МЕТОД НАЙМЕНШИХ МОДУЛІВ ТА r-АЛГОРИТМ ШОРА

Стецюк П.І., Стецюк М.Г.

stetsyukp@gmail.com

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Метод найменших модулів. Нехай для оцінки n невідомих параметрів $x_1,..,x_n$ використовується m спостережень $y_1,..,y_m$ та ці величини пов'язані співвідношенням:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i, \quad i = 1,...,m, \tag{1}$$

де a_{ij} – відомі коефіцієнти, u_i – невідомі випадкові величини, що мають (приблизно) однакові функції розподілу. Рівняння (1) можна записати в матричній формі:

$$y = Ax + u, \tag{2}$$

де $y = (y_1,..,y_m)^T \in \mathbf{R}^m$ та $u = (u_1,..,u_m)^T \in \mathbf{R}^m$ – m-вимірні вектори, A – матриця розміру $m \times n$, $x = (x_1,..,x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ – m-вимірний вектор параметрів, які потрібно оцінити.

Метод найменших модулів (відповідає знаходженню невідомого вектора x^* за критерієм найменших модулів) є задачею безумовної оптимізації:

$$f^* = f\left(x^*\right) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\}, \tag{3}$$

де $|\cdot|$ – модуль (абсолютна величина) числа. Зауважимо, що метод найменших модулів є робастним до аномальних спостережень або «викидів» [1].

Задача (3) є задачею мінімізації опуклої кусково-лінійної функції. Її значення $f\left(\bar{x}\right)$ та субградієнт $g_f\left(\bar{x}\right)$ у точці $\bar{x}$ обчислюється за операторами:

```
tmp = A*x - y; f = sum(abs(tmp));
A1 = A.*(sign(tmp)*ones(1,n)); g1 = sum(A1,1); g = g1';
```

у матлабоподібній мові Octave, де `f` = $f(\bar{x})$, `g` = $g_f(\bar{x})$.

Обчислювальний експеримент ($m \gg n$) [2]. Проводився за допомогою GNU Octave версії 5.1.0 на комп'ютері з процесором Intel Core i5-9400f з тактовою частотою 2,9 ГГц та 16 ГБ оперативної пам'яті. Вхідні дані для задачі (3) генерувалися випадковим чином з стандартним рівномірним розподілом $U(0,1)$ за наступними формулами: **A = rand(m,n), b = A*ones(n,1), b(m,1) = b(m,1) + 1**. Для програми **ralgb5a** використовувалася стартова точка $x_0 = 0$, параметри $r(\alpha)$-алгоритму: $\alpha = 3$, $q_1 = 1.0$, $h_0 = 5.0$ та параметри зупинки: $\varepsilon_x = 10^{-6}$, $\varepsilon_g = 10^{-8}$, maxitn=1500, intp=100.

Результати розрахунків за часом, ітераціями та кількістю обчислень функції та субградієнта для $n = 10 \div 100$ та $m = 500.000 \div 5.000.000$ наведено в таблиці, де *ist* – код завершення роботи програми **ralgb5a,** $\| x_r - x^* \|$ – норма відхилення знайденого наближення від точки мінімуму $x^* = (1,1,\ldots,)^T$.

n	m	*time* (сек.)	*itn*	*nfg*	*ist*	$\| x_r - x^* \|$
100	500.000	754.45	1500	1831	4	3.18e-06
80	625.000	689.47	1343	1670	3	6.26e-07
50	1.000.000	441.08	829	1055	3	3.68e-07
20	2.500.000	178.07	312	409	3	5.66e-07
10	5.000.000	96.01	147	198	3	6.60e-07

Висновок. Використання *r*-алгоритму для розв`язання задачі (3) дозволяє знаходити невідомі параметри за критерієм найменших модулів для $n \approx 100$ та $m \approx 1.000.000$ за декілька хвилин на сучасних персональних комп'ютерах.

Список літератури

1. Стецюк П.И., Колесник Ю.С., Лейбович М.М. О робастности метода наименьших модулей. *Компьютерная математика.* 2002. С. 114–123.

2. Стецюк П.І., Стецюк М.Г., Брагін Д.О., Молодик М.О. Використання *r*-алгоритму Шора в лінійних задачах робастної оптимізації. *Кібернетика та комп'ютерні технології.* 2021. № 1. С. 29–42.