Двоетапна транспортна задача та її модифікації

П.І. Стецюк, О.М. Хом'як

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем **(МПЗІС-2021)**

17-19 листопада 2021, Дніпро

Двоетапні неперервно-дискретні задачі

Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А.

Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств // Кибернетика и системный анализ. – 2020. – №1. – С. 3–15.

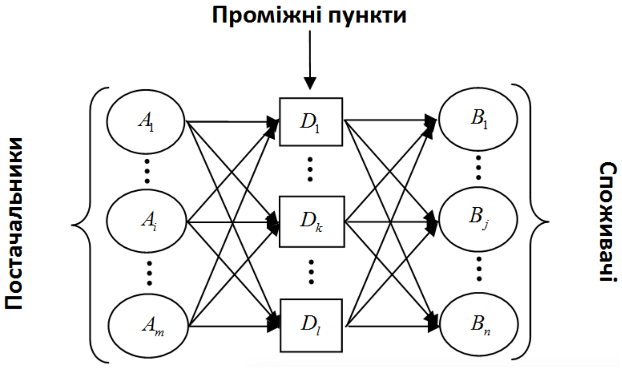
Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L.

Solving a Two-stage Continuous-discrete Problem of Optimal Partitioning-Allocation with the Subsets Centers Placement. // Open Computer Science. De Gruyter. – 2020. – Vol. 10. – P. 124–136.

Зміст

Зміст

Схема перевезень "A → D → B"



Постановка задачі

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \ldots, A_m$ є $a_1, \ldots, a_m$ одиниць продукції, частину якої потрібно перевезти до n споживачів $B_1, \ldots, B_n$, задовольнивши їх потреби $b_1, \ldots, b_n$.
Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів $D_1, \ldots, D_l$.

Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j.

Змінні задачі

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k

y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j

Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x \geq 0, y \geq 0} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} y_{kj}, \quad k = 1, \ldots, l. \qquad (4)$$

Задача (1)–(4) є задачею лінійного програмування з $(m+n) \times l$ змінними та $m+n+l$ обмеженнями

Цільова функція та обмеження

Цільова функція (1) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до проміжних пунктів та від проміжних пунктів до споживачів.

Обмеження (2) означають необхідність транспортування частини продукції $a_1, \ldots, a_m$ із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) - що споживачам потрібно доставити необхідну продукцію $b_1, \ldots, b_n$ з проміжних пунктів.

Обмеження (4) задають умови на те, щоб вся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Умови сумісності

Лема 1

Обмеження (2)–(4) є сумісними, якщо виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.1}$$

Для класичної ДТЗ:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.2}$$

Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.

Зміст

Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x \geq 0, y \geq 0} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \qquad (1)$$

за обмежень (2)–(4) та обмежень

$$d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leq d_k^{up}, \quad k = 1, \dots, l. \qquad (5)$$

Тут $d_1^{low}, \dots, d_l^{low}$ – мінімальні, а $d_1^{up}, \dots, d_l^{up}$ – максимальні пропускні спроможності проміжних пунктів $D_1, \dots, D_l$.

Задача (1)–(5) є задачею лінійного програмування з $(m+n) \times l$ змінними та $m+n+3l$ обмеженнями.

Додаткові обмеження

Обмеження (5) задають нижні та верхні межі
на пропускні спроможності проміжних пунктів.

Їх також можна записати так:

$$d_k^{low} \leq \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \leq d_k^{up}, \quad k = 1, \ldots, l. \tag{5a}$$

Умови сумісності

Лема 2

Обмеження (2)–(5) є сумісними, якщо виконуються умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad \sum_{k=1}^{l} d_k^{low} \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{k=1}^{l} d_k^{up}. \tag{2.1}$$

Для класичної ДТЗ:

$$\sum_{k=1}^{l} d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{k=1}^{l} d_k^{up}. \tag{2.2}$$

Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003.

Зміст

Додаткові дані та змінні

Для транспортування продукції використовуються l проміжних пунктів $D_1, \ldots, D_l$ з мінімальними $d_1^{low}, \ldots, d_l^{low}$ та максимальними $d_1^{up}, \ldots, d_l^{up}$ пропускними спроможностями.

Необхідно

знайти оптимальний план транспортування продукції,
який використовує D $(1 < D < l)$ проміжних пунктів.

Нехай z_k – булева змінна, яка дорівнює одиниці, якщо проміжний пункт D_k використовується, та дорівнює нулю в протилежному випадку.

Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x\geq 0, y\geq 0}\left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \qquad (1)$$

за обмежень (2)–(4) та обмежень

$$d_k^{low} z_k \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leq d_k^{up} z_k, \quad k = 1, \ldots, l, \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = D, \qquad (6)$$

$$z_k = 0 \vee 1, \quad k = 1, \ldots, l. \qquad (7)$$

Задача (1)–(7) є задачею булевого лінійного програмування з $(m+n+1)\times l$ змінними та $m+n+3l+1$ обмеженнями.

Додаткові обмеження

Обмеження (6) означають, що задіяно рівно D проміжних пунктів, а обмеження (5) задають для них нижні та верхні межі на пропускні спроможності.

