bv_{j,i-1}^{(i)}\dots Bv_{j1}^{(i)},\ i=\overline{0,k_j}\right\}_{j=1}^{m},$$

$$\vec{g}_H = \left\{\frac{\partial^i}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_i}g\left(Bx_j+\sum_{p=1}^{i}\alpha_p Bv_{jp}^{(i)},x\right)\Bigg|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_i=0},\ i=\overline{0,k_j}\right\}_{j=1}^{m},$$

$H^+$ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці $H$, $Z$ — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори симетричної матриці

$$H=\left\|H^{ls}\right\|=\left\|h_{ij}^{ls}\right\|_{i=\overline{0,k_l},\ j=\overline{0,k_s}}$$

з нульовим власним числом, де

$$h_{ij}^{ls}=\frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1\dots\partial\alpha_i\partial\beta_1\dots\partial\beta_j}\,g\left(Bx_l+\sum_{p=1}^{i}\alpha_p Bv_{lp}^{(i)},x_s+\sum_{p=1}^{j}\beta_p Bv_{sp}^{(i)}\right)\Bigg|_{\alpha_1=\cdots=\beta_j=0},$$

$$g(u,v)=\sum_{p=0}^{n}(u,v)^p,\ u,v\in X.$$

У роботах В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова доведено, що необхідною та достатньою умовою існування розв'язку задачі (32) є виконання рівності

$$Z\vec{F}_H=\vec{0}, \tag{33}$$

тоді формула

$$P_n(x)=Q_n(x)+\left\langle \vec{F}_H-\vec{Q}_H, H^+\vec{g}_H(x)\right\rangle, \tag{34}$$

коли $Q_n \in \Pi_n$, описує всю множину інтерполяційних поліномів Ерміта $\Pi_n^{IH}$.

Для подальшого викладення результатів роботи поліном $P_n(x)$, що визначається формулою (34), надамо у вигляді

$$P_n(x) = P^*(x) + Q_0(x),$$

де

$$Q_0(x) = Q_n(x) - \left\langle \vec{Q}_H, H^+\vec{g}_H(x) \right\rangle,$$

$$P^*(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^+\vec{g}_H(x) \right\rangle, \tag{35}$$

Основним результатом цього підрозділу є така теорема.

**Теорема 18.** *Нехай виконується умова* (33). *Тоді поліном* $P^*(x)$, *що визначається формулою* (35), *є розв'язком екстремальної задачі*

$$\|P^*\|_H = \min_{P_n \in \Pi_n^{IH}} \|P_n\|_H = \left(\left\langle\left\langle H^+\vec{F}_H, \vec{F}_H \right\rangle\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

*і цей розв'язок єдиний,*

$$\left\langle\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle\right\rangle = \sum_{i=1}^{M} (\alpha_i, \beta_i)_Y,\ \alpha_i, \beta_i \in Y,\ \vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M),\ \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M).$$

У подальшому наведено інтерполяційні умови Ерміта, що забезпечують однозначну побудову на множині (1) інтерполянта $P_2(x)$ вигляду

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{m} L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_k}), m \geq n, \tag{36}$$

де невідомі операторні форми $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$, $1 \leq i_j \leq m$, $k = \overline{0, 2}$, визначаються на основі цих умов для всіх $m \geq 2$.

Показано, що інтерполянти (35) та (36) тотожно збігаються при фіксованих інтерполяційних умовах.

**Теорема 19.** *Оцінка точності інтерполяції поліноміального оператора* $F_n$ *інтерполянтом* (35) *визначається нерівністю*

$$\|F_n - P_n\|_H^2 < \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (TrB)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i, n = 2.$$

**Теорема 20.** *Справедлива рівність*

$$\lim_{m \to \infty} \|F_n - P^*\|_H = 0, n = 2.$$

У **підрозділі 4.2** розглянуто таку задачу поліноміальної операторної інтерполяції: для оператора $F$ визначити інтерполяційні умови Ерміта та Ерміта-Біркхофа, які дозволяють однозначно побудувати інтерполянт у вигляді (36) на множині $\Pi_n$. Для поліноміального оператора третього степеня було визначено вузли та напрямки диференціалів Гато інтерполяційних умов типу Ерміта для конструктивної побудови полінома (36), для полінома четвертого степеня знайдено інтерполяційні умови Ерміта-Біркхофа та побудовано розв'язок у вигляді (36). Відмітимо, що побудовані інтерполянти є гранично інваріантними відносно поліномів відповідного степеня та для них виконуються теореми 19 та 20 $(n = 3, 4)$.

Надалі у цьому підрозділі розглянуто інтерполяційну задачу Абеля-Гончарова. Пропозиція щодо побудови та дослідженню інтерполянта Абеля-Гончарова на операторному рівні належить В. Л. Макарову.

