Стецюк П.И., Жидков В.А., Фесюк А.В.
Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

Octave-функция OrtPro: назначение и особенности использования

Octave-функция OrtPro предназначена для решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$f^*=f(x^*)=\min_{x\in R^n}\{f(x)=(x-x_0)^T\operatorname{diag}(w)(x-x_0)\} \text{ при ограничениях } Ax=b,\ x_{low}\leqslant x\leqslant x_{up}, \quad (1)$$

где A – $n\times m$-матрица, b – m-мерный вектор, w – n-мерный вектор, у которого все элементы $w_1,\dots,w_n$ – положительны; x_{low} и x_{up} – n-мерные векторы (их компоненты задают нижние и верхние границы на переменные, соответственно), x_0 – заданный n-мерный вектор.

OrtPro реализует двойственный алгоритм [1], который либо находит решение задачи (1), либо сообщает, что система ограничений несовместна. Ядром программы является octave-функция ralgb5, которая реализует вариант r-алгоритма с постоянным коэффициентом растяжения пространства и адаптивной регулировкой шага в направлении нормированного антисубградиента.

```
1  function [xr,fr,ist] = OrtPro(w,x0,A,b,xlow,xup,alpha,h0,q1,epsu,epsg,maxitn);
2  itn=0; hs=h0; m=length(b); B=eye(m); u=zeros(m,1);
3  xs=max(abs(xlow-x0),abs(xup-x0)); fup=1.1*sum(xs.*xs.*w);
4  nfg = 1; xr=min(max(xlow,x0),xup); g0 = A*xr-b;
5  fr=sum((xr-x0).*(xr-x0).*w)+g0'*u; dgr=dg0=norm(g0);
6  printf("itn%4d f%14.6e fr%14.6e dg0%11.3e",itn,fr,fr,dg0);
7  printf(" dgr%11.3e ls%2d nfg%4d\n",dgr,0,nfg);
8  if(norm(g0) < epsu) ist = 2;  return; endif
9  for (itn = 1:maxitn)
10    du = B * (g1 = B' * g0)/norm(g1);
11    d = 1; ls = 0; ddu = 0;
12    while (d > 0)
13       u += hs * du; ddu += hs * norm(du); nfg ++;
14       xs=min(max(xlow,x0-0.5*A'*u./w),xup); g1=A*xs-b;
15       dg1=norm(g1); f=sum((xs-x0).*(xs-x0).*w)+g1'*u;
16       if (dg1 < dgr)  fr = f; xr=xs; dgr=dg1; endif
17       if (f > fup) ist=6; return; endif
18       if(dg1 < epsg) ist = 2;  return; endif
19       ls ++; (mod(ls,3)==0) && (hs *= 1.1);
20       if(ls > 500) ist = 5;  return; endif
21       d = du' * g1;
22   endwhile
23   (ls == 1) && (hs *= q1);
24   printf("itn%4d f%14.6e fr%14.6e dg1%11.3e",itn,f,fr,dg1);
25   printf(" dgr%11.3e ls%2d nfg%4d\n",dgr,ls,nfg);
26   if(ddu  < epsu) ist = 3;  return; endif
27   xi = (dg = B' * (g1 - g0) )/norm(dg);
28  B += (1 / alpha - 1) * B * xi * xi';
29   g0 = g1;
30 endfor
31 ist = 4;
32 endfunction
```

Входными параметрами функции OrtPro являются данные задачи (1): w, x_0, A, b, x_{low}, x_{up} и параметры r-алгоритма: α – коэффициент растяжения пространства, h_0, q_1 - параметры адаптивной регулировки величины шага, ε_u, ε_g, $maxitn$ - параметры останова (см. строку 1). Подробную информацию об использовании параметров r-алгоритма можно найти в [2].

Выходными параметрами функции OrtPro являются: x_r – найденное решение задачи (1), f_r – значение функции $f(x)$ в точке x_r, ist – код останова, который определяет статус решения: 2,3 – решение оптимальное; 4,5 – решение не найдено; 6 – система ограничений несовместна.

