

Міністерство освіти і науки України
Льотна академія Національного авіаційного університету
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова Національної академії наук України
Запорізький національний університет
Національний університет «Запорізька політехніка»
Центральноукраїнський національний технічний університет
Центральноукраїнський державний
педагогічний університет ім.В.Винниченка
Інститут модернізації та змісту освіти
Громадська організація «Системні дослідження»

Матеріали
Міжнародної науково-практичної конференції
імені А.Я. Петренюка

**«КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ»**

13-14 травня 2022 року

Кропивницький - Запоріжжя
2022 р.

технологічного процесу у хмарному сервісі». Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. 2021. № 4(70). С. 132-142.

4. <https://www.it.ua/knowledge-base/technology-innovation/internet-veschej-internet-of-things-iot>

ПРО ВИКОРИСТАННЯ СОЛВЕРА BARON ДЛЯ ЗАДАЧІ ЗБАЛАНСОВАНОЇ УПАКОВКИ КРУГІВ¹

¹Стецюк П.І., ²Романова Т.Є., ¹Хом'як О.М.

¹Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

²Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного
НАН України

ON USING BARON SOLVER FOR BALANCED CIRCULAR PACKING PROBLEM

Abstract. The paper addresses a packing problem of unequal circles in a larger circle of minimum radius so that the gravity center of the family of circles coincides with the outer circle center. Two formulations of the balanced circular packing problem as multiextremum nonlinear programming models are provided. The first formulation uses quadratic constraints while the second one employs radical functions for describing the non-overlapping of circles and their containment into the outer circle. The global minima of both problems were found by solver BARON for the benchmark instance with five unequal circles.

Нехай задано сімейство кругів S_i з радіусами r_i і вагами w_i , $i = 1, \dots, m$. Центр тяжіння круга S_i знаходиться в його центрі. Збалансованою упаковкою сімейства кругів S_i ,

¹ Робота підтримана Volkswagen Foundation (грант № 97775)

$i=1, \dots, m$, в круг S називають таку їх упаковку, щоб радіус круга S був мінімальним і центр тяжіння сімейства кругів S_i , $i=1, \dots, m$, збігався з центром зовнішнього круга S , який знаходиться в початку системи координат. Позначимо (x_i, y_i) – невідомий центр круга S_i , r – невідомий радіус зовнішнього круга S . Зокрема визначимо $\lambda_i = w_i / \sum_{j=1}^m w_j$, $i=1, \dots, m$,
 $r_{low} = \max_{i=1, \dots, m} r_i$.

Задачі збалансованої упаковки сімейства кругів S_i , $i=1, \dots, m$, відповідають дві багатоекстремальні задачі нелінійного програмування [1, 2]. Перша з них (задача **A**) має такий вигляд:

$$r^* = \min_{r, x, y} r \tag{1a}$$

при обмеженнях

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (r - r_i)^2, \quad i=1, \dots, m, \tag{2a}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad 1 \leq i < j \leq m, \tag{3a}$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i = 0, \tag{4a}$$

$$r \geq r_{low}. \tag{5a}$$

Другу задачу (задача **B**) сформульовано у такий спосіб:

$$r^* = \min_{r, x, y} r \tag{1b}$$

при обмеженнях

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq r - r_i, \quad i=1, \dots, m, \tag{2b}$$

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq r_i + r_j, \quad 1 \leq i < j \leq m, \tag{3b}$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i = 0. \tag{4b}$$

Цільові функції (1a), (1b) є лінійними функціями і пов'язані з мінімізацією радіуса зовнішнього круга S . Квадратичні обмеження (2a) та обмеження (2b), що містять радикали, означають, що кожний круг S_i , $i=1, \dots, m$, належить кругу S . Квадратичні обмеження (3a) та обмеження з радикалами (3b) гарантують, що ніякі два круги із сімейства кругів S_i , $i=1, \dots, m$ не перетинаються. Лінійні обмеження (4a), (4b) означають, що центр ваги кругів S_i , $i=1, \dots, m$, знаходиться в початку координат. Обмеження (5a) забезпечує додатне значення r , потрібне для коректності обмежень (2a). Задача **B** вільна від аналога для обмеження (5a), тому що обмеження (2b) автоматично враховує додатність змінної r .

За допомогою лагранжевих двоїстих оцінок для квадратичної моделі задачі **A** в статті [2] обґрунтовано оптимальну збалансовану упаковку для $m=5$, $r_1=0.1$, $r_2=0.2$, $r_3=0.3$, $r_4=0.5$, $r_5=0.8$, $w_1=0.0785$, $w_2=0.314$, $w_3=0.7065$, $w_4=1.9625$, $w_5=5.024$. Розглянемо результати розв'язання цієї ж задачі солвером BARON (**B**ranch-**A**nd-**R**educe **O**ptimization **N**avigator), який дозволяє знайти глобальні екстремуми задач нелінійного програмування [3, 4].

На рис. 1 наведено оптимальні збалансовані упаковки п'яти кругів для задачі **A** (рис. 1б та 1д) та задачі **B** (рис. 1в та 1е), отримані з двох стартових точок (рис. 1а та 1г у масштабі 1.31623:10). Їм відповідає мінімальний радіус $r^* = 1.31623$.

Глобальні мінімуми задач **A** та **B** для першої стартової точки (рис. 1а, 1б та 1в) наведено в табл. 1. Кожен із них можна отримати з іншого за допомогою повороту останнього на деякий кут відносно центра круга S . Цього неможливо зробити з глобальними мінімумами задач **A** та **B**, отриманими для другої стартової точки.

