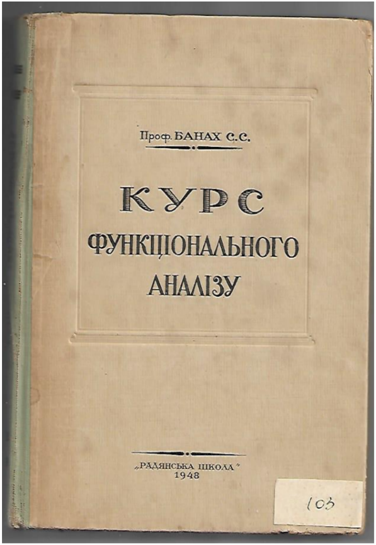
The golden years of optimization

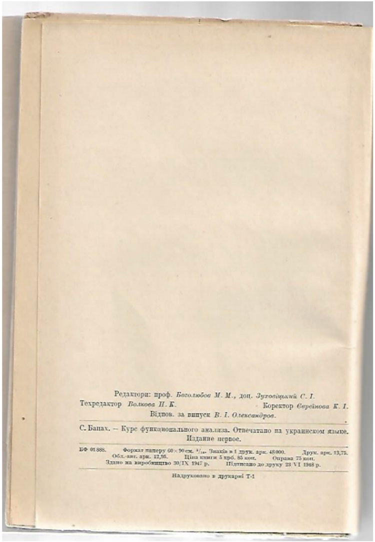
Roman A.Polyak
George Mason University, USA
rpolyak@gmu.edu

March 14th, 2023

U.D.Sokolov
(1896-1971)

S.I.Zychovitsky
(1907-1994)




Редактори: проф. *Боголюбов М. М.*, доц. *Зуховіцький С. І.*
Техредактор *Волкова П. К.* Коректор *Євреїнова К. І.*
Відпов. за випуск *В. І. Олександров.*

С. Банах. – Курс функционального анализа. Отпечатано на украинском языке.
Издание первое.

БФ 01888. Формат паперу 60×90 см. 1/16. Знаків в 1 друк. арк. 48000. Друк. арк. 13,75.
Обл.-авт. арк. 12,95. Ціна книги 5 крб. 85 коп. Оправа 75 коп.
Здано на виробництво 30/IX 1947 р. Підписано до друку 23 VI 1948 р.

Надруковано в друкарні Т-1

С. С. БАНАХ

Стефан Стефанович Банах народився 30 березня 1892 р. в Кракові. Закінчивши в 1910 р. 4 Краківську гімназію, вступив до Львівського політехнічного інституту, де вчився до 1914 р. В студентські роки почав захоплюватися математикою, якій віддавав вільний час. В 1920 р. С. Банах подав до Львівського університету дисертацію на ступінь доктора філософії, опубліковану пізніше, 1922 р., в III томі журналу „Fundamenta Mathematicae“ під назвою: „Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales“. Ця робота стала фундаментом для його дальших багаторічних досліджень, які принесли йому світову славу. Саме в ній уперше С. Банах впроваджує в науку загальне поняття[1] лінійного нормованого повного простору, який тепер називають **просторо м** Банаха.

В 1922 р. С. Банах був запрошений до Львівського університету як професор математики. Його лекторський талант, доступність та простота в поводженні привертають до нього наукову молодь. За короткий, порівняно, період, завдяки зусиллям Банаха та його вчителя Г. Штейнгауза у Львові формується науковий колектив, відомий широким математичним колам під назвою Львівської математичної школи.

Кінець 20-х років для Банаха був періодом не тільки визначних творчих успіхів, а й серйозних організаційних удач. У 1929 р. він спільно з Штейнгаузом організує журнал „Studia Mathematica“, який має своїм завданням групувати дослідження з функціонального аналізу та його застосувань. Цей журнал дав можливість Львівській математичній школі організовано виступити з пропагандою розроблюваного нею напряму в математиці. У першому ж номері цього журналу публікується в двох частинах фундаментальна праця Банаха: „Sur les fonctionnelles linéaires“, в якій встановлюється ряд найтонших методів та положень сучасної теорії лінійних функціональних просторів.

