Двоетапна транспортна задача з обмеженнями на потреби споживачів та пропускні спроможності проміжних пунктів

Віктор Стовба

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем
(МПЗІС-2024)

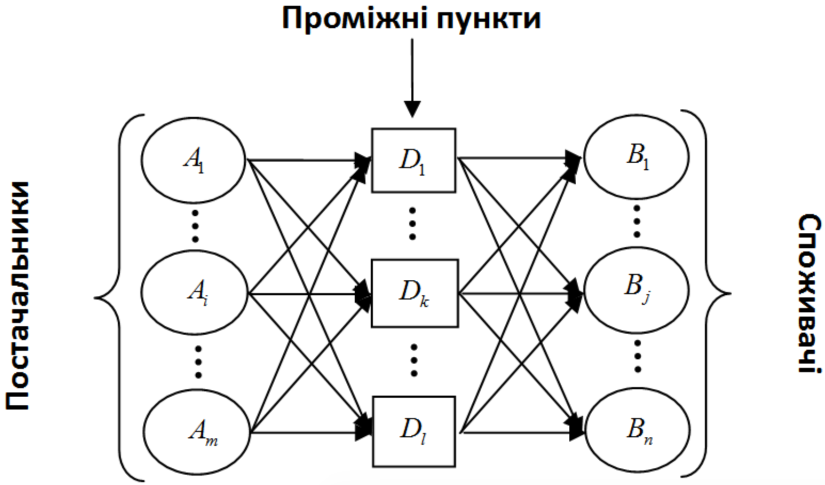
20-22 листопада 2024

План

1. Двоетапна транспортна задача (ДТЗ)
2. ДТЗ з обмеженнями на потреби споживачів та пропускні спроможності проміжних пунктів
3. Обчислювальний експеримент: застосування ДТЗ до модельної задачі оптимального розбиття-розподілу

Зміст

Система зв'язків "A → D → B"



Постановка задачі

Наявно:

- m постачальників $A_1, \ldots, A_m$ з продукцією $a_1, \ldots, a_m$
- n споживачів $B_1, \ldots, B_n$ з потребами $b_1, \ldots, b_n$
- l проміжних пунктів $D_1, \ldots, D_l$, через які здійснюється транспортування продукції

Потрібно **знайти оптимальний план** транспортування продукції, де

- c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k
- c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j

Змінні задачі

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k

y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j

Формулювання задачі (ДТЗ)

$$f_{xy}^* = \min_{x \geq 0, y \geq 0} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \qquad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0, \quad k = \overline{1, l}. \qquad (4)$$

Задача (1)–(4) є задачею лінійного програмування з $(m+n) \times l$ змінними та $m+n+l$ обмеженнями

Зміст

ДТЗ з обмеженнями

$$f^*_{xyz} = \min_{x\geq 0,\ y\geq 0} \left\{ f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \qquad (5)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = z_j, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0, \quad k = \overline{1,l}, \qquad (8)$$

ДТЗ з обмеженнями

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k^{up}, \quad k = \overline{1, l}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{10}$$

$$b_j^{low} \le z_j \le b_j^{up}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{11}$$

$$x_{ik} \ge 0, \; y_{kj} \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \; k = \overline{1, l}, \; j = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Задача (5)–(12) є задачею лінійного програмування з $m \times l + n \times (l + 1)$ неперервними змінними x, y та z, та $m + 3n + 2l + 1$ обмеженнями

Умови сумісності

Теорема 1 [1]

Система обмежень (6)–(12) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконуються умови

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j^{up} \quad \text{та} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{k=1}^{l} d_k^{up}. \qquad (13)$$

Стецюк П.І., Стовба В.О., Хом'як О.М., Стецюк М.Г. Двоетапна транспортна задача з двосторонніми обмеженнями на потреби споживачів та верхніми межами на пропускні спроможності проміжних пунктів. *Кібернетика та системний аналіз*. 2024. Т. 60. № 6. С. 89–101.

Часткові випадки задачі (5)–(12)

Якщо $d_k^{up} = \sum_{i=1}^{m} a_i$ $(k = \overline{1, l})$, то маємо **ДТЗ з двосторонніми обмеженнями на потреби споживачів** – це задача (5)–(12) з вилученими обмеженнями (9).

Умова сумісності [2,3]:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{low} \le \sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n} b_j^{up} \qquad (14)$$

Часткові випадки задачі (5)–(12)

Якщо $d_k^{up} = \sum_{i=1}^{m} a_i$ $(k = \overline{1,l})$ та $b_j^{up} = b_j^{low} = b_j$ $(j = \overline{1,n})$, то маємо **класичну ДТЗ** – це задача (1)–(4).

