НЕРАЗЛОЖИМОСТЬ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Стецюк П.И.[1], Зоркальцев В.И.[2], Эмменеггер Ж.-Ф.[3]
stetsyukp@gmail.com

[1]Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев
[2]Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, Иркутск
[3]Университет г. Фрибург, Швейцария

МІЖНАРОДНА НАУКОВА ШКОЛА-СЕМІНАР
"ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО-XLII)",
присвячена 85-річчю від дня народження
академіка В.С. Михалевича
21–25 вересня 2015 р.

Содержание

Содержание

Квадратная неотрицательная матрица

Матрица $A = \|a_{ij}\|$ с вещественными элементами $a_{ij} \geq 0 \; \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$ называется *неотрицательной* и записывается в виде неравенства $A \geq 0$.

Если элементы $a_{ij} > 0 \; \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$, то матрица A называется *положительной* и записывается $A > 0$.

Неотрицательные матрице в экономике

Свойства неотрицательных матриц используются при анализе леонтьевской модели „затраты-выпуск“ [1, 2].

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.

2. *Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М.* Сучасний економічний аналіз. Ч. 2. Макроекономіка. – Київ: Вища школа, 2004. – 208 с.

Свойства собственных чисел

$\lambda_A > 0$ (положительность числа Фробениуса):

Матрица $A \geq 0$, не равная нулевой матрице, имеет вещественное положительное максимальное собственное число λ_A, которое называют числом Фробениуса.

$\lambda_A < 1$ (свойство продуктивности)

Если $A \geq 0$ – технологическая матрица (матрица прямых затрат для n отраслей экономики), то в статической модели Леонтьева $y = (I - A)x$ для $\forall\ y \geq 0\ \exists\ x \geq 0$.

Здесь: I – единичная $n \times n$-матрица, x – валовый продукт,
y – конечный продукт.

Свойство неразложимости

Определение.

Матрицу A называют неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix},$$

где A_{11} и A_{22} – квадратные подматрицы.

Примечание. Если технологическая матрица $A \geq 0$ является неразложимой, то в процессе производства каждая отрасль использует (хотя бы косвенно) продукты всех других отраслей.

О чем речь пойдет далее?

О проверке матрицы $A \geq 0$ на неразложимость:

1. Первый алгоритм (по Гантмахеру)
2. Второй алгоритм (по продуктивности)

И вычислительной устойчивости 1. и 2. для матрицы

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n} = \left\| \begin{matrix} 0.8 & 0.1 & & & & \\ & 0.8 & 0.1 & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & 0.8 & 0.1 & \\ & & & & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & & & & & 0.8 \end{matrix} \right\|$$

при $n = 4$, $n = 7$ и $n = 10$.

Содержание

Алгоритм по Гантмахеру

Лемма 1 ([3], стр. 333)

Если $A \geq 0$ – неразложимая $n \times n$-матрица, то матрица $(I + A)^{n-1} > 0$.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 552 с.

Доказательство леммы 1 ([3], стр. 333)

Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого вектора $y \geq 0$ $(y \neq 0)$ имеет место неравенство

$$(I + A)^{n-1} y > 0.$$

Это же неравенство будет установлено, если мы покажем, *что при условии $y \geq 0$ и $y \neq 0$ вектор $z = (I + A)y$ всегда имеет меньше нулевых координат, чем вектор y*. Допустим противное. Тогда векторы y и z имеют одни и те же нулевые координаты. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что векторы y и z имеют вид

$$y = \left\| \begin{matrix} u \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad z = \left\| \begin{matrix} v \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad (u > 0, \; v > 0),$$

где векторы u и v имеют один и тот же размер.

.... окончание на следующем слайде ....

Доказательство леммы 1 (продолжение)

Полагая

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\|,$$

будем иметь

$$\left\| \begin{matrix} u \\ 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v \\ 0 \end{matrix} \right\|,$$

откуда

$$A_{21}u = 0.$$

Поскольку $u > 0$, то отсюда вытекает

$$A_{21} = 0.$$

Это равенство противоречит неразложимости матрицы A.

Лемма доказана.

Вычислительные проблемы

Отношение максимального элемента к минимальному для матрицы $(I+A)^{n-1} > 0$ может быть сколь угодно большим, что следует из формулы бинома Ньютона

$$(I+A)^{n-1} = I + C_{n-1}^1 A + C_{n-1}^2 A^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} A^{n-2} + A^{n-1}.$$

По мере увеличения n отношение максимального элемента к минимальному в матрице $(I + A)^{n-1}$ растет.

Что будет для тестовой 4×4-матрицы?

Матрице

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.8 \end{array} \right\|$$

соответствует матрица

$$(I + A)^3 = \left\| \begin{array}{cccc} 5.832 & 0.972 & 0.054 & 0.001 \\ 0.001 & 5.832 & 0.972 & 0.054 \\ 0.054 & 0.001 & 5.832 & 0.972 \\ 0.972 & 0.054 & 0.001 & 5.832 \end{array} \right\|,$$

в которой максимальный элемент (5.832) больше минимального (0.001) более чем в тысячу раз.

Что будет для тестовых 7×7- и 10×10-матриц?

если $n = 7$,

то минимальный элемент – 10^{-6}, а максимальный – 34.012

если $n = 10$,

то минимальный элемент – 10^{-9}, а максимальный – 198.36

Ниже будет рассмотрен способ, для которого отношение максимального элемента положительной матрицы к минимальному ее элементу будет меньше, чем для положительной матрицы в лемме 1.

