МЕТОД ЭЛЛИПСОИДОВ И УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНЫЙ МАРШРУТ

Стецюк П.И.[1], Петрухин В.А.[1], Бугров Н.В.[2], Хрипко К.Ю.[2]
stetsyukp@gmail.com

[1]Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев
[2]Московский физико-технический университет (МФТИ)

Міжнародна конференція
"Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку"
присвячена 90-річчю від дня народження академіка В.М. Глушкова
12–13 вересня 2013, м. Київ (Інститут кібернетики)

Информатика и Оптимальные Решения

„Одним из важнейших применений машинной (безбумажной) информатики является машинное управление и проектирование. Применение ЭВМ в этих областях позволяет перейти от выработки более или менее хороших решений к выработке наилучших или, как обычно принято говорить, **оптимальных решений**" [1, стр. 216].

1. **Глушков В.М.** Основы безбумажной информатики. – М.: Наука, 1987. – 552 с.

Цель доклада

В докладе обсудим

двойственный алгоритм на основе метода эллипсоидов для специальной задачи линейного программирования (нахождение условно-оптимального маршрута в сети)

Краткое изложение метода эллипсоидов есть в восьмой главе книги „Основы безбумажной информатики“ [1, стр. 238–239].

План доклада

1. Метод эллипсоидов
   - кратко об истории
   - о роли растяжения пространства
   - octave-функция emshor
2. Условно-оптимальный маршрут
   - постановка задачи
   - двойственный алгоритм

План доклада

1. Метод эллипсоидов
   - кратко об истории
   - о роли растяжения пространства
   - octave-функция emshor
2. Условно-оптимальный маршрут
   - постановка задачи
   - двойственный алгоритм

Метод эллипсоидов предложили

1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений [2].

1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента [3].

2. Юдин Д.Б., Немировский А.С. *Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач* // Экономика и математические методы. – 1976. – Вып. 2. – С. 357–369.

3. Шор Н.З. *Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования* // Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.

Основные результаты на основе МЭ

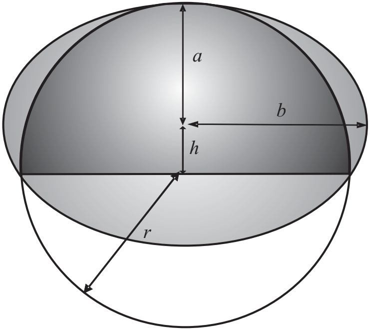
1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами

1981 **Гретшель М., Ловаш Л. и Схрейвер А.** разработали полиномиальные алгоритмы для ряда задач дискретной оптимизации

МЭ и результаты на его основе были центральными на XI международном симпозиуме по математическому программированию (Бонн, ФРГ, август 1982).

Канторович Л.В., Михалевич В.С., Рубинштейн Г.Ш., Третьяков Н.В., Шор Н.З., Якимец В.Н. *XI Международный симпозиум по математическому программированию* // Техническая кибернетика. – М.: Изв. АН СССР. – 1983. – № 1. – С. 197–201.

Геометрия метода эллипсоидов



Эллипсоид $\mathcal{E}_n$, содержащий полушар в E^n, имеет параметры

$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r}{2},$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n.

Если пространство „растянуть“ с коэффициентом α в направлении полуоси a, то $\mathcal{E}_n$ станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида $\mathcal{E}_n$ к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Что такое метод эллипсоидов?

Отношение объема эллипсоида $\mathcal{E}_n$ к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Если коэффициент α такой, что отношение $q(n) < 1$, то объем эллипсоида, в котором локализуется точка x^* (например, точка минимума выпуклой функции $f(x)$), убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(n)$.

О двух вариантах метода эллипсоидов

В методе эллипсоидов Юдина-Немировского-Шора

$$q(n) = 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{и реализуется при} \quad \alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

В приближенном методе эллипсоидов [4]

$$q(n) \approx 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{и реализуется при} \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}.$$

Если $n = 1$, то $q(1) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$.

