УДК 517.988

О. Ф. КАШПУР (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ОПЕРАТОРІВ В ГІЛЬБЕРТОВИХ ТА ЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРАХ

— доведено, що в абстрактному Гільбертовому просторі з мірою в загальному випадку відсутня збіжність інтерполяційного процесу з мінімальною нормою до поліноміального оператору. Показано, що для лінійного оператора інтерполяційний процес буде збіжним. Доведено, що в сеперабельному Гільбертовому просторі з Гаусовою мірою похибка інтерполяції може бути зроблена як завгодно малою.

— для Гільбертового простру показано, що інтерполяційний поліном мінімальної норми та інтерполянт, що побудований за методом ортогональних моментів тотожньо співпадають у випадку фіксованих інтерполяційних умов. Доведена збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми, що побудований за системою вузлів, яка обрана певним чином, до поліноміального оператора.

— у гільбертовому просторі з мірою розглянуто інтерполяційні формули Лагранжа, у випадку заданих значень нелінійного оператора у вузлах та показано, що інтерполянти асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня.

— знайдено оцінку точності інтерполяції поліноміального оператора у випадук збуреної вихідної інформації та одержано кількість інтерполяційних вузлів, перевищення якого не покращує точності інтерполяційних формул.

— для цілого та поліноміального функціоналів, що визначенені на просторах $L_2(0,1)$, $\overset{0}{W}{}^{1}_{2}(0,\pi)$ та мають збурені значення у вузлах інтерполяції, знайдено оцінку точності у випадку, коли скалярні добутки, що містяться в інтерполяційній формулі Лагранжа обчислюються наближено. Для цього випадку одержано кількість інтерполяційних умов для поліноміальних та цілих функціоналів перевищення якого не покращує оцінку точності.

— знайдено умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі Лагранжа в Евклідовому просторі. При цьому показано, що розв'язок єдиний та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів при фіксованих інтерполяційних умовах.

— в лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному Евклідовому просторі досліджена точність формули Лагранжа на поліномах відповідного степеня. Показано, що ця інтерполяційна формула містить фундаментальні поліноми Лагранжа.

— для функціоналів, що визначені на просторі $\mathbb{Q}[0,1]$ кусково-неперервних функцій на вдрізку $[0,1]$ із скінченої кількістю точок розриву першого роду, побудовано єдиний інтерполяційний поліном типу Ньютона інтегрального вигляду на континуальній множині вузлів. Доведено, що такий інтерполян зберігає поліноми відповідного степеня.

— знайдено умови існування континуальних вузлів для інтерполяційного поліному інтегрального вигляду. Узагальнено одержаний результат для операторів багатьох змінних. Розглянуто приклади таких інтерполянтів.

— у Гільбертовому просторі з мірою побудовано поліном типу Ерміта у випадку, коли задані значення нелінійного оператора та його перші диференціали Гато у вузлах. Доведено, що інтерполянт має мінімальну норму на множині інтерполянтів типу Ерміта з фіксованими інтерполяційними умовами та асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня. Розглянуто питання про точність та збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора другого степеня в разі зростання кількості вузлів.

— у Гільбертовому просторі з мірою розглянуто інтерполяційні поліноми типу Ерміта, у випадку заданих значень нелінійного оператора та його диференціалів Гато у вузлах до певного порядку включно. Показано, що інтерполянти асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня.

— розглянуто інтерполяційні задачі Ерміта в Евклідовому просторі у випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато до першого та до другого порядків відповідно у вузлах інтерполяції. Показано, що ці задачі мають єдиний розв'язок мінімальної норми серед усіх інтерполянтів, що відповідають фіксованим інтерполяційним умовам. Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку цих задач. Доведено, що інтерполянт мінімальної норми є розв'язком задачі Ерміта в умовах недовизначеності, тобто коли вихідної інформації недостатньо, щоб однозначно визначити інтерполяційний поліном. Всі умови теорем одержано в термінах значень функції та її похідних та в термінах матриць, що побудовані за системою вузлів інтерполяції.

— у лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному Евклідовому просторі показано, що інтерполяційний поліном Ерміта, що має мінімальну норму, яка породжена гаусовою мірою, містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтепроляційних формул Ерміта на поліномах відповідного степеня.

— у Гільбертовому просторі наведено інтерполяційні формули типу Лагранжа, Ерміта, Ерміта-Біркхофа, що є альтернативою відомим операторним інтерполянтам. Дані формули набагато простіші за конструкцією побудови та асимптотично інваріантні щодо поліномів відповідного степеня. Наявність оцінок точності дозволяє застосовувати такі інтерполянти для наближення поліноміальних, цілих та диференційованих операторів.

— знайдено нові критерії сумісності лінійної системи рівнянь (еквівалентні теоремі Кронекера-Капеллі) та нерівностей (еквівалентні теоремі С.М.Чернікова), пов'язані з умовами існування лінійного інтерполяційного полінома в евклідових просторах.

— знайдено умовам існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь в Евклідовому просторі та показано, що вони еквівалентні умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня, значення якого на спеціальних інтерполяційних вузлах збігаються з відповідною лінійною системою алгебраїчних рівнянь, тобто лінійною системою, до якої зводиться система поліноміальних рівнянь за допомогою певної заміни змінних.