У 1931 р. вийшло перше (польське) видання однієї з найбільш визначних книг сучасної математики — книги Банаха: «Теорія операцій», яка в 1932 р. була перевидана французькою мовою під назвою: „Théorie des opérations linéaires“ в польській серії „Monografje Matematyczne“. У цій книзі теорія лінійних нормованих функціональних просторів уперше предстала як деяка струнка наукова будова, що має своєрідну архітектуру та численні виходи в різні галузі математичного аналізу: теорію інтегральних рівнянь, рівнянь в частинних похідних, теорію міри та інтеграла, теорію ортогональних рядів, сумаційні методи і т. д. Вклад С. Банаха та його учнів в справу створення нової прекрасної області математики виявився надзвичайним. Найбільш загальні принципи розширення лінійних функціоналів, фундаментальні теореми про обернення операторів, встановлення властивостей базиса простору, теорема про вкладення сепарабельних просторів у простір (C), теорія трансфінітно-

[1] Незалежно від Банаха це поняття було введене Н. Віпером в праці, опублікованій в 1922 р., як і дисертація С. Банаха.

замкнених підпросторів простору лінійних функціоналів і т. д. — усі ці визначні досягнення і основоположні результати — прямий вклад С. Банаха та його школи в нову галузь математики. Книга С. Банаха дуже швидко завоювала в різних країнах всесвіту численних прихильників нового напрямку математики; зокрема, слід відзначити виключну її роль в справі створення шкіл функціонального аналізу в СРСР, США та в деяких інших країнах.

Виходець з народу, С. Банах був переконаний демократ. Саме тому він радісно зустрів прихід у Львів Червоної Армії в 1939 р. і негайно взявся за налагодження наукової та навчальної роботи з математики в університеті. Його керівна роль у Львові відбилася і в тому, що львівські математики встановили найтісніший контакт із вченими СРСР. У 1939—1941 рр. професор Банах приїжджав з доповідями до Москви, Києва, Тбілісі і встановив не тільки наукові, а й особисті дружні зв'язки з найвидатнішими радянськими математиками.

В 1940 р. трудящі Львова, цінуючи Банаха не тільки як видатного вченого, а й як демократа — громадського діяча, обрали його депутатом міської Ради. У міськраді він очолив культосвітню роботу.

На початку 1940 р. С. Банах був запрошений на керівну роботу до Інституту математики Академії наук УРСР (Львівська філія).

У 1940 р. він був затверджений членом редакції провідного радянського математичного журналу «Математический сборник».

Роки німецької окупації відірвали Банаха від колективу радянських математиків і зовсім знищили можливості для наукової роботи. Про умови цього періоду можна скласти собі правдиве уявлення з листа, якого після смерті С. Банаха надіслала його дружина Л. І. Банах радянським математикам перед від'їздом до Польщі:

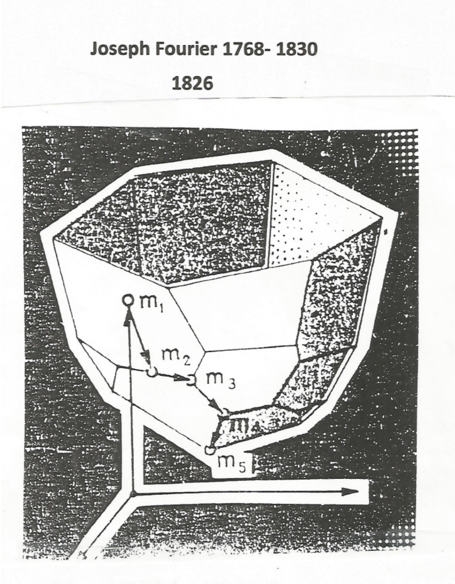
«. . . Усі ми ходили під страхом щохвилинної смерті. Багато колег мого чоловіка, професорів університету та політехнікуму, розстріляно, закатовано в страшні дні німецької окупації. Непривітний погляд, інтелігентне обличчя — цього було досить, щоб потрапити в гестапо, а звідти вже не було вороття. Мій чоловік переховувався, а потім, щоб існувати, вступив до протитифозного інституту Вейгла . . .» Там прославленого математика використовували як об'єкт рискованих і принизливих для людської гідності медичних експериментів. «У ці дні єдиною мрією мого чоловіка було повернення Червоної Армії. Він вірив в її повернення, він чекав. Цей день настав, але німецька окупація не пройшла даремно: тільки рік після визволення Львова прожив мій чоловік. За цей час він знову став професором, знову повернувся до справи, якій присвятив життя . . .»

Після визволення Львова від німецько-фашистських окупантів С. Банах працював у відновленому Львівському університеті як декан фізико-математичного факультету. Він з властивою йому енергією та відданістю справі включився до цієї роботи. У березні 1945 р. він брав участь, як делегат, у Всеслов'янському антифашистському конгресі в Софії і виступав з палкими промовами на захист цивілізації та культури.