4. Стецюк П.И. *Приближенный метод эллипсоидов* // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 141–146.

octave-функция emshor (ellipsoid method shor)

```
# octave-code for emshor (version 1.0, 13.09.2013)     #row00
# находит точку минимума выпуклой функции f(x)         #row00a
% Входные параметры:                                   #row00b
% calcfg - имя функции calcfg(x): вычисляет f и g(1:n) #row00c
% x  - начальная точка x0(1:n) (на выходе портится)    #row00d
% rad - радиус шара с центром в точке x0               #row00e
% epsf - точность останова по значению функции         #row00f
% maxitn - максимальное количество итераций            #row00g
% Выходные параметры:                                  #row00h
% xr -- точка минимума (рекордная)                     #row00i
% fr -- значение функции в точке xr                    #row00j
% ist -- код останова (1 = epsf, 4 = maxitn)           #row00k
function [xr,fr,ist]=emshor(calcfg,x,rad,epsf,maxitn); #row01
dn=float(length(x)); beta=sqrt((dn-1.d0)/(dn+1.d0));   #row02
radn=rad; B=eye(length(x)); fr=inf; ist=4;             #row03
for (itn = 0:maxitn)                                   #row04
   [f, g1] = calcfg(x); g=B'*g1; dg=norm(g);           #row05
   if (f < fr)  fr = f; xr = x; itr=itn; endif         #row06
   if(radn*dg < epsf) ist = 1;  return; endif          #row07
   xi=(1.d0/dg)*g; dx = B * xi; hs=radn/(dn+1.d0);     #row08
   x -= hs * dx;  B += (beta - 1) * B * xi * xi';      #row09
   radn=radn/sqrt(1.d0-1.d0/dn)/sqrt(1.d0+1.d0/dn);    #row10
   printf("itn %4d itr %4d f %16.8e fr %16.8e\n",      #row11
          itn,itr,f,fr);
endfor                                                 #row12
endfunction                                            #row13
```

Что находит программа emshor?

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, x^* – точка минимума, $f^* = f(x^*)$, x_0 – начальное приближение.

Теорема (о программе emshor)

Если x_0 такое, что $\|x_0 - x^*\| \leq r$, то программа **emshor** заканчивает работу выполнением одного из условий:

1. найдена точка x_r – такая, что $f(x_r) - f^* \leq \varepsilon_f$ (ist=1),
2. **maxitn** итераций оказалось недостаточно (ist=4).

План доклада

Содержательная постановка задачи

Пусть $N(V, A)$ – ориентированная сеть с множеством вершин V и множеством дуг A. Пусть пересылка единичного потока по дуге $(i, j) \in A$, направленной из вершины $i \in V$ в вершину $j \in V$, характеризуется стоимостью c_{ij} и затратами m ресурсов w_{ij}^k, где $k = 1, \ldots, m$.

Условно-оптимальным маршрутом в сети $N(V, A)$ назовем

наименьший по стоимости маршрут пересылки единичного потока из вершины $r \in V$ (источник) к вершине $s \in V$ (сток), который не превышает заданных пороговых значений на ресурсы W_k, $k = 1, \ldots, m$.

Математическая модель (ЦЛП-задача)

Найти

$$f^* = f(Y^*) = \min_Y \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

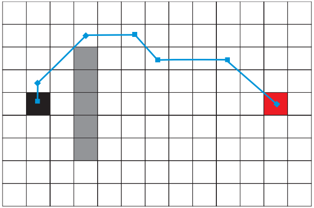
при ограничениях

$$\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}^k y_{ij} \le W^k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

