О ДВУХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ ДУГ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЙ СЕТИ

П.И. СТЕЦЮК, В.А. ЖИДКОВ,
Институт кибернетики имени В.М.Глушкова,
Киев, Украина
stetsyukp@gmail.com, LYNX233@yahoo.com

Описаны два типа задач выпуклого программирования для нахождения оптимальных пропускных способностей дуг отказоустойчивой сети. В сети обеспечивается заданный объем трафика при сценариях отказа, включающих уменьшение пропускной способности узлов сети. В задачах первого типа для передачи потоков используются все допустимые пути, в задачах второго типа – пути из заданного набора возможных путей. Приведены вычислительные эксперименты для задач с линейной целевой функцией при различных сценариях отказа в ориентированной сети с шестью вершинами и восемью ребрами.

Ключевые слова: *физическая и логическая структуры сети, отказоустойчивость дуги, сценарий отказа, задача выпуклого программирования, методы декомпозиции, r-алгоритм.*

Введение. Мир в 21-ом веке становится все более зависимым от надежности различного рода коммуникаций и естественно, что задачи нахождения как структур так и параметров устойчивых и безотказных сетей (телекоммуникационных, компьютерных, транспортных, энергетических и др.) становятся все актуальней. Отчасти этим проблемам был посвящен семинар "Examining Robustness and Vulnerability of Critical Infrastructure Networks" [1], который состоялся 3–5 июня 2013 года в городе Киеве. Он был организован профессором Техасского A&M университета Сергеем Бутенко, которому авторы этой статьи благодарны за приглашение принять участие в этом семинаре.

Наш доклад назывался "Two Types of Optimization Problems for the Design of Fault-Tolerant Networks with Optimum Capacity". В нем обобщались на нелинейный выпуклый случай две задачи линейного программирования (ЛП-задачи) для нахождения оптимальных пропускных способностей дуг ориентированной отказоустойчивой сети [2, 3, 4]. Эти ЛП-задачи были предметом исследования в рамках проекта "Mathematical methods and software for optimal designing of reliable network structure", который под руководством академика Шора Наума Зуселевича выполнялся в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова в 2001–2004 годы по заказу Научного Технологического Центра Украины. ЛП-задачи и их обобщения на нелинейный случай используют определенного вида "поломки" дуг ориентированной сети. Их суть обьясним на примере автодорожной сети.

Пусть y_{ij} – максимальная пропускная способность дуги, которая соответствует участку автодороги из вершины i в вершину j, на которой осуществляется трех-рядное (трех-полосное) движение. Если заблокированной окажется одна полоса этого участка, то для дуги (i, j) ее максимальную пропускную способность $y_{ij}^{'}$ можно представить как

$$y_{ij}^{'} = \frac{2}{3} y_{ij},$$

т.е. дуга (i, j) функционирует на $2/3$ ($\mu = 2/3$) от полной своей пропускной способности. Если заблокированными оказались две полосы, то тогда

$$y_{ij}^{'} = \frac{1}{3} y_{ij},$$

что соответствует функционированию дуги (i, j) не более, чем на $1/3$ ($\mu = 1/3$) от ее максимальной пропускной способности.

Подобные ситуации имеют место в телекоммуникационных сетях, если информация передается по заданному количеству линий (кабелей), часть из которых может либо отказывать, либо переключаться на обслуживание альтернативных потоков. С помощью параметра μ можно описать различные сценарии отказа, включающие уменьшение пропускной способности узлов ориентированной сети. Этот принцип положен в основу описанных ниже оптимизационных задач для моделирования отказоустойчивости телекоммуникационных, транспортных и других сетей.

1. ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЕ СЕТИ

Определение 1. *Поломкой дуги* (i, j)*, направленной из вершины* i *в вершину* j*, назовем изменение ее пропускной способности по следующему правилу:*

$$y'_{ij} = \mu y_{ij}, \quad \mu \in [0,1).$$

Если $\mu = 0$, то $y'_{ij} = 0$ и это равносильно отказу дуги (i, j).

Пусть $N = (V, A)$ ориентированная сеть с множеством вершин V и множеством дуг A. Пропускную способность дуги $a = (i, j) \in A$ обозначим y_a.

