НОВАЯ МОДЕЛЬ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

П.И. СТЕЦЮК,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина,
stetsyukp@gmail.com

У.Г. НУРИЕВ,
Еге (Ege) университет, Измир, Турция,
urfat.nuriyev@ege.edu.tr

Ф.У. НУРИЕВА,
Институт систем управления НАН Азербайджана,
Докуз Эйлюль (Dokuz Eylül) университет,
Измир, Турция
nuriyevafidan@gmail.com

Построена новая модель целочисленного линейного программирования для нахождения маршрута коммивояжера (кратчайшего гамильтонова цикла в графе). Она использует ограничения для задачи о потоке и ограничения С. Миллера, А. Таккера и Р. Землина. Описаны результаты вычислительных экспериментов, которые показывают, что найти точное решение задачи коммивояжера для графов с сотней вершин можно за несколько минут с помощью современных программ gurobi и cplex.

Ключевые слова: *задача коммивояжера, линейное и целочисленное программирование, gurobi, cplex.*

Введение. Задача коммивояжера заключается в нахождении в полном графе $D_{n,n}$ кратчайшего гамильтонова цикла, который проходит через n вершин, расстояние между которыми – $d_{ij} \geq 0$, $i, j = 1,\dots,n$, $i \neq j$. Для нее известны две формулировки в форме моделей (задач) целочисленного линейного программирования с полиномиальным количеством ограничений [1, с. 46, 2, с. 65]. Они различными способами обеспечивают связность искомого цикла. Первая формулировка использует идею моделирования задачи о потоке [3], а вторая использует ограничения, которые построены С. Миллером, А. Таккером и Р. Землиным в статье [4].

В данной статье для задачи коммивояжера рассматривается новая формулировка задачи целочисленного линейного программирования, которая включает ограничения из обеих обсуждаемых выше моделей. Она позволяет объединить вычислительные преимущества каждой из отдельных моделей, что мы продемонстрируем для нескольких задач из библиотеки TSPLIB. Материал статьи изложен в трех разделах: в разделе 1 описаны две известные модели, в разделе 2 описана новая модель, а в разделе 3 описаны вычислительные эксперименты для тестовых задач с использованием современных версий **gurobi** и **cplex**.

1. Две известные модели. Первой модели для нахождения кратчайшего гамильтонова цикла в графе $D_{n,n}$ соответствует задача смешанного булевого линейного программирования: найти

$$d_1^* = \min_{x_{ij}, z_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2}$$

$$z_{ij} - (n-1)x_{ij} \le 0, \quad i, j = 1,\dots,n, \quad i \neq j, \tag{3}$$

$$\sum_{j=2}^{n} z_{1j} = n-1, \quad \sum_{j=2}^{n} z_{j1} = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} = -1, \quad i = 2,\dots,n, \tag{5}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1,\dots,n, \quad i \neq j. \tag{6}$$

Здесь булева переменная x_{ij} равна единице, если цикл содержит дугу ij, и равна нулю в противном случае. Неотрицательная переменная z_{ij} задает величину потока некоторого условного продукта от вершины i к вершине j.

Минимизация целевой линейной функции (1) отвечает поиску в графе $D_{n,n}$ гамильтонового цикла минимальной длины d_1^*.

Ограничения (2) описывают одноразовый вход и одноразовый выход для каждой из вершин. Ограничения (3), (4) и (5) гарантируют связность цикла. Ограничения (3) обеспечивают перевозку продукта между вершинами i и j только в том случае, если $x_{ij} = 1$. Ограничения (4), (5) означают, что из первой вершины необходимо вывезти k единиц продукта, оставляя в каждой из вершин цикла только одну единицу продукта.

Задача (1)–(5) содержит $N_1 = 2n(n-1)$ переменных, из которых $n(n-1)$ – булевые, а $n(n-1)$ – непрерывные, и $M_1 = (n+1)^2$ ограничений, в том числе $(3n+1)$ – линейные равенства, а $n(n-1)$ – линейные неравенства.

Второй модели для нахождения кратчайшего гамильтонова цикла в графе $D_{n,n}$ соответствует задача целочисленного линейного программирования: найти

$$d_2^* = \min_{x_{ij}, u_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad i = 1,\dots,n \tag{8}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n-1, \quad i, j = 2,\dots,n, \quad i \ne j, \tag{9}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1,\dots,n, \quad i \ne j \tag{10}$$

$$u_i - \text{целые числа}, 1 \le u_i \le (n-1), \quad i = 2,\dots,n. \tag{11}$$

Здесь минимизация целевой линейной функции (7) отвечает за поиск в графе $D_{n,n}$ гамильтонового цикла минимальной длины d_2^*. Ограничения (8) описывают одноразовый вход и одноразовый выход для каждой из вершин. За связность цикла отвечают ограничения (9), где значения целочисленных переменных u_i отвечают номеру шага, на котором посещается вершина i. Поскольку первую вершину посещать не требуется, то количество переменных u_i будет равным $(n-1)$.

Задача (7)–(11) содержит $N_2 = n^2 - 1$ переменных, из которых $n(n-1)$ – булевые, а $(n-1)$ – целочисленные, и $M_2 = n^2 - n + 2$ ограничений, в том числе $2n$ – линейные равенства, а $(n-1)(n-2)$ – линейные неравенства.