Содержание

Алгоритм (по продуктивности)

Лемма 2

Если $A \geq 0$ – неразложимая $n \times n$-матрица и $\lambda_A < 1$, то матрица $(I - A)^{-1} > 0$.

Примечание. Если $\lambda_A \geq 1$, то лемму 2 можно применить для матрицы $A' = \frac{1}{\lambda_A + \delta} A$, где $\delta > 0$.

О доказательстве леммы 2

Если $\lambda_A < 1$, то матрица $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Если этот ряд оборвать на индексе $k = n - 1$, то получим матрицу

$$A_{n-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}.$$

Если $A \geq 0$, то в матрице A_{n-1} положительными будут в точности те же элементы, что и в матрице $(I + A)^{n-1}$, где

$$(I+A)^{n-1} = I + C_{n-1}^1 A + C_{n-1}^2 A^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} A^{n-2} + A^{n-1}.$$

О сравнении матриц A_{n-1} и $(I+A)^{n-1}$

Если $n{\times}n$-матрица $A \geq 0$, то $(I-A)^{n-1} - A_{n-1} \geq 0$

Так, например, для тестовой $4{\times}4$-матрицы

$$\left\|\begin{matrix} 2.952 & 0.452 & 0.034 & 0.001 \\ 0.001 & 2.952 & 0.452 & 0.034 \\ 0.034 & 0.001 & 2.952 & 0.452 \\ 0.452 & 0.034 & 0.001 & 2.952 \end{matrix}\right\| = A_3 = I+A+A^2+A^3,$$

$$\left\|\begin{matrix} 5.832 & 0.972 & 0.054 & 0.001 \\ 0.001 & 5.832 & 0.972 & 0.054 \\ 0.054 & 0.001 & 5.832 & 0.972 \\ 0.972 & 0.054 & 0.001 & 5.832 \end{matrix}\right\| = (I+A)^3 = I+3A+3A^2+A^3.$$

О вычислительной устойчивости

Для матрицы $(I - A)^{-1} > 0$ *отношение максимального элемента к минимальному может быть значительно меньше,* чем для матрицы $(I + A)^{n-1} > 0$.

Что будет для тестовой 4×4-матрицы?

Матрице

$$A = \left\| \begin{matrix} 0.8 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.8 \end{matrix} \right\|,$$

соответствует матрица

$$(I - A)^{-1} = \left\| \begin{matrix} 5.3333 & 2.6667 & 1.3333 & 0.6667 \\ 2.6667 & 5.3333 & 2.6667 & 1.3333 \\ 1.3333 & 2.6667 & 5.3333 & 2.6667 \\ 0.6667 & 1.3333 & 2.6667 & 5.3333 \end{matrix} \right\|,$$

в которой максимальный элемент (5.3333) больше минимального (0.6667) всего в восемь раз.

Что будет для тестовых 7×7- и 10×10-матриц?

если $n = 7$,

то минимальный элемент – 0.078740,
а максимальный элемент – 5.0394

если $n = 10$,

то минимальный элемент – 0.0097752,
а максимальный элемент – 5.0049

Что еще дает лемма 2?

Матрица

$B = (I - A)^{-1}$ является матрицей полных затрат в продуктивной модели Леонтьева $y = (I - A)x$, где $A \geq 0$ – матрица прямых затрат для n отраслей.

Если при этом матрица A является неразложимой, то все элементы матрицы B имеют положительные значения.

Выводы:

1. Предложен алгоритм проверки неотрицательной $n{\times}n$-матрицы A на неразложимость, в котором на положительность проверяется матрица $B = (I - A)^{-1}$.

2. Показано, что если матрица A – неразложима, то отношение максимального элемента к минимальному для матрицы B может быть значительно меньше, чем для матрицы $(I + A)^{n-1}$ в алгоритме Гантмахера.

Литература

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
2. *Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М.* Сучасний економічний аналіз. Ч. 2. Макроекономіка. – Київ: Вища школа, 2004. – 208 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552 с.

Благодарности

Работа поддержана НАНУ (проект № 0113U003148),
РФФИ (гранты № 130600152, № 150707412)
и грантом SNSF-SCOPES Nr. 160605.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

BACK UP SLIDES: Разложимая матрица I

Определение 2.

Квадратная матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ называется *разложимой*, если при некотором разбиении всех индексов $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ на две дополнительные системы (без общих индексов) $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_\mu;\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_\nu\ (\mu + \nu = n)$

$$a_{i_\alpha k_\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu;\ \beta = 1, 2, \ldots, \nu)$$

В противном случае матрицу A будем называть *неразложимой*.

[Гантмахер, 1988], стр. 332

BACK UP SLIDES: Разложимая матрица II

Под *перестановкой рядов* в квадратной матрице $A = \|a_{ik}\|_1^n$ мы будем понимать соединение перестановки строк с такой же перестановкой столбцов матрицы A.

Определение 2' ([Гантмахер, 1988], стр. 332).

Матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ называется *разложимой*, если перестановкой рядов она может быть приведена к виду

$$\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} B & 0 \\ C & D \end{matrix} \right\|,$$

где B и D – квадратные подматрицы. В противном случае матрица A называется *неразложимой*.

BACK UP SLIDES: Вопросы к разложимости

Как найти

1. разбиение (см. определение 2);
2. перестановку рядов (см. определение 2')

для разложимых матриц?

Будем рады любой информации:

Стецюк Петр Иванович, stetsyukp@gmail.com
Зоркальцев Валерий Иванович, zork@isem.sei.irk.ru
Эмменеггер Жан-Франсуа, jean-francois.emmenegger@unifr.ch