Пусть T множесто поломок (сценарий отказов) для сети $N = (V, A)$. Каждая поломка $t \in T$ определяется пропускными способностями дуг, где

$$y_a^t = \mu_{at} y_a, \quad \mu_{at} \in [0,1], \quad \forall a \in A, \ \forall t \in T.$$

Для сети $Net(6,8)$ (включает 6 вершин и 8 дуг, рис. 1а) в таблице 1 приведен сценарий отказов 0.5F, т.е. когда одна, но произвольная, дуга уменьшает свою пропускную способность в два раза ($\mu = 0.5$). Если для сценария 0.5F все значения 0.5 заменить нулевыми, то получим новый сценарий отказов 1F, равносильный полному отказу только одной произвольной дуги в сети $Net(6,8)$.

Таблица 1. Сценарии 0F (без поломок) и 0.5F (с уменьшением в два раза пропускной способности одной, но произвольной, дуги).

Дуги		0F	0.5F (одна произвольная дуга, $\mu = 0.5$)							
№	(i, j)	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
1	(1,2)	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	(1,3)	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	(2,4)	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	(2,5)	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0
5	(3,4)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0
6	(3,5)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0
7	(4,6)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0
8	(5,6)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5

Отметим, что поломки вершин не рассматриваются, так как они могут быть сведены к поломкам дуг в "новой" сети.

Содержательный смысл задач нахождения пропускных способностей для отказоустойчивой сети состоит в следующем.

Заданы :

1. **Сеть** $N = (V, A)$ **и** y_a^0 – значения существующих пропускных способностей дуг $a \in A$.
2. **Сетевой трафик** K **–** объемы потока в сети, где d_k, $k \in K$ – объем потока от вершины $s(k) \in V$ к вершине $r(k) \in V$, которые будем называть источником (sender) и стоком (receiver) , соответственно.
3. **Сценарий отказов** T для сети $N = (V, A)$.

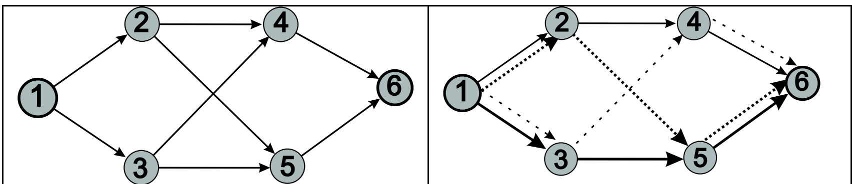
Требуется найти: такие (оптимальные по некоторому критерию) значения пропускных способностей y_a^*, $a \in A$ (дополняют уже существующие y_a^0, $a \in A$), при которых обеспечивается заданный обьем трафика K в сети $N = (V, A)$, если произойдет одна, но произвольная, поломка из сценария отказов T.

Такие сети $N = (V, A)$ назовем отказоустойчивыми и для них будем рассматривать два типа задач:

Задача А: для передачи потоков задействуются все возможные пути в сети.

Задача Р: для передачи потоков задействуются только пути из заданного множества путей P. Здесь $P = \cup_{k \in K} P_k$, где P_k – множество путей для потока k.

Другими словами, пересылка потоков в задаче А определяется физической структурой сети, а в задаче Р определяется логической (определена набором путей) структурой сети. Примеры обеих структур приведены на рисунке 1.



а) физическая структура	b) логическая структура

Рисунок 1. Физическая и логическая структуры сети $Net(6,8)$.

2. ВЫПУКЛЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ A&P

Пусть $f_A(Y)$ – выпуклая функция от пропускных способностей дуг $Y=\{y_a, a\in A\}$, A_i^+ и A_i^- – множества дуг, входящих и выходящих из вершины $i\in N$. Тогда задача A имеет такой вид:

$$f_A^* = f_A(Y^*) = \min_{X,Y} f_A(Y) \tag{1A}$$

при ограничениях:

$$\sum_{k\in K} x_{akt} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a), \quad \forall a\in A, \forall t\in T, \tag{2A}$$

$$\sum_{a\in A_i^+} x_{akt} - \sum_{a\in A_i^-} x_{akt} = \begin{cases} d_k, & \text{if } i=s(k); \quad \forall i\in V, \\ -d_k, & \text{if } i=r(k); \quad \forall k\in K, \\ 0, & \text{otherwise}; \quad \forall t\in T, \end{cases} \tag{3A}$$

$$x_{akt} \ge 0, \quad \forall a\in A, \forall k\in K, \forall t\in T, \tag{4A}$$

$$y_a^{low} \le y_a \le y_a^{up}, \quad \forall a\in A. \tag{5A}$$

Здесь переменные x_{akt} обозначают поток продукта k по дуге a для поломки t, $s(k)=sender(k)$, $r(k)=receiver(k)$.