Обмеження (5) можна записати так:

$$d_k^{low} z_k \le \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \le d_k^{up} z_k, \quad k = 1, \dots, l. \tag{5a}$$

Умови сумісності

Лема 3

Обмеження (2)–(7) є сумісними, якщо виконуються умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad \sum_{k=1}^{l} d_k^{low} z_k \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{k=1}^{l} d_k^{up} z_k. \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = D, \quad z_k = 0 \vee 1, \qquad k = 1, \ldots, l. \tag{3.2}$$

Частковий випадок 1

Лема 3а

Обмеження (2)–(7) є сумісними, якщо виконуються умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad D \times d^{low} \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{k=1}^{D} d_k^{up}.$$

Тут $d_1^{low} = d_2^{low} = \ldots = d_l^{low} = d^{low}$, а $d_1^{up}, \ldots, d_l^{up}$ впорядковані за спаданням $d_1^{up} \geq d_2^{up} \geq \ldots \geq d_l^{up}$.

Частковий випадок 2

Лема 3b

Обмеження (2)–(7) є сумісними, якщо виконуються умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad \sum_{k=1}^{D} d^{low} \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \leq D \times d_k^{up}.$$

Тут $d_1^{up} = d_2^{up} = \ldots = d_l^{up} = d^{up}$, а $d_1^{low}, \ldots, d_l^{low}$ впорядковані за зростанням $d_1^{low} \leq d_2^{low} \leq \ldots \leq d_l^{low}$.

AMPL-реалізації

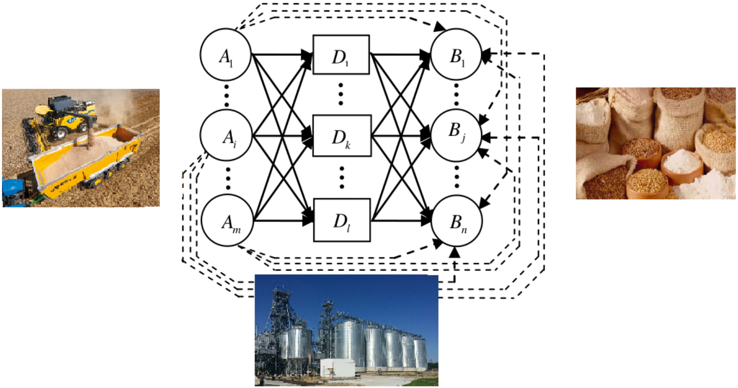
Стецюк П.І., Мазютинець Г.В., Мілешовський Б.І. AMPL-реалізація двоетапної транспортної задачі // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2017, 22–24 листопада 2017 р. – Д.: ДНУ, 2017. – С. 186–191.

Стецюк П.І., Бисага О.П., Трегубенко С.С. Двоетапна транспортна задача з обмеженням на кількість проміжних пунктів // Компьютерная математика. – 2018. – № 2. – С. 119–128.

Стецюк П.І., Міца О.В., Стрелюк О.В., Фесюк О.В. Транспортна задача з обмеженнями на пропускні спроможності проміжних пунктів // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2017. – Вип. 17. – С. 207–219.

Зміст

1. Розподіл та доставка агропродукції



Задача (1)–(7) та її часткові випадки є актуальними для агропідприємств при розподіленні та доставці продукції для продажу або переробки на власних потужностях.

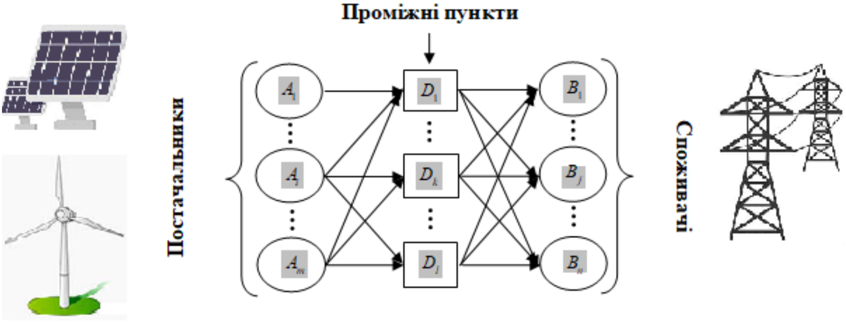
2. Матеріально-технічні засоби

Задача (1)–(7) дозволяє знайти застосування для пошуку раціонального розташування заданої кількості складів з урахуванням визначеного положення постачальників та отримувачів матеріально-технічних засобів на території, де вони виконують свої завдання (**Трегубенко, 2015**).

Романченко І.С., Хазанович О.І., Трегубенко С.С.

Моделювання системи матеріально-технічного забезпечення. – Львів: НАСВ ЗС України, 2015. – 156 с.

3. Розташування накопичувачів електроенергії



Буткевич О.Ф., Юнєєва Н.Т., Гурєєва Т.М., Стецюк П.І.

Задача розташування накопичувачів електроенергії в ОЕС України з урахуванням його впливу на потоки потужності контрольованими перетинами. // Технічна електродинаміка. – 2020. – № 4. – С. 46–50.

Робота підтримана

CRDF Global
(грант G-202102-68020)

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!