У перші місяці 1945 р. С. Банах був гостем московських та київських математиків. Він говорив про свої наукові та педагогічні плани. Цим планам не судилось здійснитись, — 31 серпня 1945 р. він помер.

- Ю.М.Березанский 1925-2019
- В.С.Королюк 1925-2020
- В.С.Михалевич 1930-1994
- А.В.Скороход 1930-2011

S.I.Zychovitsky
1949

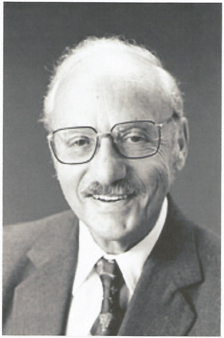


Note of Jordan elimination Linear Programming and Tchebycheff approximation.
Stiefel E. Numerische Matematik 1960

Stanford Report, May 25, 2005

George B. Dantzig, operations research professor, dies at 90

BY DAWN LEVY



George Bernard Dantzig

1947

Линейное программирование следует рассматривать как часть великой революции, которая дала человечеству возможность формулировать большие цели и указала наилучшие пути для достижения этих целей в практических ситуациях огромной сложности

Linear Programming

Kantorovich L.V. 1939, George Dantzig 1947:

$$(c, x^*) = \max\{(c, x) | Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$
$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$$

John von Neumann 1947:

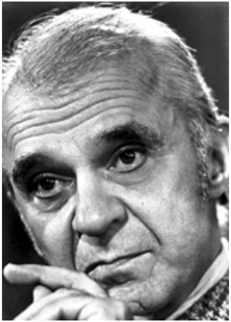
$$(b,\lambda^*) = \min\{(b, \lambda) | A^T\lambda \geq c, \lambda \geq 0\}$$

1. $(c, x^*) = (b, \lambda^*)$
2. $(A^T\lambda^* - c, x^*) = 0, (b - Ax^*, \lambda^*) = 0$

G.Dantzig (1914-2005)
L.Kantorovich (1912-1986)
T.Koopmans (1910-1985)

In 1975 L.V. Kantorovich and T.C. Koopmans
Shared the Nobel Prize in Economics
"for their contribution to the theory of optimal allocation of limited resources."

Wassily Leontief
(1906-1999)



In 1973 Wassily Leontief received the Nobel Prize in Economics "for the development of the input-output(IO) model and for its application to the important economic problems" .

L.V.Kantorovich, V.S.Nemchinov, V.V.Novogilov

The Lenin Prize

1965

Kiev's School of Optimization

Б.Н. Пшеничный
(24.04.1937 – 17.10.2000)

- Проектирование сетей и теория графов
- Вычислительные методы оптимизации и теория оптимального управления
- Выпуклый анализ и необходимые условия экстремума
- Многозначные отображения и дифференциальные включения
- Теория дифференциальных игр и задачи поиска
- Модели экономической динамики
- Минимаксное оценивание параметров
- Построение инвариантных множеств динамических систем
- Решение вариационных неравенств

Н.З. Шор
(01.01.1937 – 26.02.2006)

- Последовательные алгоритмы оптимизации
- Субградиентные методы негладкой оптимизации
- Схемы декомпозиции при решении задач большой размерности
- Метод эллипсоидов и его применение для решения выпуклых и комбинаторных задач
- Методы субградиентного типа с растяжением пространства
- Исследование двойственных оценок в многоэкстремальных и булевых задачах, связанных с 17-ой проблемой Гильберта
- Алгоритмы оптимизации негладких матричных функций и их применение в теории динамических систем и теории устойчивости
- Многочисленные приложения к задачам

Стохастические модели и методы в экономическом планировании.

Методы стохастического программирования.

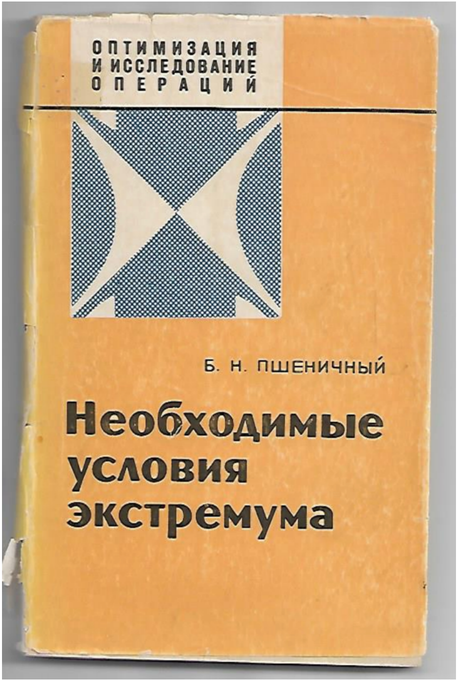
Экстремальные задачи на графах.

Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления.

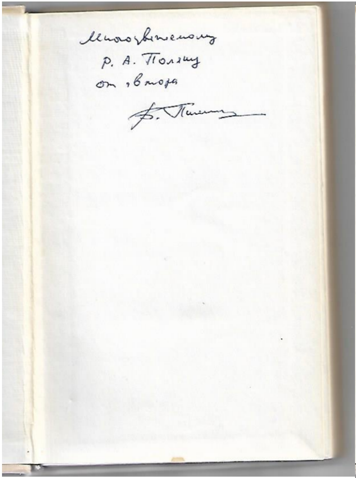
Математические методы исследования операций.

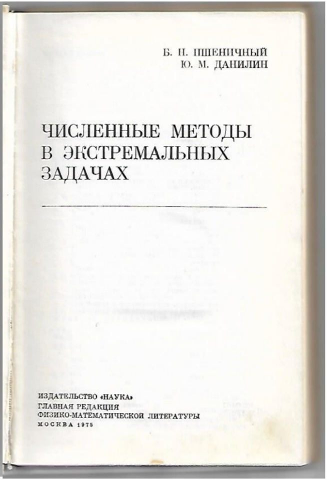
Ю.М. Ермольев

1936-2022


ОПТИМИЗАЦИЯ
И ИССЛЕДОВАНИЕ
ОПЕРАЦИЙ
Б. Н. ПШЕНИЧНЫЙ
Необходимые
условия
экстремума

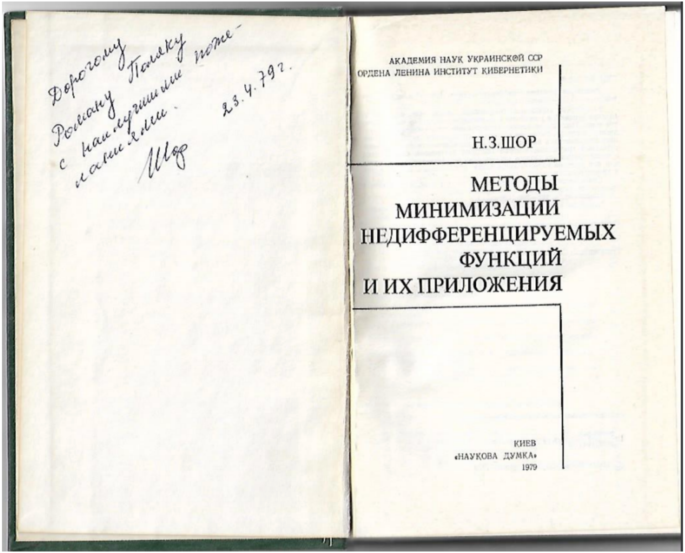

Б.Н. ПШЕНИЧНЫЙ
МЕТОД
ЛИНЕАРИЗАЦИИ




Б. Н. ПШЕНИЧНЫЙ
Ю. М. ДАНИЛИН

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975



Дорогому
Роману Поляку
с наилучшими поже-
ланиями.
Шор
23.4.79г.

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

Н.З.ШОР

МЕТОДЫ
МИНИМИЗАЦИИ
НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ФУНКЦИЙ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

КИЕВ
«НАУКОВА ДУМКА»
1979


Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ
И. М. МЕЛЬНИК
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ
ЗАДАЧИ
НА ГРАФАХ

Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ

МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

Nonsmooth Optimization

N.Shor, B.Pshenichnyi, B.Polyak, U.Ermol'ev, V.Demyanov, E.Nurminskij, N.Gurbenko, P.Stetsyuk

Ellipsoid Method

N.Shor 1976

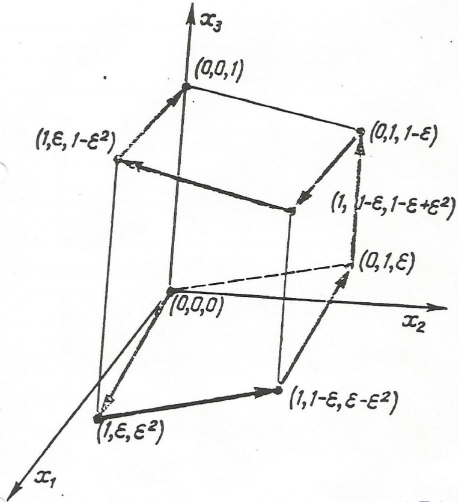
D. Yudin and A.Nemirovskii 1976

Polynomial Complexity of the Ellipsoid method for LP

L.Khachiyan 1979

Klee (1925-2007)–Minty

perturbed cube 1973



Revised Simplex Method

$m(n-m)+(m+1)^2$ multiplications

and $m(n+1)$ additions at each iter.