Нехай задані значення оператора у нулі та його диференціалів Гато у вузлах $e_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, за напрямками ортонормованого базису $e_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, таким чином: диференціали Гато першого порядку — у першому вузлі $e_1$, другого порядку — у другому вузлі $e_2$ і т. д. Для нелінійного оператора $F : X \to Y$, що має похідні Гато до певного порядку включно, потрібно знайти поліном $P_{mn} : X \to Y$ степеня $n$, що відповідає умовам

$$P^{(k)}_{m,n}(e_k)e_{i_k}e_{i_{k-1}} \dots e_{i_1} = F^{(k)}(e_k)e_{i_k}e_{i_{k-1}} \dots e_{i_1}, 1 \le i_j \le m, \quad k = \overline{0, n}. \tag{37}$$

Умови Абеля-Гончарова (37) є частинним випадком інтерполяційних умов Ерміта-Біркхофа.

Наведено інтерполянт $P_{m,n}(x)$, що відповідає умовам (37) у вигляді (8), де невідомі симетричні відносно своїх індексів, коефіцієнти $a_{i_1,i_2,\dots,i_k}(F)$, $k = \overline{1, n}$, визначаються за рекурентною формулою:

$$a_{i_1,i_2,\dots,i_k}(F) = \frac{1}{k!}F^{(k)}(e_k)e_k e_{k-1} \dots e_1 - \sum_{j=1}^{n-k} C^j_{k+j} a_{i_1,\dots,i_k,\underbrace{k,\dots,k}_{j}}(F),$$

де $i_1, i_2, \dots, i_k = \overline{1, m}, k = n, n-1, \dots, 0, \sum\limits_{k=1}^{0} = 0$. У подальшому доведено, що побудовані інтерполяційні поліноми Ерміта, Ерміта-Біркхофа та Абеля-Гочарова є гранично інваріантними відносно багаточленів відповідного степеня. Наявність оцінок точності дозволяє застосовувати такі інтерполянти для наближення поліноміальних, цілих та диференційованих операторів.

У **підрозділі 4.3** розв'язано інтерполяційну задачу Ерміта в скінченновимірному евклідовому просторі у випадку, коли задані значення функції та значення перших диференціалів Гато до першого та до другого порядку відповідно у вузлах інтерполяції. Знайдено умови єдиності розв'язку та інваріантної розв'язуваності поставлених задач в умовах недовизначеності.

Нехай $E_k$ — $k$-вимірний евклідів простір, функція $f : E_k \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, та значеннями перших диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i$, $i = \overline{1,m}$ у вузлах інтерполяції $\gamma_i = (x_{1_i}, x_{2_i}, \ldots, x_{k_i}) \in E_k$, $i = \overline{1,m}$, за напрямками $\delta_i = (h_{1_i}, h_{2_i}, \ldots, h_{k_i}) \in E_k$ $i = \overline{1,m}$. Потрібно знайти такий інтерполяційний поліном $P_n : E_k \to R_1$, що відповідає умовам

$$P_n^{(i)}(\gamma_j)\delta_j = f^{(i)}(\gamma_j)\delta_j, i = 0, 1,\ j = \overline{1,m}. \tag{38}$$

Позначимо $\Pi_{kn}$ множину поліномів $k$-змінних степеня $n$. В роботі доведено, що якщо вузли інтерполювання $\gamma_i$ $i = \overline{1,m}$, та напрямки перших диференціалів Гато $\delta_i$, $i = \overline{1,m}$, у (38) обрати так, щоб система векторів

$$\vec{\psi}_{2i-1} = \left\{ \left( \frac{j!}{j_1! j_2! \cdots j_k!} \right)^{\frac{1}{2}} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \cdots x_{i_k}^{j_k},\ j_1 + j_2 + \cdots + j_k = j,\ 0! = 1 \right\}_{j=0}^{n},$$

$$\vec{\psi}_{2i} = (0, h_{1_i}, \ldots, h_{k_i}, \sqrt{2}(x_{1_i}h_{2_i} + x_{2_i}h_{1_i}), \ldots, \sqrt{2}(x_{(k-1)_i}h_{k_i} + x_{k_i}h_{(k-1)_i}), 2x_{1_i}h_{1_i}, \ldots,$$
$$2x_{k_i}h_{k_i}, \sqrt{3}x_{1_i}(2x_{2_i}h_{1_i} + x_{1_i}h_{2_i}), \ldots, \sqrt{3}x_{(k-1)_i}(2x_{k_i}h_{(k-1)_i} + x_{(k-1)_i}h_{k_i}),$$
$$3x_{1_i}^2 h_{1_i}, \ldots, 3x_{k_i}^2 h_{k_i}, \ldots, C_n^1 x_{k_i}^{n-1} h_{k_i}),\ i \in \mathbb{N},$$

була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (38) для функції багатьох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми (35) на просторі $\Pi_{kn}$ у випадку, коли $2m \leq p$, де $p$ — розмірність простору $\Pi_{kn}$.