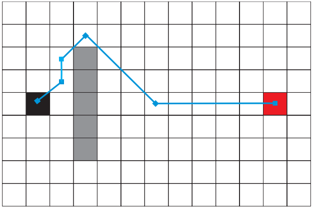
$$\sum_{j:(i,j)\in A} y_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} y_{ji} = \begin{cases} 1, & i = r, \\ 0, & i \ne r, s, \\ -1, & i = s, \end{cases} \tag{3}$$

$$y_{ij} = 0 \vee 1, \quad (i,j) \in A. \tag{4}$$

Маршруты с разным числом кусков



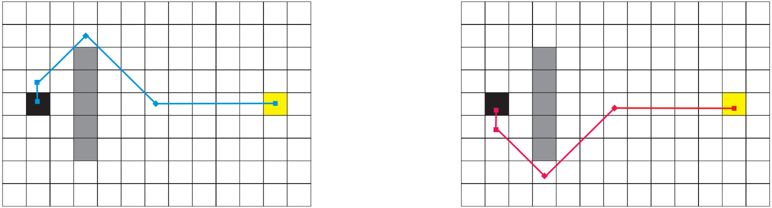
Маршрут 1 (6 участков)



Маршрут 2 (5 участков)

Оба маршрута являются кратчайшими по расстоянию, но разными по количеству участков (кусков)

Кратчайший маршрут с минимумом кусков



Маршрут 1 (4 участка) Маршрут 2 (4 участка)

Соответствует $m = 1$, имеем два оптимальных маршрута.

Запретить один из них можно, если переформулировать задачу (1)–(4) для $m = 2$.

Релаксированная ЛП-задача

Найти

$$f_1^* = f_1(Y^*) = \min_Y \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} \tag{1'}$$

при ограничениях

$$\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}^k y_{ij} \le W^k, \quad k = 1, \dots, m \tag{2'}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} y_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} y_{ji} = \begin{cases} 1, & i = r, \\ 0, & i \ne r, s, \\ -1, & i = s, \end{cases}, \tag{3'}$$

$$0 \le y_{ij} \le 1, \quad (i,j) \in A. \tag{4'}$$

При малых m с помощью метода эллипсоидов можно эффективно решать задачу (1')–(4') для сетей большого размера (двойственный алгоритм по ограничениям (2')).

Двойственный алгоритм

соответствует негладкой задаче максимизации

$$\psi^* = \max_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda), \tag{5}$$

где двойственная функция $\psi(\lambda)$ в точке $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$ определяется как решение следующей задачи

$$\psi(\lambda) = \min_{Y} \sum_{(i,j) \in A} \left(c_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k w_{ij}^k \right) y_{ij} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k W^k \tag{6}$$

при ограничениях (3')-(4').

Как вычисляется $\psi(\lambda)$ и ее суперградиент

Задача (6) является задачей нахождения кратчайшего пути из источника r в сток s в сети $N(V,A)$, где длина дуги $(i,j) \in A$ равна $l_{ij} = c_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k w_{ij}^k$. Пусть кратчайший путь задают компоненты $\tilde{y}_{ij}(\lambda)$ (равны единице, если кратчайший путь проходит по дуге $(i,j) \in A$, и нулю – в противном случае).

Суперградиент функции $\psi(\lambda)$ в точке λ вычисляется по формуле

$$g_\psi = (g_1, \ldots, g_m)^T, \tag{7}$$

где

$$g_k = \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}^k \tilde{y}_{ij}(\lambda) - W^k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{7'}$$

О трудоемкости двойственного алгоритма

Трудоемкость одной итерации равна сумме $O(m^2)$ арифметических операций умножения в методе эллипсоидов и $O(|V|^2 + |A|)$ арифметических операций сложения, если для поиска кратчайшего пути использовать простейшую реализацию алгоритма Дейкстры [5].

Усложненные реализации алгоритма Дейкстры (использование Фибоначчиевых куч) могут понизить второе слагаемое до теоретического минимума $O(|V| \log |V| + |A|)$ арифметических операций сложения.

5. Dijkstra E.W. *A note on two problems in connexion with graphs* // Numerische Mathematik. – 1969. – V. 1. – P. 269–271.

Двойственный алгоритм планируется

использовать при формировании последовательности жестов палубного регулировщика (аватара), управляющего перемещением самолета [6].

6. Афанасьев В.О., Петрухин В.А. и др. *Системы визуализации и виртуального окружения в задачах исследования космоса: настоящее и будущее* // Космонавтика XXI века: Попытка прогноза развития до 2101 года. Под ред. академика РАН Б.Е.Чертока. – М.: Изд. РТСофт, 2010. – 864 с.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!