$O(mn)$ operations per iteration

Number of iterations

$$c_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \geq 2^m, \quad n \geq 2m$$

$$
\begin{aligned}
L = {} & \Sigma\Sigma\left|\log_2\left(|a_{ij}|+1\right)\right| \\
& + \Sigma\left\lceil\log_2\left(|b_i|+1\right)\right\rceil \\
& + \Sigma\left\lceil\log_2\left(|c_i|+1\right)\right\rceil \\
& + \Sigma\left\lceil\log_2\left(n+1\right)\right\rceil + \Sigma\left\lceil\log_2\left(m+1\right)\right\rceil \\
& + \left(mn+m+n+1\right)
\end{aligned}
$$

$(m+n+1+mn)$ – signs of all numbers

$$
x \in S\left(x^*, 2^{-L}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{\mathcal{O}(n^3)} x^*
$$

Leonid Khachiyan 1952-2005
1979

Simplex Method - $O(2^n)$

Ellipsoid Method **N. Shor** (1937 - 2006)

1970, 1972, 1975

D. Yudin (1919 - 2006), **A. Nemirovsky**

1976

L. Khachiyan (1952 - 2005)

1979

$$\Delta_{s+1} = f(x_{s+1}) - f(x^*) \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \Delta_s$$

$O(n^2)$ operations per step

total $O(n^4 L)$

N. Karmarkar 1984

$$\Delta_{s+1} \leq \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) \Delta_s$$

$O(n^{2.5})$ operations per step

total $O(n^{3.5} L)$

J. Renegar (1988)

$$\Delta_{s+1} \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Delta_s$$

$O(n^{2.5})$ operations per step

total $O(n^{3} L)$

G. Gonzaga

$$\Delta_{s+1} \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Delta_s$$

$O(n^{2.5})$ per step

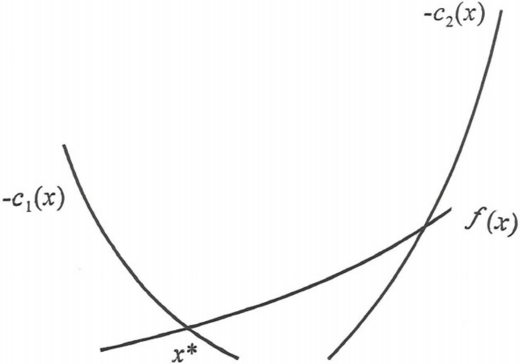
total $O(n^3 L)$

Yu. Nesterov, A Nemirovsky

1988 - 1993

Self - concordance Theory total $O(n^3 L)$

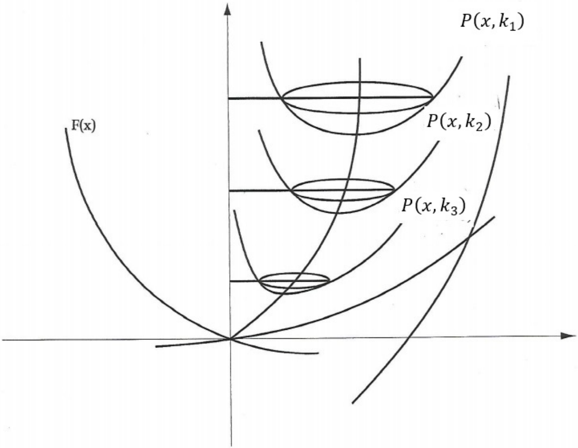
for large classes of convex optimization problems.



$$F(x) = \max\{f(x),\ -c_i(x),\quad i = 1,\ldots,m\}$$

$$f(x^*) = \min\{f(x)\,|\,c_i(x) \geq 0, 1 \leq i \leq m\} = 0$$

Smooth approximation of $F(x)$ by log barrier function



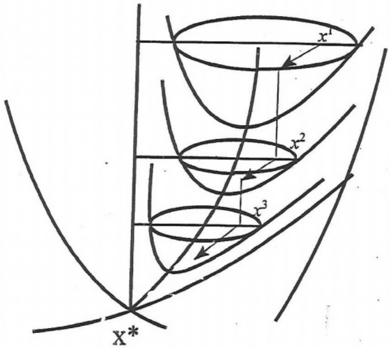
$$P(x, k) = f(x) - k^{-1} \sum \ln c_i(x)$$