Умова сумісності [4,5,6]:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{15}$$

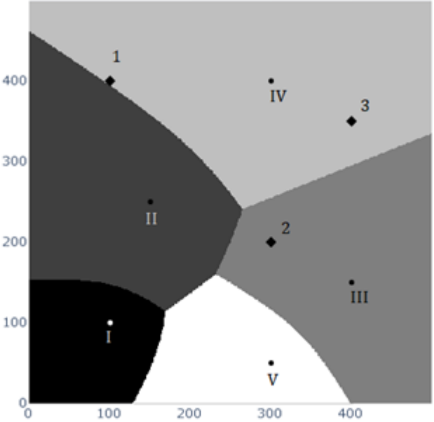
Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. *Дослідження операцій: Навч. посіб.* К.: Центр учбової літератури, 2007. 256 с.

Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. *Исследование операций. Том I.* Акад. транспорта, информатики и коммуникаций. Ch.: Evrica, 2004. 456 с.

Наконечний С.І., Савіна С.С. *Математичне програмування: Навч. посіб.* К.: КНЕУ, 2003. 452 с.

Зміст

Задача оптимального розбиття-розподілу [7]



Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. № 1. С. 3—15.

Постановка задачі

Наявно:

- Постачальник однорідного ресурсу, неперервно розподілений в області Ω зі щільністю $\rho(x) = 1$
- Пункти першого етапу (первинної переробки) τ_i^I, $i = \overline{1,5}$
- Пункти другого етапу (споживання) τ_j^{II}, $j = \overline{1,3}$

Задано:

- Координати пунктів першого та другого етапів
- Вартості транспортування $c_i^I(x, \tau_i^I)$ та $c_j^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$

Потрібно

- **розбити множину** Ω постачальників на підмножини $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$, $\bigcup_{i=1}^{5} \Omega_i = \Omega$
- **визначити об'єми перевезень** $v_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,5}, j = \overline{1,3})$

так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування

Формулювання задачі

$$\sum_{i=1}^{5}\int_{\Omega_i} c_i^I(x_i,\tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij} \to \min \tag{16}$$

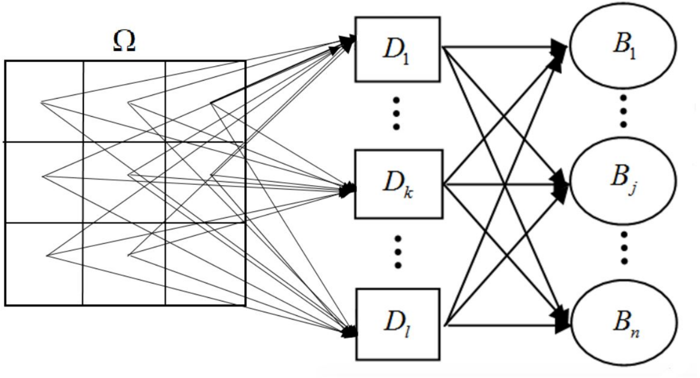
за обмежень

$$\sum_{j=1}^{3} v_{ij} = \int_{\Omega_i}\rho(x)dx, \quad i=\overline{1,5}, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{5} v_{ij} = b_j^{II}, \quad j=\overline{1,3}, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{5}\int_{\Omega_i}\rho(x)dx = \sum_{j=1}^{3} b_j^{II}. \tag{19}$$

Система зв'язків "$\Omega \to D \to B$"



Для сітки 500×500 задача (5)–(12) має

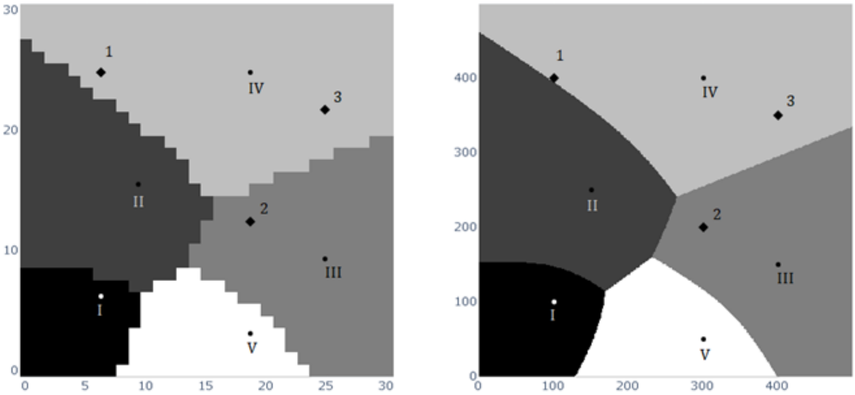
1 250 018 змінних та **250 009 обмежень**

Обчислювальний експеримент

- **Тест 1**: сітка 31×31, $d_k^{up} = \sum_{i=1}^{m} a_i$
- **Тест 2**: сітка 500×500, $d_k^{up} = \sum_{i=1}^{m} a_i$
- **Тест 3**: сітка 500×500, $d_k^{up} = 0.2 \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i$
- **Тест 4**: сітка 500×500, $d_k^{up} = 0.25 \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i$