Надалі в евклідовому просторі $E_k, k > 1$ розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта у випадку, коли у вузлах інтерполяції задані значення функції та значення її диференціалів Гато до другого порядку включно, тобто інтерполяційні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} P_n(\gamma_j) &= f(\gamma_j), \\ P_n'(\gamma_j)\delta_j^1 &= f'(\gamma_j)\delta_j^1, \\ P_n^{(2)}(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2 &= f^{(2)}(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2,\ j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{39}$$

**Теорема 21.** *Нехай функція* $f : E_k \to R_1$ *задана своїми значеннями* $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, *та значеннями диференціалів Гато* $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i = \overline{1,m}$. *Якщо вузли інтерполювання* $\gamma_i = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E_k$, $i = \overline{1,m}$, *та напрямки перших* $\delta_i^1 = (h_{1_i}, h_{2_i}, \ldots, h_{k_i}) \in E_k$, $i = \overline{1,m}$, *та других диференціалів*

*Гато* $\delta_{i1}^2 = \left(z_{i1}^1, z_{i2}^1, \ldots, z_{ik}^1\right) \in E_k$, $\delta_{i2}^2 = \left(z_{i1}^2, z_{i2}^2, \ldots, z_{ik}^2\right) \in E_k$, $i = \overline{1, m}$, *у* (39) *обрати так, щоб система векторів*

$$\vec{\psi}_{3i-2} = \left\{ \left( \frac{j!}{j_1! j_2! \cdots j_k!} \right)^{\frac{1}{2}} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \cdots x_{i_k}^{j_k},\ j_1 + j_2 + \cdots + j_k = j,\ 0! = 1 \right\}_{j=0}^{n},$$

$$\vec{\psi}_{3i-1} = (0, h_{1_i}, \ldots, h_{k_i}, 2x_{1_i} h_{1_i}, \ldots, 2x_{k_i} h_{k_i} \sqrt{2}(x_{1_i} h_{2_i} + x_{2_i} h_{1_i}), \ldots,$$

$$\sqrt{2}(x_{(k-1)_i} h_{k_i} + x_{k_i} h_{(k-1)_i}), 3x_{1_i}^2 h_{1_i}, \ldots, 3x_{k_i}^2 h_{k_i}, \sqrt{3} x_{1_i} (2x_{2_i} h_{1_i} + x_{1_i} h_{2_i}),$$

$$\ldots, \sqrt{3} x_{(k-1)_i} (2x_{k_i} h_{(k-1)_i} + x_{(k-1)_i} h_{k_i}), \ldots, C_n^1 x_{k_i}^{n-1} h_{k_i}),$$

$$\vec{\psi}_{3i} = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k+1}, 2z_{i1}^1 z_{i2}^2, \ldots, 2z_{ik}^1 z_{i(k-1)}^2, \ldots, \sqrt{2}(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2), \ldots,$$

$$3x_{i_1} z_{i1}^1 z_{i2}^2, \ldots, 3x_{i_k} z_{ik}^1 z_{i(k-1)}^2, \sqrt{3}(x_{1_i}(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2) + x_{2_i} z_{i1}^1 z_{i2}^2), \ldots,$$

$$\ldots, C_n^1 x_{k_i}^{n-2} z_{ik}^1 z_{ik}^2),\ i = \overline{1, m},$$

*була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта* (39) *для функції багатьох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми* (35) *на просторі* $\Pi_{kn}$ *у випадку, коли* $3m \leq p$, *де* $p$ *— розмірність простору* $\Pi_{kn}$.

У **підрозділі 4.4** в гільбертовому просторі з мірою розв'язано екстремальну задачу про знаходження операторного інтерполяційного полінома Ерміта-Біркхофа, що має мінімальну норму на множині інтерполянтів, що відповідають фіксованим інтерполяційним умовам.