$$k_1 < k_2 < \ldots$$

Ragnar Frisch 1895-1973

Log-Barrier function in constrained optimization 1954-1955

Sheared **Nobel Prize** in Economics 1969 with Dutch economist Jan Tinbergen



$$x^{s+1} = x^s - (\nabla^2_{xx} P(x^s, \mu^s))^{-1} \nabla_x P(x^s, \mu^s)$$

$$\mu^{s+1} = (1 - \alpha/\sqrt{n})\, \mu^s, \qquad \alpha = 13^{-1}$$

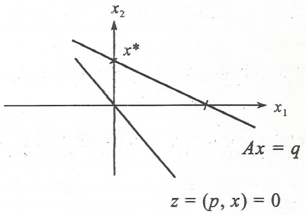
S. Smale, M. Shub 1992

$$\Delta_{s+1} = f(x^{s+1}) - f(x^*) \leq (1 - \alpha/\sqrt{n})(f(x^s) - f(x^*)) = (1 - \alpha/\sqrt{n})\Delta_s$$

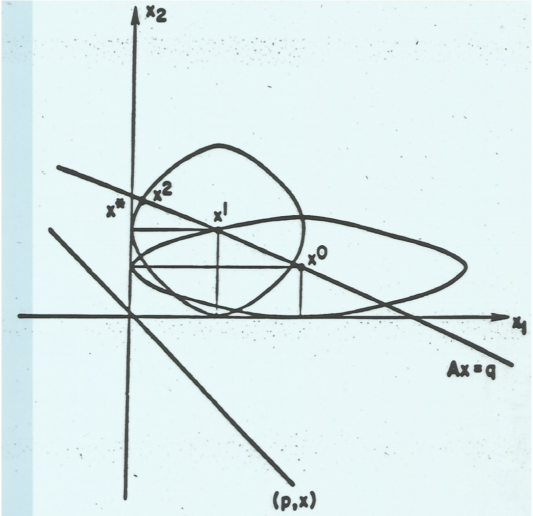
Linear Programming

$$z = (p, x) \to \min$$

$$Ax = q$$
$$x \geq 0$$

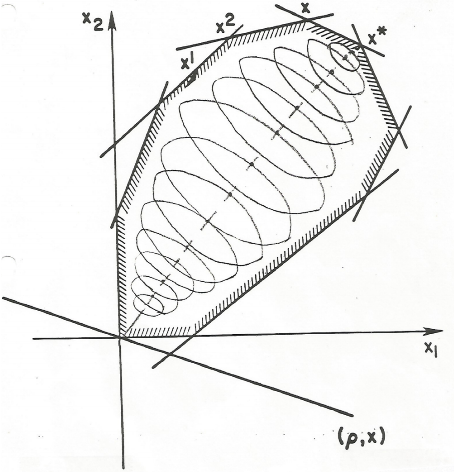


Affine Scaling Method for LP



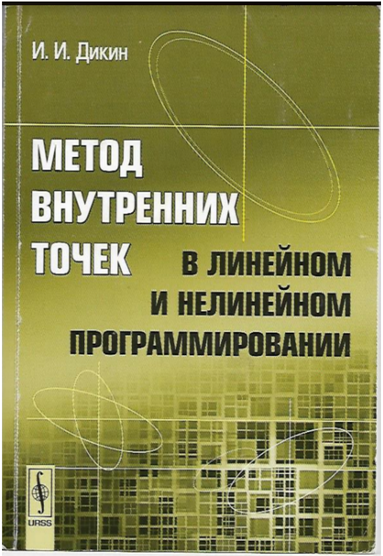
$$(p, x^{s+1} - x^*) \le \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n-m+\varepsilon_s}}\right)(p, x^s - x^*), \quad \varepsilon_s \to 0$$