Для розв'язання задачі використано солвер **CPLEX** з NEOS-сервера та мова моделювання **AMPL**

Оптимальні розбиття (тести 1 і 2)



а) *б)*

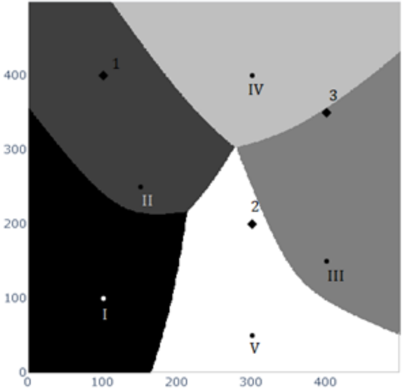
а) сітка 31 × 31, обсяги споживання: 0.220604, 0.418314, 0.361082 **(0.03 с)**
б) сітка 500 × 500, обсяги споживання: 0.228976, 0.428876, 0.342148 **(60 с)**

Плани перевезень (тести 1 і 2)

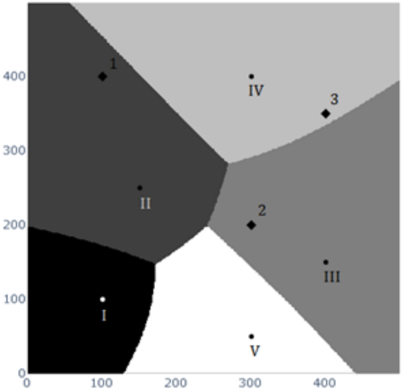
$$v_{1a} = \begin{pmatrix} 0.0000 & \mathbf{0.0832466} & 0.0000 \\ 0.220604 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.238293 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & \mathbf{0.361082} \\ 0.0000 & 0.0967742 & 0.0000 \end{pmatrix}, \quad v_{1б} = \begin{pmatrix} 0.0000 & \mathbf{0.09066} & 0.0000 \\ 0.228976 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.232532 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & \mathbf{0.342148} \\ 0.0000 & 0.105684 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

а) сітка 31×31, обсяги споживання: 0.220604, 0.418314, 0.361082 **(0.03 с)**
б) сітка 500×500, обсяги споживання: 0.228976, 0.428876, 0.342148 **(60 с)**

Оптимальні розбиття (тести 3 і 4)



а)



б)

а) обсяги виробництва: 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2; обсяги споживання: 0.2, 0.6, 0.2
б) обсяги виробництва: 0.112212, 0.25, 0.25, 0.25, 0.137788;
обсяги споживання: 0.25, 0.5, 0.25

Плани перевезень (тести 3 і 4)

$$v_{2a} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.2000 & 0.0000 \\ 0.2000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2000 \\ 0.0000 & 0.2000 & 0.0000 \end{pmatrix}, \quad v_{2б} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.112212 & 0.0000 \\ 0.2500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2500 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2500 \\ 0.0000 & 0.137788 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

а) обсяги виробництва: 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2; обсяги споживання: 0.2, 0.6, 0.2
б) обсяги виробництва: 0.112212, 0.25, 0.25, 0.25, 0.137788;
обсяги споживання: 0.25, 0.5, 0.25

Висновки

- **Досліджено** ДТЗ з двосторонніми обмеженнями на невідомі потреби споживачів та верхніми межами на пропускні спроможності проміжних пунктів та її часткові випадки
- **Встановлено** та **обґрунтовано** необхідні та достатні умови сумісності системи обмежень відповідної ЛП-задачі
- **Наведено** результати обчислювального експерименту з використанням солвера CPLEX для дискретного аналога модельної задачі оптимального розбиття-розподілу множини на підмножини з заданими центрами підмножин

Використані джерела

1. Стецюк П.І., Стовба В.О., Хом'як О.М., Стецюк М.Г. Двоетапна транспортна задача з двосторонніми обмеженнями на потреби споживачів та верхніми межами на пропускні спроможності проміжних пунктів. *Кібернетика та системний аналіз*. 2024. Т. 60. № 6. С. 89–101.
2. Стецюк П.І., Хом'як О.М., Ляшко В.І. Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів. *Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки.* 2022. Т. 5. С. 92–96.
3. Stovba V., Khomiak O. Two-Stage Transportation Problem with Unknown Consumer Demands: Consistency Aspects. Proceedings of 3rd International Conference on Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor (PLMO 2024), May 15-17, 2024, Baku, Azerbaijan.

Використані джерела

4. Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. *Дослідження операцій: Навч. посіб.* К.: Центр учбової літератури, 2007. 256 с.
5. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. *Исследование операций. Том I.* Акад. транспорта, информатики и коммуникаций. Ch.: Evrica, 2004. 456 с.
6. Наконечний С.І., Савіна С.С. *Математичне програмування: Навч. посіб.* К.: КНЕУ, 2003. 452 с.
7. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. № 1. С. 3—15.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!