Реализация двойственного алгоритма использует плотнозаполненные $n\times m$-матрицу A и $m\times m$-матрицу B (хранится обратная матрица преобразования пространства), операции с которыми определяют скорость вычислений. Программа OrtPro может быть использована для эффективного решения задачи (1) с вытянутыми матрицами, в которых количество столбцов значительно превышает количество строк. Это подтверждают численные эксперименты для тестовых примеров, которые реализованы следующим octave-кодом.

```
1  nmtest = [ 1 5000  50; 2 5000  50; 1 50000  50; 2 50000  50;
2             1 5000 100; 2 5000 100; 1 50000 100; 2 50000 100];
3  fout=fopen("OrtPro-2test.txt","w");
4  fprintf(fout," x00=1+i/n;  epsu=1.d-7 epsg=1.d-6 \n");
5  for itest =  1:rows(nmtest)
6     ntest = nmtest(itest,1); n  = nmtest(itest,2); m  = nmtest(itest,3);
7     x0 = zeros(n,1); w = ones(n,1);
8     if (ntest==1) eps=1.0; endif
9     if (ntest==2) eps=0.0000001; endif
10    A = ones(m,1)*[1:n]/n + [1:m]'*ones(1,n)/m; A(1:m,1:m)+=eps*diag([1:m]);
11    x00 = ones(n,1) + [1:n]'/n; xup = 1.1*x00; xlow = 0.9*x00; b = A * x00;
12    alpha = 2, h0 = 1.0 , q1 = 0.9 , epsu = 1.e-7, epsg = 1.e-6, maxitn = 1000,
13    ntest,n,m, tstart=time();
14    [xr,fr,ist]=OrtPro(w,x0,A,b,xlow,xup,alpha,h0,q1,epsu,epsg,maxitn);
15    fprintf(fout,"\n ntest n m ist time %2d %8d %8d %2d %8d",
16                 ntest,n,m,ist,round(time()-tstart));
17    fprintf(fout,"\n fr max(Axr-b) max((Axr-b)/b) %16.8e %12.4e %12.4e \n",
18                 fr,max(abs(A*xr-b)),max(abs(A*xr-b)./b));
19 endfor
20 fclose(fout);
```

Тестовому примеру в коде отвечают строки 7-11. Строка 10 отвечает формированию матрицы A, которая зависит от ε и такая, что при $\varepsilon = 0$ строки матрицы являются линейно зависимыми и ранг матрицы AA^T равен двум.

Номер теста	n	m	ist				Время (сек.)				f_r	Δ_{min}	Δ_{max}
			I	II	III	IV	I	II	III	IV			
1	5000	50	3	3	3	3	2	4	5	8	11658.5744	2.1609e-10	6.6911e-10
2	5000	50	2	2	2	2	5	9	7	22	11668.1667	1.3820e-11	3.5367e-11
1	50000	50	3	3	3	3	18	35	47	70	116658.583	2.5918e-11	4.8329e-11
2	50000	50	2	2	2	2	68	128	147	80	116668.167	7.1694e-13	2.2490e-12
1	5000	100	4	4	4	3	12	23	32	32	11649.0407	7.7574e-10	2.8628e-8
2	5000	100	2	2	4	4	10	20	37	42	11668.1667	9.4585e-12	5.8081e-11
1	50000	100	3	3	3	3	83	147	218	321	116649.055	9.9730e-11	1.0791e-10
2	50000	100	4	4	4	4	160	292	380	576	116668.167	1.3267e-11	1.7298e-11

В таблице приведены результаты вычислительных экспериментов при $n = 5000, 50000$ и $m = 50, 100$ для двух тестов (1 - отвечает $\varepsilon = 1$, 2 – отвечает $\varepsilon = 10^{-7}$). В таблице приведены коды останова (ist), время работы, рекордное значение f_r, наихудшая и наилучшая точности (Δ_{min}, Δ_{max}) для расчетов на четырёх разных компьютерах: I - Pentium G2030/2GHz/8 GB, Ubuntu 13.04, Octave 3.2.4; II - Phenom II X4 955/3.21GHz/4 GB, Windows 7 64-bit Ultimate параллельная версия Octave 3.6.4; III - Pentium E5200/2.5GHz/4 GB, Windows Server, Octave 3.0.0; IV - Athlon X2 Dual-Core QL-64×2/2.1GHz/3 GB, Ubuntu 12.04 LTS, Octave 3.2.4.

Литература. **1.** Стецюк П.И. О решении системы линейных уравнений с двусторонними ограничениями на переменные // Алгебра и линейная оптимизация. Тезисы международной конференции, посвященной 100-летию С.Н.Черникова. Екатеринбург, 14–19 мая 2012 года. – Екатеринбург: Изд-во „УМЦ-УПИ“, 2012. – С. 155–157. **2.** Стецюк П.И., Нурминский Е.А., Соломон Д.И. Транспортная задача и ортогональное проектирование на линейные многообразия // Материалы V-ой международной научной конференции "Транспортные системы и логистика Кишинэу, 11-13 декабря 2013 года. – Кишинэу: Эврика, 2013. – С. 251–263.