У **підрозділі 4.5** доведено, що в нормованому та скінченновимірному евклідовому просторах інтерполяційна формула Ерміта (35), що є розв'язком задачі (32) ( $B = I$, $I$ — одиничний оператор), містить фундаментальні поліноми, а інтерполянт мінімальної норми (35) має вигляд

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{m} \left\{ F(x_j) \sum_{s=1}^{m} \left\{ (P_{nj0}(x_s))^{-1} P_{nj0}(x) \right\} + \cdots + \right.$$

$$\left. + F^{(k_j)}(x_j) v_{jk_j}^{(k_j)} \cdots v_{j1}^{(k_j)} \sum_{s=1}^{m} \left\{ \left( P_{njk_j}^{(k_s)}(x_s) v_{sk_s}^{(k_s)} \cdots v_{s1}^{(k_s)} \right)^{-1} P_{njk_j}(x) \right\} \right\}, \tag{40}$$

де

$$P_{nji}(x) = \frac{\partial^i}{\partial \alpha_i \cdots \partial \alpha_1} g \left( x_j + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_{jp}^{(i)}, x \right) \Bigg|_{\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k_j} = 0}, i = \overline{0, k_j},$$

$\left( P_{njk_j}^{(k_s)}(x_s) v_{sk_s}^{(k_s)} \cdots v_{s1}^{(k_s)} \right)^{-1}$ – елементи оберненої матриці до матриці $H$,

$$H = \left\|H^{js}\right\|_{j,s=1}^{m}, \quad \left\|H^{js}\right\| = \left\|P_{njq}^{(p)}(x_s)v_{sp}^{(p)} \cdots v_{s1}^{(p)}\right\|_{q=\overline{0,k_j},p=\overline{0,k_s}}.$$

Нехай $M$ — кількість інтерполяційних умов в (32), $m, M$ задані, $p$ — розмірність простору поліномів $n$-го степеня в $E_k$. Вузли інтерполяції та напрямки диференціалів Гато із (32) обираємо таким чином, щоб існувала обернена матриця до матриці $H$, а степінь інтерполяційного полінома визначимо з нерівності

$$M \leq \min p = \overline{p}, \quad p = \frac{(n+k)!}{n!k!}, \quad k \geq 2.$$

Доведено, що для функції багатьох змінних $F : E_k \to R_1, k \geq 2$, яка задана значеннями $F(x_i)$, $i = \overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції $x_i, i = \overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато у цих вузлах до відповідного порядку $k_i, i = \overline{1,m}$ за напрямками $v_{ip}^{(p)} \cdots v_{i1}^{(p)}$, $p = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,m}$, якщо $M = \overline{p}$, то інтерполянт Ерміта $P_n(\gamma)$, $\gamma \in E_k$, що визначається формулою (35) ((40)), буде точним на поліномах степеня не вище $n$, а якщо $M < \overline{p}$, то інтерполянт мінімальної норми $P_n(\gamma)$ не має такої властивості.

У **розділі 5** наведено застосування результатів дисертаційного дослідження для розв'язання прикладних задач.

У **підрозділі 5.1** показано, що необхідні та достатні умови існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідовому просторі еквівалентні необхідним та достатнім умовам сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі) та нерівностей (теорема С. М. Чернікова). Надано поліноміальне наближення (інтерполяцію) функції багатьох змінних.

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Aa = y, \tag{41}$$

де $A : R_n \to R_m$, $A = \|\alpha_{ij}\|_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f : E_n \to R_1$, $E_n$ — $n$-вимірний евклідовий простір, $u \in E_n$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Інтерполяційний поліном першого степеня для $f(u)$ запишемо у вигляді

$$P_1(u) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{42}$$

з вузлами інтерполяції $u_k$, $k = \overline{0,m}$ :

$$u_0 = (0, 0, \ldots, 0),$$

$$u_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}), i = \overline{1,m},$$

та інтерполяційними умовами

$$P_1(u_k) = f(u_k) = y_k,\ k = \overline{0,m},\ y_0 = 0. \qquad (43)$$

**Теорема 22.** *Для розв'язання інтерполяційної задачі* (42) – (43) *необхідно та достатньо виконання рівності*

$$(E - \Gamma^+\Gamma)y = 0, \qquad (44)$$

*де* $y = (0, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $(\cdot,\cdot)$ *— скалярний добуток в* $E_n$, $\Gamma^+$ *— псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці* $\Gamma$,

$$\Gamma = \left\| \sum_{p=0}^{1} (u_i, u_j)^p \right\|_{i,j=\overline{0,m}},$$

$E$ *— одинична матриця розмірності* $(m+1) \times (m+1)$.

Показано, що теорема 22 є аналогом теореми Кронекера-Капеллі для системи рівнянь (41) та аналогом теореми С. М. Чернікова для системи лінійних нерівностей

$$|\alpha_{i1}z_1 + \alpha_{i2}z_2 + \cdots + \alpha_{in}z_n - a_i| \le \varepsilon_i,\ i = \overline{1,m},$$

де $\alpha_{ik},\ z_k,\ a_i,\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m}$ — комплексні числа, $\varepsilon_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$.

У **підрозділі 5.2** одержано умови розв'язуваності системи поліноміальних рівнянь. Показано, що одержані умови є достатньо жорсткими, оскільки невеликий клас матриць, які присутні в умовах теореми, можуть їм задовольняти.