Формулировка задачи P имеет такой вид:

$$f_P^* = f_P(Y^*) = \min_{Z,Y} f_P(Y), \tag{1P}$$

при ограничениях:

$$\sum_{k\in K}\sum_{p\in P_k} \delta_{kpa} z_{kpt} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a), \quad \forall a\in A, \forall t\in T, \tag{2P}$$

$$\sum_{p\in P_k} z_{kpt} = d_k \quad \forall k\in K, \forall t\in T, \tag{3P}$$

$$z_{kpt} \ge 0, \quad \forall k\in K, \forall p\in P, \forall t\in T, \tag{4P}$$

$$y_a^{low} \le y_a \le y_a^{up}, \quad \forall a\in A. \tag{5P}$$

где

$$\delta_{kpa} = \begin{cases} 1, & \text{if path } p\in P_k \text{ uses arc } a; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Здесь $f_P(Y)$ – выпуклая функция, а переменные z_{kpt} обозначают поток продукта $k\in K$ по пути $p\in P_k$ для поломки $t\in T$.

Содержательный смысл ограничений в задачах A и P следующий. Ограничения (2A) и (2P) означают, что потоки через дуги не должны превышать пропускных способностей дуг при произвольной одной поломке из сценария отказов, ограничения (3A) и (3P) отвечают за удовлетворение трафика, ограничения (4A) и (4P) отвечают за неотрицательность потоков, а ограничения (5A) и (5P) задают границы на выбор пропускных способностей дуг.

Оптимальные значения пропускных способностей дуг $Y^* = \{y_a^*, a \in A\}$ определяются выпуклыми гладкими либо негладкими функциями $f_A(Y)$ и $f_P(Y)$. Например, линейная функция

$$f_1(Y) = \sum_{a \in A} c_a y_a ,$$

где c_a – стоимость пересылки единицы потока по дуге a, может быть использована для нахождения пропускных способностей дуг, минимизирующих суммарную стоимость их создания. Квадратичная функция

$$f_2(Y) = \sum_{a \in A} (y_a - y_a^e)^2 ,$$

где $y_a^e, a \in A$ – некоторые "желаемые" пропускные способности дуг, позволяет найти пропускные способности дуг с минимальным отклонением от $y_a^e, a \in A$ по методу наименьших квадратов. В теории очередей используется нелинейная гладкая функция

$$f_3(Y) = \sum_{a \in A} \frac{y_a}{u_a - y_a} ,$$

где u_a – "номинальная" пропускная способность дуги a. Величине максимального потока в сети через вершины из V соответствует негладкая функция

$$f_4(Y) = \max_{i \in N} \left(\sum_{a \in A_i^+} y_a + \sum_{a \in A_i^-} y_a \right).$$

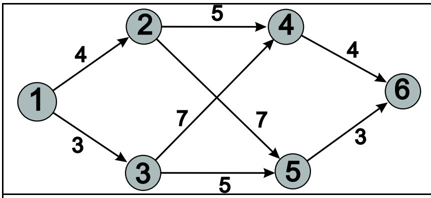
Оптимизационные задачи A и P являются выпуклыми задачами большой размерности даже для небольших сетей. Так, например, если $|V| \approx 40$, $|A| \approx 50$, $|T| \approx 50$, $|K| \approx 1000$ и $|P| \approx 2000$, то

$$N_A \approx 2.500.000, M_A \approx 2.000.000 \text{ и } N_P \approx 100.000, \quad M_P \approx 50.000,$$

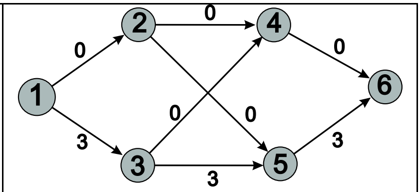
где N_A и N_P – количество переменных, а M_A и M_P – количество ограничений в задачах A и P, соответственно. Блочная структура обеих задач позволяет использовать для их решения методы декомпозиции в сочетании с модификациями r-алгоримов по той же самой схеме, как это сделано для ЛП-задач [2].