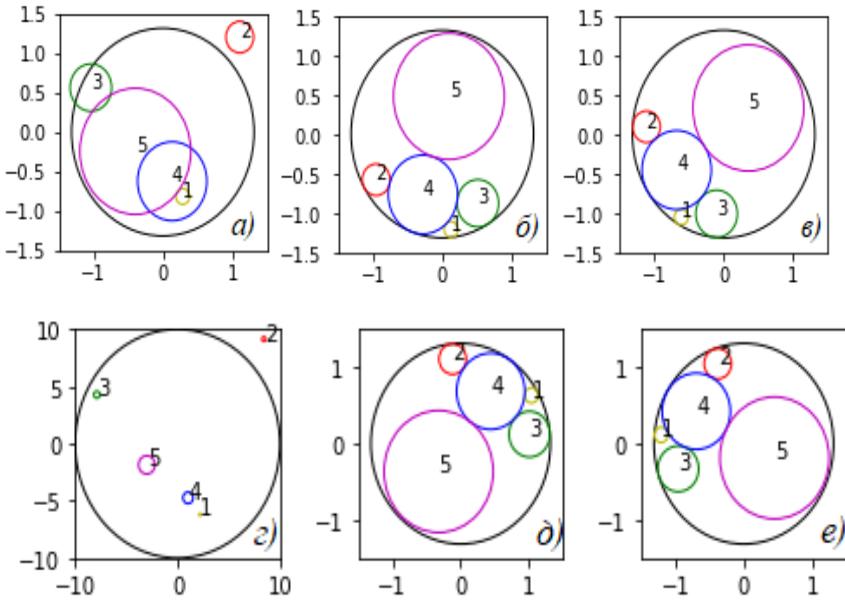


Рис. 1. BARON: глобальні мінімуми для двох стартових точок

Таблиця 1 – Розв’язки задач – стартова точка $r_0 = r^* = 1.31623$

i	Стартова точка		Розв’язок задачі А		Розв’язок задачі В	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	0.28749	-0.8164	0.125172	-1.20975	-0.610319	-1.05201
2	1.11061	1.20344	-0.954181	-0.579238	-1.11239	0.09249
3	-1.03791	0.56363	0.512519	-0.877528	-0.101387	-1.01116
4	0.13566	-0.62354	-0.279779	-0.766786	-0.677155	-0.455748
5	-0.39591	-0.24417	0.094896	0.478047	0.357832	0.330878

В табл.2 наведено затрати солвера BARON для розв’язання задач А та В: кількість ітерацій і час (в секундах) для нижніх границь на мінімальний радіус r^* . Із таблиці видно, що для задачі А точна нижня границя для $r^* = 1.31623$ досягається вдвічі швидше для першої стартової точки, ніж для другої стартової точки.

Таблиця 2 – Результати роботи BARONa: верхня границя **1.31623**

Задача А (перша стартова точка)			Задача В (перша стартова точка)		
Iteration	Time (s)	Lower bound	Iteration	Time (s)	Lower bound
19442	105.47	0.800000	17795	124.64	1.07820
39507	225.48	0.881865	31588	224.62	1.24300
60531	315.50	1.18031	44142	314.63	1.26828
87983	435.51	1.27354	60428	434.63	1.28566
107956	540.60	1.31623	77108	554.66	1.29411
			97593	708.28	1.31623
Задача А (друга стартова точка)			Задача В (друга стартова точка)		
Iteration	Time (s)	Lower bound	Iteration	Time (s)	Lower bound
24431	215.19	0.800000	26506	211.30	1.02077
43623	432.20	0.885228	53778	421.35	1.17284
60285	616.76	1.12001	80561	631.40	1.26184
77345	831.48	1.24381	107086	841.42	1.29292
88026	985.51	1.27344	116293	911.78	1.31623
99580	1148.45	1.31623			

Література

1. Stetsyuk P., Romanova T., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. Optimization Letters. 2016. № 10. P. 1347–1360.

2. Стецюк П.И., Романова Т.Е., Лиховид А.П. О двойственной оценке Шора для задачи равновесной упаковки кругов // Матеріали Двадцять першого Міжнародного науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кропивницький, 17–18 травня 2019 року) / За ред. Г.П. Донця. Кропивницький, 2019. С. 147–151.

3. Tawarmalani M., Sahinidis N.V. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming*. 2005. 103(2). P. 225–249.

4. Sahinidis N.V., BARON 21.1.13: Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Programs, User's manual, 2021.

ДИНАМІКА РОЗГОРТАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ СПІРАЛЕЙ У ПРИРОДІ

Тимофієва Н. К.

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних
технологій та систем НАН та МОН України*

DYNAMICS OF LOGARITHMIC SPIRAL DEVELOPMENT IN NATURE

Abstract. Representation of biological space as a sign combinatorial allows to explain various phenomena in nature, in particular the formation of logarithmic spirals during the growth of shells of some species of mollusks, galaxy sleeves, spirals of rose petals, etc. The dynamics of their formation is explained by the finite sequences that take place during the deployment of the agreed spaces and which are presented geometrically using polar coordinates.

Вступ. При розгортанні знакових комбінаторних (біологічних) просторів, утворюються комбінаторні числа, зокрема числа Фібоначчі [1], через які в живій природі можна пояснити наявність логарифмічних спіралей. Ці спіралі утворюються завдяки скінченним послідовностям, які мають місце при розгортанні оговорених просторів і які подаються геометрично з використанням полярних координат.

Постановка задачі. Утворення логарифмічної спіралі геометрично подається через “золотий прямокутник”, в якого одна сторона довша в 1.618 разів («золоте» число або золотий перетин) [2]. Присутність золотого перетину в природі