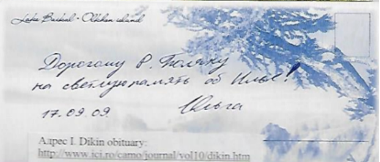
I.I. Dikin 1967

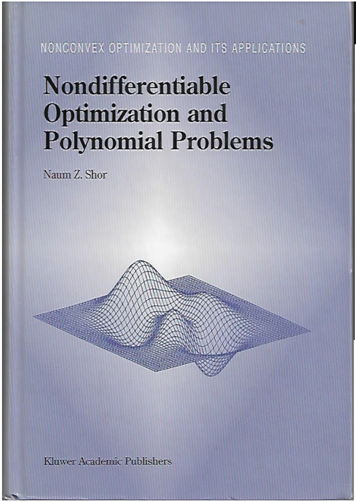


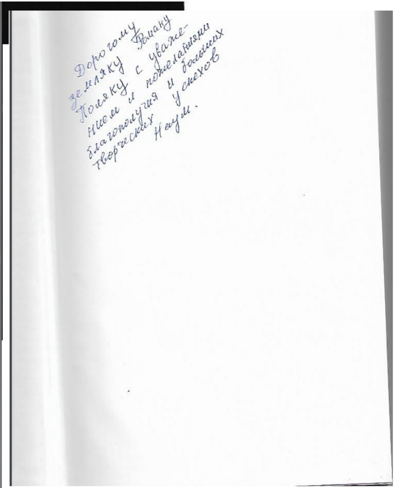
Ilya Dikin (1936-2008)
1967

E.Barnes IBM 1986
R.Vanderbei, M.Meketon
B.Fridman ATæT


И. И. Дикин
МЕТОД ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК В ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ
URSS


Lake Baikal · Olkhon island
Дорогому Р. Поляку
на светлую память об Илье!
Ольга
17.09.09.
Адрес I. Dikin obituary:
http://www.ici.ro/camo/journal/vol10/dikin.htm


NONCONVEX OPTIMIZATION AND ITS APPLICATIONS
Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems
Naum Z. Shor
Kluwer Academic Publishers


Дорогому
земляку Роману
Поляку с уваже-
нием и пожеланиями
благополучия и больших
творческих успехов
Наум.

S. Zukhovitsky , R.Polyak and M. Primak

1. "An Algorithm for Solving Convex Tchebyshev Approximation Problem" Dokl. Acad. Nauk SSSR, 1963
2. "An Algorithm for Solving Convex Programming Problem" Dokl, Acad. Nauk SSSR, 1963
3. "Numerical Method for Solving Convex Programming Problem in Hilbert Space" Dokl, Acad. Nauk SSSR, 1965
4. "Linear and Convex Programming" .Ch.4 and Ch6. Nauka 1967
5. "One Non-Convex Programming Problem" Dokl. Acad. Nauk SSSR,1968
6. "One Class of Concave Programming Problems" Ekonomics and Mathematical Methods, v.4, 1968.
7. "Two Methods for finding Equilibrium Points of N-Person Concave Games" Dokl, Acad. Nauk SSSR,1969.
8. "N-Person Concave Games and One Production Model" Dokl, Acad. Nauk SSSR,1970
9. "One General Equilibrium Problem" Dokl, Acad. Nauk SSSR 1973

S.I.Zuchovitsky, R.Polyak

1. "An Algorithm for Solving Rational Chebyshev Approximation Problem" Dokl.Acad. Nauk SSSR, v. 159, No. 4,1964

R.Polyak, M.Primak

1. "Methods of Controlling Sequences for Solving Equilibrium Problems" Part1 Cibernetics 13,no 2, 1977
2. "Methods of Controlling Sequences for solving Equilibrium Problems" Part 2, Cibernetics 13 n 4, 1977

R. Polyak

1. "Algorithm for Simultaneous Solution Primal and Dual Convex Programming Problems" Transaction of the Scientific Seminar, Cibernetic Institute, Kiev, 1966
2. "The Best Convex Chebyshev Approximation" Dokl. Akad. Nauk SSSR, v. 12, No. 5, 1971
3. "A Balance-Econometric Model" in Transaction of Mathematical Modelling, Moscow, 1976.
4. "A New approach to multi-objective optimization" Ekonomics and Mathematical Methods 1971
5. "Convergence Acceleration for the Convex Programming Methods: Linear Constraints" with L. Kirievsky, Dokl. Akad. Nauk.SSSR 1973
6. "Convergence Acceleration of the Convex Programming Methods: Nonlinear Constraints" Soviet Math. Dokl, v. 14, No. 5, 1973
7. "A General Principle for Convergence Acceleration in Convex Programming" Ekonomics and Mathematical Methods, v.4, 1974

8. "The Newton Method in Optimization Theory"; ZNANIA, Kiev, 1978
9. "Controlling Sequences Method in Constrained Optimization" CMMP 1978
10. "Finding a Fixed Point of a Class of Set-Valued Mappings" Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 1978

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ
"ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ
НАРОДНЫМ ХОЗЯЙСТВОМ"
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
им. В.В.КУЙБЫШЕВА
ДРОГОБЫЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. И.Я.ФРАНКО

ТРУДЫ
ПЯТОЙ ЗИМНЕЙ ШКОЛЫ
ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ
И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Москва
1973