3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ A&P

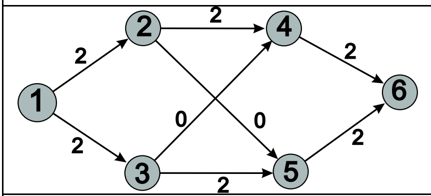
Проиллюстрируем возможности моделей A и P на примере двух сценариев отказов в сети $Net(6,8)$ для линейной целевой функции и единственной корреспонденции $d_{1,6}=3$. Результаты расчета для модели A представлены на рисунке 2, 2a–2d. Здесь затраты на пересылку единичных потоков в сети $Net(6,8)$ взяты такими, как на рисунке 2a. На рисунке 2b даны оптимальные значения пропускных способностей дуг для сценария без отказов. При этом путь $P_1=(1,3,5,6)$ для пересылки 3-х единиц потока является кратчайшим путем в сети $Net(6,8)$, он проходит по дугам (1,3), (3,5) и (5,6). Стоимость пересылки единицы потока по кратчайшему пути равна 3+5+3=11 и, следовательно, чтобы переслать 3 единицы потока по нему требуется 33=3$\times$11 единицы стоимости. Остальные 5 дуг не задействованы и никакой роли в создании стоимости они не играют. Но ситуация меняется, если пересылку потока в сети осуществлять при сценариях отказов 0.5F и 1F, которым соответствуют рисунки 2c и 2d.



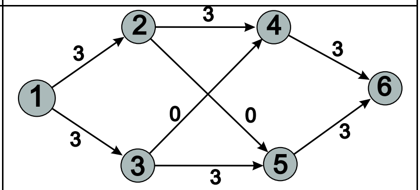
a) затраты на пересылку потока.



b) сценарий без отказов, $f_A^*=33$.



c) сценарий 0.5F, $f_A^*=48$.



d) сценарий 1F, $f_A^*=72$.

Рисунок 2. ЛП–задача A с одной корреспонденцией $d_{1,6}=3$ и разными сценариями отказа.

На рисунке 2c приведено решение задачи A при сценарии отказов 0.5F, т.е. когда одна произвольная дуга в сети может уменьшить свою пропускную способность в два раза. Интуитивно понятно, что значение целевой функции при таком сценарии не может быть больше, чем $66 = 33\times 2$, т.е. не больше, чем удвоенное решение задачи без отказов, при котором можно передать поток в 3 единицы, если уменьшить в два раза пропускную способность кратчайшего пути из вершины 1 вершину 6. Однако в оптимальном решении по отношению к этому интуитивному решению экономится 18 единиц (18 = 66–48).

Для пересылки потока из вершины 1 в вершину 6 задействуются два непересекающихся по дугам пути $P_1 = (1,3,5,6)$ и $P_4 = (1,2,4,6)$. Путь P_1 является наилучшим и стоимость пересылки единичного потока по нему равна 11 единицам, путь P_4 более дорогой и его стоимость равна 13 единицам. В первом случае, если сработала одна из трех поломок, либо дуги (1,3), либо дуги (3,5), либо дуги (5,6), то по пути P_1 пересылается единичный поток, а оставшиеся две единицы пересылаются по пути P_4. Стоимость пересылки этих двух потоков будет равна $11+2\times 13=37$ единиц. Во втором случае, если сработала одна из трех поломок, либо дуги (1,2), либо дуги (2,4), либо дуги (4,6), то по пути P_1 пересылается две единицы потока, а оставшийся единичный поток пересылается по пути P_4. Стоимость пересылки обоих потоков будет равна $2\times 11+13=35$ единиц и будет меньше, чем в первом случае. Следовательно, для сценария отказов 0.5F первый случай является активным и определяет резервы пропускных способностей дуг, чтобы сеть $Net(6,8)$ была отказоустойчивой.

Подобная ситуация имеет место для сценария 1F, т.е. когда отказывает только одна произвольная дуга (рисунок 2d). Здесь для пересылки потока в 3 единицы задействованы те же два пути. При этом стоимость пересылки потока возрастает больше, чем в два раза, так как пропускные способности дуг резервируются такими, чтобы весь объем потока можно было переслать либо по кратчайшему пути P_1, либо по более дорогому пути P_4.

В обоих сценариях отказов для пересылки потока из вершины 1 в вершину 6 не используются дуги (2,4) и (3,5). Они являются излишними и не определяют стоимость сети, так как стоимости пересылки единичного потока по путям $P_2 = (1,3,4,6)$ и $P_3 = (1,2,5,6)$ равны 14 единицам и больше, чем стоимости для путей P_1 и P_4. Поэтому, пути P_1 и P_4 определяют оптимальную логическую структуру сети $Net(6,8)$ для сценариев 0.5F и 1F, независимо от того какой объем потока требуется переслать из вершины 1 в вершину 6.