В **підрозділі 5.3** наведено розв'язання прикладних задач на підставі одержаних у дисертаційній роботі результатів, а саме: розглянуто алгоритм оберненої інтерполяції для розв'язання лінійних операторних рівнянь за допомогою інтерполянта мінімальної норми та задачу побудови поверхонь. Проведено порівняльний аналіз відомих методів наближення функцій багатьох змінних та запропонованих у дисертаційній роботі.

## ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена розвитку теорії поліноміальної операторної інтерполяції в гільбертових та евклідових просторах.

У дисертації вперше одержано такі результати:

— вирішено проблему знаходження розв'язку інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності в скінченновимірному евклідовому просторі: знайдено умови інваріантної розв'язуваності задачі, показано, що розв'язок єдиний та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів при фіксованих інтерполяційних умовах.

— доведено, що в абстрактному гільбертовому просторі з мірою у загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу Лагранжа з мінімальною нормою до поліноміального оператору. Показано, що в сепарабельному гільбертовому просторі з гаусовою мірою похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою величиною;

— доведено збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми, що побудований за системою вузлів, яка обрана у певний спосіб, до поліноміального оператора;

— у гільбертовому просторі з мірою для нелінійного оператора доведено, що інтерполяційний поліном Лагранжа асимптотично зберігає багаточлени відповідного степеня;

— знайдено оцінку точності інтерполяції поліноміального та цілого операторів у випадку збуреної вихідної інформації та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якої не покращує точності інтерполяції;

— для цілого та поліноміального функціоналів, що визначені на просторах $L_2(0,1)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ та мають збурені значення у вузлах інтерполяції, знайдено оцінку точності у випадку, коли скалярні добутки, що містяться в інтерполяційній формулі Лагранжа обчислюються наближено, одержано кількість інтерполяційних вузлів перевищення якої не покращує оцінку точності.

— у лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі досліджено точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Доведено, що ця інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

— у лінійному топологічному просторі для оператора однієї змінної знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду. Наведено узагальнення інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних у сенсі визначення умов, за яких має місце континуальність відповідної множини вузлів. Розглянуто приклади таких інтерполянтів. Одним із напрямкім застосування інтерполянтів (а першу чергу поліноміальних), що побудовані на континуальній множині вузлів, є обчислення континуальних інтегралів за гаусовою мірою.

— доведено теореми про інтерполяційні поліноми Ерміта та Ерміта-Біркхофа, що мають мінімальну норму на множині інтерполянтів з фіксованими інтерполяційними умовами. У гільбертовому просторі з мірою для нелінійного оператора, показано, що інтерполянт Ерміта асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня. Проведено аналіз точності наближень поліноміальних операторів за допомогою інтерполяційних формул Ерміта.

— у лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному евклідовому просторі показано, що інтерполяційний поліном Ерміта, що має мінімальну норму, яка породжена гаусовою мірою, містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтерполяційних формул Ерміта на багаточленах відповідного степеня.

— у гільбертовому просторі побудовано інтерполяційні формули типу Лагранжа, Ерміта, Ерміта-Біркхофа, що є альтернативою відомим операторним інтерполянтам. Ці формули набагато простіші за побудовою та асимптотично інваріантні щодо поліномів відповідного степеня. Такі формули використовують для аналізу точності інтерполяції, дослідження збіжності інтерполяційного процесу, побудови квадратурних формул для обчислення континуальних інтегралів, тощо.

— знайдено нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь та нерівностей, які пов’язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідовому просторі. Знайдено умови існування розв’язку систем поліноміальних рівнянь.

Результати дисертаційного дослідження можуть знайти практичне застосування при розв’язанні прикладних задач таких як: розпізнавання образів, розповсюдження забруднень, побудова траєкторії руху об’єкта, задачі ідентифікації об’єктів невідомої структури.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Khlobystov V. On Weak Convergence of an Iteration Process with Minimal Norm in a Hilbert Space / V. Khlobystov, E. Kashpur // Journal of Mathematical Sciences. — 2002. — Vol. 109, №4. — P. 1791 – 1794 (Translate from Zhournal obchysluval ‘noi ta prykladnoi matematyky. — 1998. — Vol. 84, №2. — C. 169 – 175) [Scopus].

2. Хлобистов В. В. До питання про точність інтерполяції в гільбертовому просторі з мірою / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 1999. — №2. — С. 313 – 318 [Категорія Б].

3. Khlobystov V. V. On accuracy of polynomial interpolation in Hilbert space in case of approximately given values of operator in nodes / V. V. Khlobystov, E. F. Kashpur // Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2002. — №1. — P. 168 – 174 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, №1, 2002, pp. 168 – 174) [Категорія А, Scopus].