2. Новая модель. Новой модели для нахождения кратчайшего гамильтонова цикла в графе $D_{n,n}$ отвечает задача смешанного целочисленного линейного программирования: найти:

$$d_3^* = \min_{x_{ij}, z_{ij}, u_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{12}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad i = 1, ..., n \tag{13}$$

$$z_{ij} - (n-1)x_{ij} \le 0, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j \tag{14}$$

$$\sum_{j=2}^{n} z_{1j} = n-1, \quad \sum_{j=2}^{n} z_{j1} = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} = -1, \quad i = 2, \ldots, n \tag{16}$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1, \quad i, j = 2, ..., n, \quad i \neq j, \tag{17}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j \tag{18}$$

$$u_i - \text{целые числа}, 1 \le u_i \le (n-1), \quad i = 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Минимизация целевой линейной функции (12) обеспечивает нахождение в графе $D_{n,n}$ гамильтонова цикла минимальной длины d_3^*. Ограничения (13) описывают одноразовый вход и одноразовый выход для каждой из n вершин. За связность гамильтонового цикла одновременно отвечают ограничения (14)–(16), которые входят в первую модель как ограничения (3)–(5), и ограничения (17), которые входят во вторую модель как ограничения (9).

Задача (12)–(19) содержит $N_3 = (2n+1)(n-1)$ переменных, из которых $n(n-1)$ – булевые, $n(n-1)$ – непрерывные, а $(n-1)$ – целочисленные, и $M_3 = 2n^2 - n + 3$ ограничений, в том числе $(3n+1)$ – линейные равенства, а $2(n-1)^2$ – линейные неравенства.

Следует отметить, что формулировки задач (1)–(6), (7)–(11) и (12)–(19) могут быть применены и для нахождения маршрута коммивояжера в неполном графе, для чего последний достаточно дополнить недостающими дугами и значения длин для них установить равными сумме длин всех дуг неполного графа.

3. Вычислительные эксперименты. Если $n = 100$, то для задач (1)–(6), (7)–(11) и (12)–(19) количества переменных и ограничений (1)–(5) измеряются десятками тысяч. Задачи таких размеров можно решать с помощью современных программ Gurobi 9.1.1 та CPLEX 20.1.0.0 с NEOS-сервера [5]. Наша цель оценить время нахождения оптимального маршрута коммивояжера при $n = 100$ посредством решения всех трех задач с помощью указанных программ.

Для этого на языке моделирования AMPL [6] разработано описание математических моделей (1)–(6), (7)–(11) и (12)–(19). Модели настроены на работу с графами формата *.tsp, где вершины задаются координатами точек на плоскости, а расстояния между каждой парой вершин определяются как округленные к целым числам евклидовы расстояния между соответствующими этим парам точками плоскости.

Результаты вычислительных экспериментов для Gurobi 9.1.1 и CPLEX 20.1.0.0 приведены в таблицах 1 и 2, соответственно. Здесь названия задач (графов) приведены в первой колонке таблиц, а в последующих колонках приведены d_1^*, d_2^*, d_3^* – найденные оптимальные значения целевых функций для всех трех моделей, t_1, t_2, t_3 – затраченное на их решение время, в секундах.

Таблица 1 – Результаты **gurobi** для решения тестовых задач

Задача	d_1^*	t_1	d_2^*	t_2	d_3^*	t_3
st70.tsp	675	**34.17**	675	10470.3	675	47.78
eil76.tsp	538	23.89	538	**7.00**	538	25.77
kroA100.tsp	21282	**81.51**	21282	1141.34	21282	177.17
kroE100.tsp	22068	**188.21**	22068	1742.59	22068	241.86
eil101.tsp	629	63.39	629	64.79	629	**58.83**

Таблица 2 – Результаты **cplex** для решения тестовых задач

Задача	d_1^*	t_1	d_2^*	t_2	d_3^*	t_3
st70.tsp	675	452.86	675	25754.7	675	**129.14**
eil76.tsp	538	90.80	538	71.09	538	**48.52**
kroA100.tsp	21282	1749.79	21282	33087.6	21282	**169.34**
kroE100.tsp	22068	1494.85	22068	43017.0	22068	**146.34**
eil101.tsp	629	306.75	629	151.96	629	**71.85**

Из табл. 1 и 2 видим, что время, затраченное программами Gurobi 9.1.1 и CPLEX 20.1.0.0 на поиск оптимального маршрута коммивояжера, существенно зависит от того, какая форма задачи используется. В таблице 3 приведены количества переменных и ограничений для используемого в задачах числа вершин.

Таблица 3 – Размеры моделей (задач) для $n \in \{70, 76, 100, 101\}$

n	Задача (1)–(6)		Задача (7)–(11)		Задача (12)–(19)	
	N_1	M_1	N_2	M_2	N_3	M_3
70	9660	5041	4899	4832	9729	9733
76	11400	5929	5775	5702	11475	11479
100	19800	10201	9999	9902	19899	19903
101	20200	10404	10200	10102	20300	20304

Наименьшее время для каждой из задач в табл. 1 и 2 выделено жирным шрифтом и для выбранных графов максимальное из них составляет чуть больше трех минут (**gurobi,** задача kroE100.tsp).

Заключение. На теперешних ПЭВМ задачи коммивояжера для 100-вершинных графов можно успешно решать за несколько минут с помощью использования моделей (1)–(6), (7)–(11), (12)–(19) и современных версий программ **gurobi** и **cplex**.

Литература

1. Алексеева Е.В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 131 с.
2. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Исследование операций. Том II. – Кишинэу, Эврика, 2008. – 592 с.
3. Gavish B., Graves S.C. The travelling salesman problem and related problems. – Working Paper OR-078-78, 1978. – Operations Research Center, MIT, Cambridge, MA.
4. Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. Integer programming formulation of travelling salesman problem. – J. ACM, 1960, 3, P. 326-329.
5. NEOS Server. https://neos-server.org/
6. Fourer R., Gay D., Kernighan B. AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming. Belmont: Duxburry Press, 2003. 517 p.