УДК 519.85

[1] **А.А. Супрун**
Аспірант
[1] **А.В. Івлічев**
Провідний інженер-програміст
[1]*Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ*

Інтерактивна програма для задачі побудови та аналізу плоскої кривої з квадратичною кривиною

Постановка задачі. Рівняння плоскої кривої у натуральній параметризації має вигляд:

$$x(\bar{s}) = x(0) + \int_0^{\bar{s}} \cos\varphi(s)ds, \quad y(\bar{s}) = y(0) + \int_0^{\bar{s}} \sin\varphi(s)ds, \tag{1}$$

де $x(0)$, $y(0)$, $x(\bar{s})$, $y(\bar{s})$ – координати початкової та кінцевої точок плоскої кривої, $\varphi(\bar{s}) = \varphi(0) + \int_0^{\bar{s}} k(s)ds$, $\varphi(0)$, $\varphi(\bar{s})$ – кути нахилу дотичних у початковій та кінцевій точках (кути вимірюються у радіанах), $k(s) = as^2 + bs + c$ – квадратична залежність кривини в точці від s – довжини дуги.

Задача полягає у наступному. Потрібно з'єднати задані точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) кривою таким чином, щоб забезпечити в цих точках задані значення кутів нахилу дотичних φ_1 та φ_2, а в точці з абсцисою x_p, де $x_1 < x_p < x_2$, забезпечити кут рівний φ_p.

Нехай S – довжина кривої від точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2), а s_p– довжина кривої від точки (x_1, y_1) до точки (x_p, y_p). Тоді знаходженню параметрів кривини a, b, c та довжин S, s_p відповідає система з п'яти нелінійних рівнянь та двох обмежень у формі нерівностей [1]:

$$x_2 = x_1 + \int_0^S \cos\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right)ds, \; y_2 = y_1 + \int_0^S \sin\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right)ds, \tag{2}$$

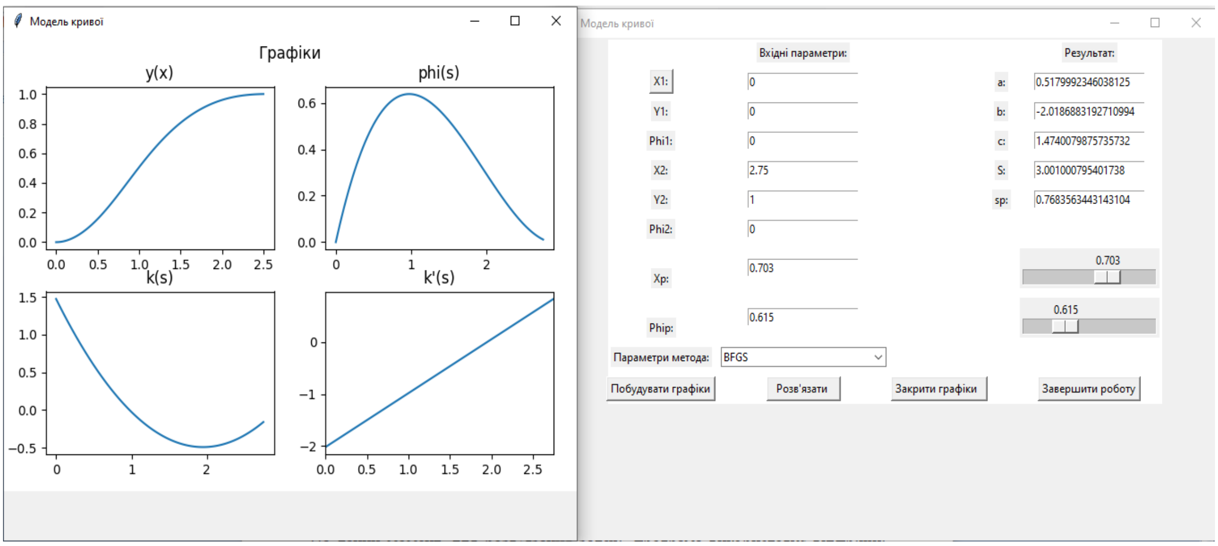
$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS, \; x_p = x_1 + \int_0^{S_p} \cos\left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs\right)ds, \tag{3}$$

$$\varphi_p = \varphi_1 + \frac{as_p^3}{3} + \frac{bs_p^2}{2} + cs, \; \left|x_p - x_1\right| \le s_p \le S, \; S_{\min} \le S \le S_{\max}. \tag{4}$$

Нерівності в (4) для довжин S і s_p введено для контролю над виглядом кривої (1) за допомогою параметрів $S_{\min}$ та $S_{\max}$, щоб уникнути циклічних розв’язків системи із чотирьох рівнянь (2)–(3) та одного рівняння із (4).

Методи розв’язання. Знаходження розв’язку системи (2)-(4) можна звести до задачі мінімізації функції нев’язок для п’яти нелінійних рівнянь із (2)–(4) при двох умовах на невідомі довжини S і s_p із (4). Така функція є багатоекстремальною і точка її глобального мінімуму, в якій значення функції дорівнює нулю, буде розв’язком системи (2)-(4). Для знаходження таких розв’язків, якщо функція нев’язок є сумою модулів нев’язок нелінійних рівнянь, в [1] використовується модифікацію *r*-алгоритма, а якщо функція нев’язок є сумою квадратів нев’язок нелінійних рівнянь, в [2] використовуються відомі квазіньютонівські алгоритми BFGS та L-BFGS-B.

Програмна реалізація. Для розв’язання системи (2)–(4) та аналізу отриманого розв’язку розроблена інтерактивна програма на мові програмування Python. Користувач має можливість вводити початкові дані для системи (2)–(4) та налаштовувати параметри вибраного алгоритму розв’язання системи. В результаті роботи програма відображає на екран розв’язок системи (2)-(4) (якщо він існує), отриману криву та графіки її характеристик (кут нахилу дотичних, кривина та похідна від кривини). Для розв’язання системи (2)-(4) використовуються реалізації алгоритмів BFGS та L-BFGS-B бібліотеки SciPy. Для реалізації інтерфейсу використовуються бібліотеки tkinter та mathplotlib. Приклад діалогового вікна програми представлено на рисунку.



Висновок. Для побудови та аналізу плоских кривих з квадратичною кривиною розроблено інтерактивну програму на основі квазіньютонівських методів [2]. Для розв’язання системи (2)–(4) програма використовує реалізації алгоритмів BFGS та L-BFGS-B з Python-бібліотеки SciPy. Робота підтримана грантом Volkswagen Foundation № 97 775 (другий співавтор).

Список використаних джерел

1. Стецюк П.І., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. До побудови зовнішнього контура сопла Франкля за квадратичною кривиною. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2020. **1**. С. 23–31. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/168592
2. Стецюк П. І., Ляшко В. І., Супрун А. А. Метод BFGS для задачі побудови S-кривої. *Наукові записки НаУКМА. Комп’ютерні наки*. 2020. **3**. С. 102-106. https://doi.org/10.18523/2617-3808.