Подтверждают это значения f_P^*, которые для сценариев 0.5F и 1F приведены в первых колонках таблицы 2. Они связаны с решением задачи P, если для пересылки потока в сети выбраны только пути P_1 и P_4. Как видим, значения f_A^* и f_P^* совпадают, что и доказывает оптимальность логической структуры $P_1 \& P_4$. Относительная разность f_P^* и f_A^* является величиной, характеризующей степень "неоптимальности" логической структуры сети. Так, для сценария 1F степень "неоптимальности"

$$\omega_{AP} = \frac{f_P^* - f_A^*}{f_A^*} = \frac{99-72}{72} = 0.375{=}37.5\%$$

одинакова как для набора путей P_1, P_2, P_3, так и P_2, P_3 P_4. Для сценария 0.5F степени "неоптимальности" будут различными:

$$\omega_{AP}^{123} = \frac{62-48}{48} \approx 0.29167 \approx 29\%; \quad \omega_{AP}^{234} = \frac{56-48}{48} \approx 0.178 \approx 18\% .$$

Таблица 2. Задача P для сценариев 0.5F и 1F.

Дуги		Сценарий 0.5F			Сценарий 1F		
№	(i, j)	$(1,4)$	$(1,2,3)$	$(2,3,4)$	$(1,4)$	$(1,2,3)$	$(2,3,4)$
1	(1,2)	2.0	2	2	3.0	3.0	3.0
2	(1,3)	2.0	2	2	3.0	3.0	3.0
3	(2,4)	2.0	2	0	3.0	3.0	0.0
4	(2,5)	0.0	0	2	0.0	3.0	3.0
5	(3,4)	0.0	2	0	0.0	3.0	3.0
6	(3,5)	2.0	0	2	3.0	0.0	3.0
7	(4,6)	2.0	6	0	3.0	3.0	3.0
8	(5,6)	2.0	0	6	3.0	3.0	3.0
$f_P^* =$		48.00	62	56	72.00	99.00	99.00

Заключение. Из формулировок задач (1A)–(5A) и (1P)–(5P) легко видеть, что ограничение на параметр μ_a можно ослабить, разрешив ему принимать значение больше единицы. Это означает, что с помощью задач A и P можно описывать и некоторые ситуации, позволяющие увеличивать пропускную способность дуги сети в μ раз. Так, например, выбор пропускной способности

$$y_{ij}^{'} = \frac{4}{3} y_{ij}$$

для дуги (i, j) в случае той же трехрядной автострады, будет означать, что в будущем мы согласны ее расширить, достроив там и 4-й ряд. Другими словами, мы согласны увеличить пропускную способность этой дуги в $\mu = 4/3$ раз. Подобные ситуации уже сложно назвать "аварийными". С позиций отказоустойчивых сетей мы избегали таких ситуаций. Однако, в задачах А и Р они вполне допустимы и будут означать следующее. В некоторый момент мы должны принять некоторое решение относительно пропускных способностей сети, которое будет наилучшим с учетом перспективы увеличения пропускных способностей тех или иных дуг сети.

Еще одно расширение задач А и Р связано с вычислением не только оптимальных значений пропускных способностей дуг, а с возможностью управлять структурой самой сети. Последнее легко сделать с помощью булевых (0,1)–переменных. Например, какие из k дуг в сети следует модернизировать, чтобы сеть стала менее чувствительной к отказам? Для этого достаточно добавить к задачам А и Р такое ограничение

$$\sum_{a \in A} t_a = k, \quad t_a = \{0,1\}, \quad y_a \le y_a^{up} t_a, \quad \forall a \in A, \qquad (\oplus)$$

где булевая переменная t_a равна 1, если дуга $a \in A$ включается в модернизацию, и равна нулю в противном случае.

Литература

1. NATO Advanced Research Workshop "Examining Robustness and Vulnerability of Critical Infrastructure Networks" http://ise.tamu.edu/people/faculty/butenko/NATO2013/
2. Шор Н.З., Сергієнко І.В., Шило В.П., Стецюк П.І. та ін. Задачі оптимального проектування надійних мереж. – К.: Наук. думка, 2005. – 230 с.
3. Сергієнко І.В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності. – К.: Академперіодика, 2010. – 296 с.
4. Sergienko I.V. Methods of optimization and systems analysis for problems of transcomputational complexity. – New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2012. – 226 p.