G.Zoutendijk

Boris
(1935-2023)

B.Polyak - S.Lojasiewcz Condition

$$\frac{1}{2}\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|^{2}\geq\mu\left(f\left(x\right)-f\left(x^{*}\right)\right)$$

$$\left\|\nabla f\left(x\right)-\nabla f\left(y\right)\right\|\leq L\left\|x-y\right\|$$

$$x_{k+1}=x_{k}-\frac{1}{L}\nabla f\left(x_{k}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f\left(x_{k}\right)-f\left(x^{*}\right)\leq\left(1-\frac{\mu}{L}\right)^{k}\left(f\left(x_{0}\right)-f\left(x^{*}\right)\right)$$

Gradient method for minimization of functions CMMP 1963

602 References

Machine Learning

Heavy Ball Method

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f\left(x_k\right) + \beta\left(x_k - x_{k-1}\right)$$

$$\beta(x_k - x_{k-1}) \quad \text{B.Polyak's momentum}$$

$$mI \leq \nabla^2 f\left(x^*\right) \leq MI$$

$$\mu = Mm^{-1}$$

One step gradient

$$q_1 = \left(1 - \frac{2}{\mu}\right)$$

Two step gradient

$$q_2 = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\mu}}\right)$$

Some methods to speeding up convergence of iteration methods CMMP 1964

2595 references

A general method of solving extremal problems DAN SSSR 1967

701 references

Minimization of unsmooth functions CMMP 1969

795 references

Constraint minimization methods
E.Levitin, B. Polyak CMMP 1965

1179 references

The conjugate gradient method in extremal problems CMMP 1969

1234 references

Pseudo-gradient adaptation and training algorithms
B. Polyak, Y.Tsypkin, Automation and remote control (ARC) 1973

297 references

Convergence and convergence rate of iterative stochastic algorithms ARC 1976

789 references

On the solution of variational Inequalities
A.Bakushinskii, B.Polyak DAN SSSR 1974

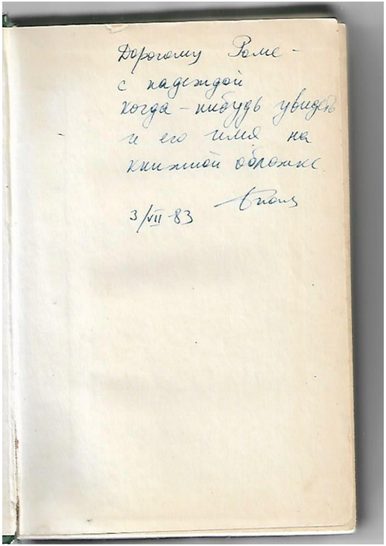
173 references

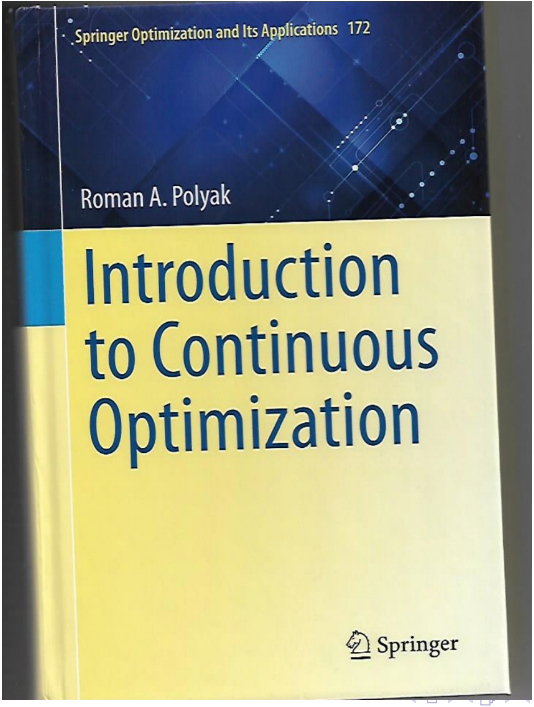
Adaptive estimation algorithms: convergence, optimality, robustness.
B.Polyak, Y.Tsypkin ARC 1979

146 references


POLYAK
MATHEMATICS


Е.Т.ПОЛЯК
ВВЕДЕНИЕ
В ОПТИМИЗАЦИЮ


Дорогому Роме -
с надеждой
когда-нибудь увидеть
и его имя на
книжной обложке
3/VII-83


Springer Optimization and Its Applications 172
Roman A. Polyak
Introduction to Continuous Optimization
Springer