4. Хлобыстов В. В. Анализ точности интерполирования целых операторов в гильбертовом пространстве при возмущенных узловых значениях / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №7. — С. 953 – 960 [Категорія А].
5. Макаров В. Л. Интегральные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур , Б. Р. Михальчук // Український математичний журнал. — 2003. — Том 55, №6. — С. 779 – 790 [Категорія А].
6. Khlobystov V. V. On estimates of accuracy of interpolation for polynomial and entire functionals in $L_2(0,1)$ / V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Kibernetika i Sistemnyj Analiz. — 2004. — №1. — P. 91 – 97 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, № 1, 2004, pp. 91 – 97) [Категорія А, Scopus].
7. Хлобистов В. В. Про точність інтерполювання поліноміальних та цілих функціоналів в $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$ у разі їх наближених вузлових значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2004. — №1. — С. 279 – 286 [Категорія Б].
8. Хлобистов В. В. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №2. — С. 316 – 324 [Категорія Б].
9. Хлобистов В. В. Операторні інтерполянти в гільбертовому просторі асимптотично точні на поліномах / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Поповічева // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — №4 — С. 242 – 248 [Категорія Б].
10. Хлобистов В. В. Про множину операторних інтерполянтів, гранично інваріантних щодо поліномів / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2006. — №2 — С. 246 – 252 [Категорія Б].
11. Кашпур О.Ф. Про точні на поліномах інтерполяційні формули в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева, В. В. Хлобистов//

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2007. — №1. — С. 168 – 172 [Категорія Б].

12. Makarov V. L. On continual interpolation nodes for operators in linear topological spaces / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — Novermber, 2010. — Vol. 62, Iss. 04. — C. 564 – 574. (Ukrainian Original Vol. 62, Iss. 04, 2010, pp. 494 – 503) [Категорія А, Scopus, Web of Science Core Collection].
13. Кашпур О. Ф. Розв'язок інтерполяційних задач типу Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому просторі / О. Ф. Кашпур, О. Д. Трубецкая // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2012. — №4 — С. 122 – 127 [Категорія Б].
14. Kashpur O.F. Invariance and uniqueness of solutions to polynomial interpolation problems in Euclidean space / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of computational and applied mathematics. — 2015. — Vol. 2, Iss. 119. — P. 8 – 14 [Категорія Б, Web of Science Core Collection].
15. Кашпур О. Ф. До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах./ О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов // Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — №10. — С. 10 – 14 [Категорія Б].
16. Кашпур О. Ф. Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком. / О. Ф. Кашпур, В. В. Хлобистов // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — №8. — С. 12 – 17 [Категорія Б].
17. Kashpur O. F. Lagrange interpolation formula in linear spaces / O. F. Kashpur, V. V. Khlobystov // Journal of computational and applied mathematics. — 2018. — Vol. 2, Iss. 128. — P. 61 – 67 [Категорія Б, Web of Science Core Collection].
18. Makarov V. L. Operator Interpolation and Systems of Linear Equations and Inequalities in Euclidean Spaces / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, O. F. Kashpur // Ukrainian Mathematical Journal. — april, 2021. — Vol. 72. — №11. — C. 1758 – 1770 (Ukrainian Original Vol. 72, No. 11, November, 2020, pp. 1524 – 1535) [Категорія А, Scopus, Web of Science Core Collection].
19. Kashpur O. F. Hermite–Birkhoff Interpolation Polynomial of Minimum Norm in Hilbert Space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2021. — Vol. 57, Iss. 5. — C. 803 – 808 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz,

vol. 57, №. 5, 2022, pp. 150 – 156) [Категорія А, Scopus, Web of Science Core Collection].

20. Кашпур О. Ф. Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь в евклідових просторах/ О. Ф. Кашпур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2021. —№1. — С. 74 – 81 [Категорія Б].

21. Kashpur O. F. Solving Hermite interpolation problem in finite-dimensional Euclidean space / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 2. — C. 259 –267 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 2, 2022, pp. 118 – 127) [Категорія А, Scopus, Web of Science Core Collection].

22. Kashpur O. F. Hermite Interpolation Polynomial for Functions of Several Variables / O. F. Kashpur // Cybernetics and Systems Analysis. — 2022. — Vol. 58, Iss. 3. — C. 399 – 408 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, vol. 58, №. 3, 2022, pp. 91 – 100) [Категорія А, Scopus, Web of Science Core Collection].

23. Кашпур О. Ф. Фундаментальні поліноми інтерполяційної формули Ерміта в лінійному нормованому та в евклідових просторах / О. Ф. Кашпур // IX Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, Україна, 10 – 11 жовтня 2022 р., Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2022. — №2. — С. 50 – 58 [Категорія Б].

24. Хлобыстов В. В. О точности интерполирования целых операторов в пространстве $L_2(0,1)$ / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // IX Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, Україна, 16 – 19 травня 2002 р. — С. 387.

25. Хлобистов В. В. Про точність інтерполяції операторних поліномів в гільбертовому просторі у випадку збурених їх значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика" присвячена 80-річчю академіка НАН України І.І.Ляшка Київ, Україна, 9 – 10 вересня 2002 р. — С. 97.

26. Хлобистов В. В. Аналіз точності інтерполяції поліноміальних та цілих функціоналів у випадку наближених вузлових значень / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур // X Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 13 – 15 травня 2004 р. — С. 539.

27. Хлобыстов В. В. Асимптотически инвариантный относительно полиномов интерполянт типа Эрмита в гильбертовом пространстве / В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур // Міжнародна конференція “Питання оптимізації обчислень” (ПОО – XXXII) присвячено пам’яті академіка В. С. Михалевича, Кацивелі, Україна, 19 – 23 вересня 2005 р. — С. 209.

28. Хлобистов В. В. Про множину операторних інтерполянтів, гранично інваріантних щодо поліномів / В. В. Хлобистов, О. Ф. Кашпур, Т. М. Малишева // XI Міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, Україна, 18 – 20 травня 2006 р. — С. 633.

29. Кашпур О. Ф. Побудова операторних інтерполянтів типу Ерміта, що є асимптотично точними на поліномах / О. Ф. Кашпур // III Міжнародна конференція “Обчислювальна та прикладна математика” присвячена пам’яті академіка НАН України І. І. Ляшка, Київ, Україна, 11 – 12 вересня 2009 р. — . С. 41.

30. Гаркуша В. И. Вычислительные технологии для задач прогнозирования / В. И. Гаркуша, Е. Ф. Кашпур, А. И. Рыженко, Д. И. Черний // IV Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика”, Київ, Україна, 8 – 10 вересня 2011 р. — С. 61.

31. Черній Д. І. Технології прогнозування наслідків небезпечних техногенних впливів та катастроф / Д. І. Черній, В. І. Гаркуша, А. Д. Головенко, О. Ф. Кашпур, А. І. Риженко // XVII International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties”, (PDMU – 2011), Skhidnytsia, Ukraine, May 23 –27, 2011. — С. 174 – 176.

32. Гаркуша В. І. Обчислювальні технології комп’ютерного моделювання / В. І. Гаркуша, О. Ф. Кашпур, А. В. Кузьмін, А. І. Риженко, Д. І. Черній // VII Міжнародна конференція імені І. І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика”, Київ, Україна, 9 – 10 жовтня 2014 р. — С. 37.

33. Кашпур О. Ф. Про інваріантну розв’язуваність задачі інтерполяції функції двох змінних/ О. Ф. Кашпур // XVII International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability” (DSMSI), Kyiv, Ukraine, May 27 – 29, 2015. — С. 74.

34. Kashpur O. F. The interpolation of many-variable functions / O. F. Kashpur // XXXV International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU – 2020), Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, May 11 – 15, 2020. — С. 50 – 51.

35. Kashpur O. F. The interpolation problem and system of nonlinear equations in Euclidean spaces / O. F. Kashpur // XXXVI International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU – 2021), Skhidnytsia, Ukraine, May 11 – 14, 2021. — C. 43.

36. Kashpur O. F. On the invariance and uniqueness of the solution of Hermite interpolation problems in Euclidean space / O. F. Kashpur // XXXVII International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU – 2022), Sheki–Lankaran, Republic of Azerbaijan, November 23 – 25, 2022. — C. 50 – 51.

## АНОТАЦІЯ

**Кашпур О. Ф. Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи (11 – Математика та статистика). – Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ, 2023.

Дисертація присвячена розвитку теорії поліноміальної операторної інтерполяції в гільбертових та евклідових просторах.

У скінченновимірному евклідовому просторі вирішено проблему знаходження розв’язків інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності. Знайдено умови інваріантної розв’язуваності та єдиності розв’язку цих задач.

Досліджено збіжність інтерполяційних процесів та знайдено оцінки точності поліноміальної операторної інтерполяції Лагранжа в гільбертовому просторі з мірою у випадку збуреної вихідної інформації для поліноміальних та цілих операторів. Знайдено кількість вузлів інтерполяції перевищення якої не покращує точності інтерполювання. Проведено аналіз точності інтерполяції поліноміальних та цілих функціоналів, що визначені на просторах $L_2(0,1)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$.

Для поліноміальних та нелінійних операторів в гільбертовому просторі побудовано інтерполянти Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркхофа, що є асимптотично точними на поліномах відповідного степеня.

Досліджено точність інтерполяційних формул Лагранжа та Ерміта на багаточленах відповідного степеня. Показано, що ці формули містять фундаментальні поліноми.

У лінійному топологічному просторі для операторів однієї та багатьох змінних знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду.

Розв’язано екстремальні задачі про знаходження операторних інтерполяційних поліномів Ерміта та Ерміта-Біркхофа, що мають мінімальну норму на множині інтерполянтів, які відповідають фіксованим інтерполяційним умовам.

Знайдено нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь та нерівностей, які пов’язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах.

**Ключові слова:** нелінійний оператор, поліноміальний оператор, цілий оператор, гільбертовий простір, евклідів простір, операторна інтерполяція, інтерполяційний поліном Лагранжа, інтерполяційний поліном Ерміта, інтерполяційний поліном Ерміта-Біркхофа, диференціал Гато, мінімальна норма, точність, збіжність інтерполяційного процесу.

## ABSTRACT

**Kashpur O. F. Interpolation of operators in Hilbert and Euclidean spaces.** – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the scientific degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the speciality 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computational Methods (11 – Mathematics and Statistics). – V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis focuses on the solution of Lagrange, Hermite, and Hermite-Birkhoff operator interpolation problems in Hilbert and Euclidean spaces, and aims to study the interpolation convergence, obtain the accuracy estimation of interpolation formulas, and outline the conditions for the solvability of the interpolation problem in case of under determinacy.

In Chapter 1 reveals the statements of operator interpolation problems and the analysis of the relevant scholarly papers.

In Chapter 2 shows that in general, the interpolation does not converge to the polynomial operator for the Lagrange interpolation problem in the abstract Hilbert space. It is proved that in a separable Hilbert space with a Gaussian measure, the interpolation error can be made arbitrarily small. The research ascertains that the interpolation stays convergent when there is a certain choice of interpolation nodes. The paper investigates Lagrange interpolation formulas for a nonlinear operator and shows that interpolants asymptotically retain polynomials of the corresponding degree. The study reveals the interpolation accuracy estimation of polynomial and integer operators when initial information is disturbed. Also, the number of interpolation nodes is obtained and shown that its exceeding does not improve the accuracy of interpolation formulas. Similar theorems are proved for polynomial and integer functionals that are defined on the spaces $L_2(0,1)$ and $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\pi)$. The investigation assumes the conditions for the invariant solvability of the Lagrange interpolation problem in Euclidean space in case of under-determinacy. Accordingly, it is stated that the solution is the only one and has the minimum norm. The study investigates the accuracy of the Lagrange formula on polynomials of the appropriate degree in a linear infinite-dimensional space with a scalar product and in a finite-dimensional Euclidean space, and it shows that this interpolation formula contains fundamental Lagrange polynomials.

In Chapter 3, in linear topological space an interpolation Newton-type polynomial of integral form is considered. The chapter proves a theorem concerning the conditions of continual nodes existence for the chosen interpolant. The obtained result for operators of many variables is generalized, and the examples of such interpolants are considered.

In Chapter 4 reveals the Hermite interpolation polynomial in Hilbert space with a measure. It is proved that the interpolant has a minimum norm and asymptotically preserves polynomials of the corresponding degree. Furthermore, the chapter considers the issue of interpolation accuracy and convergence to the second-degree polynomial operator. It is shown that Hermite interpolants for a nonlinear operator asymptotically preserve polynomials of the corresponding degree. The investigation outlines the Hermite interpolation problems in the Euclidean space when it is given the value of the function of many variables and the value of its corresponding first- and second-order Gateaux differentials. It is also revealed that these problems have a unique minimum norm solution. The study demonstrates the conditions of invariant solvability and problem solutions in case of under-determinacy. In the normalized infinite-dimensional linear and finite-dimensional Euclidean spaces, it is shown that the Hermite interpolation polynomial of minimum norm contains fundamental polynomials. The accuracy of Hermite interpolation formulas on polynomials of the corresponding degree is studied. The theorem on the Hermite-Birkhoff interpolant of the minimal norm in a Hilbert space is proved.

In Chapter 5 ascertains the new compatibility criteria of the linear system of equations and inequalities and are related to the conditions of existence of a linear interpolation polynomial in Euclidean spaces. The conditions for the existence of the polynomial equation solution are found. Examples of solving problems using the obtained results are considered, namely, surface construction and identification problem-solving

**Key words:** nonlinear operator, polynomial operator, integer operator, Hilbert space, Euclidean space, operator interpolation, Lagrange interpolation polynomial, Hermite interpolation polynomial, Hermite-Birkhoff interpolation polynomial, Gateaux differential, minimum norm, accuracy, interpolation convergence.