r-АЛГОРИТМЫ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев

XI Міжнародна науково-практична конференція "МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ"
20-22 ноября 2013, г. Днепропетровск

Шор Наум Зуселевич (1937 – 2006)

Родился 1 января 1937 года в Киеве. Окончил Киевский университет имени Тараса Шевченко в 1958 году. Работал в Институте кибернетики НАН Украины с 1958 по 2006 гг. Академик НАН Украины, профессор. Автор 10 монографий и более 200 статей. Лауреат Государственных премий УССР (1973), СССР(1981), Украины (1993, 2000), премии им. В.М. Глушкова НАН Украины (1987), премии им. В.С. Михалевича НАН Украины (1997).

Статья к юбилею Н.З. Шора (январь, 2012)

75-летию со дня рождения Н.З. Шора посвящена статья

Сергиенко И.В., Стецюк П.И.

О трех научных идеях Н.З. Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2012, № 1. – С. 4–22.

В статье описаны три центральные идеи Н.З. Шора:

обобщенный градиентный спуск (1962), использование линейных неортогональных преобразований пространства для улучшения обусловленности овражных функций (1969), двойственный подход к получению и уточнению оценок целевой функции в невыпуклых квадратичных моделях (1985).
Приведены методы и алгоритмы, разработанные на их основе в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

Б.Т. Поляк „Введение в оптимизацию“ (1983)

Борис Теодорович говорит:

на стр. 128

„Основные алгоритмы минимизации гладких функций – градиентный и Ньютона – были построены на использовании линейной и квадратичной аппроксимации функции, задаваемой первыми членами ряда Тейлора. Однако, для недифференцируемой функции эта идея неприменима – такая функция не может быть хорошо аппроксимирована ни линейной, ни квадратичной функциями.“

Б.Т. Поляк „Введение в оптимизацию“ (1983)

на стр. 129

„Поэтому разработка методов минимизации негладких функций требует привлечения новых идей. Одна из них, принадлежащая Н.З. Шору, выглядит несколько неожиданно. Пишется прямой аналог градиентного метода с заменой градиента на произвольный субградиент $g_f(x)$ функции $f(x)$:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k g_f(x_k). \tag{3}$$

... Значения функции в методе (3) не могут убывать монотонно. Оказывается, однако, что при этом монотонно убывает другая функция – расстояние до точки минимума, и в этом то заключается основная идея субградиентного метода (3).“

Выпуклая функция и ее субградиент

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, $x \in E^n$, X^* – множество минимумов, $x^* \in X^*$ – точка минимума; $f^* = \inf f(x)$.

Определение 1. Субградиентом функции $f(x)$ в точке x_0 называется вектор $g_f(x_0)$, удовлетворяющий неравенству

$$f(x) - f(x_0) \geq (g_f(x_0), x - x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in E^n \quad . \qquad (1)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение векторов из E^n.

Примечание. Если $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой в точке x_0, то вектор $g_f(x_0)$ определяется однозначно и совпадает с $\nabla f(x_0)$ – градиентом функции $f(x)$ в точке x_0. В общем случае (для функций с разрывным градиентом) вектор $g_f(x_0)$ определяется неоднозначно.

Геометрическое свойство субградиента

Из неравенства (1) следует, что если $f(x) < f(x_0)$, то субградиент $g_f(x_0)$ удовлетворяет неравенству

$$(-g_f(x_0), x - x_0) > 0. \tag{2}$$

Формула (2) означает, что антисубградиент в точке x_0 образует острый угол с направлением из точки x_0 в любую точку x с меньшим значением $f(x)$.

Следствие. Если X^* непусто и $x_0 \notin X^*$, то из точки x_0 в направлении $-g_f(x_0)$ существует ненулевой длины шаг, при котором расстояние до множества X^* убывает.

Этот факт лежит в основе субградиентного метода минимизации негладких функций. То, что эта идея принадлежит Н.З.Шору отметил Б.Т.Поляк (1983, Введение в оптимизацию, с. 128-129).

Субградиентный метод (определение)

Определение 2. Субградиентным методом называется

процедура построения последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k \frac{g_f(x_k)}{\|g_f(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где x_0 – начальное приближение, h_k – шаговый множитель, $g_f(x_k)$ – произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k. Если $g_f(x_k) = 0$, то x_k является точкой минимума функции $f(x)$ и процесс (3) останавливается.

Как регулировать шаг h_k? ... чтобы метод (3) сходился.

Об известных регулировках шага

(a) классические условия (Н. Шор, Ю. Ермольев, Б. Поляк)

$$h_k > 0; \quad \lim_{k\to\infty} h_k = 0; \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k = +\infty.$$

(b) фейеровский шаг (Б. Поляк, И. Еремин)

$$h_k = \frac{\gamma(f(x_k) - f^*)}{\|g_f(x_k)\|}, \quad \text{где} \quad 0 < \gamma < 2.$$

(c) геометрическая прогрессия (Н. Шор)

$$h_{k+1} = h_k * q_k, \quad \text{где} \quad 0 < q_k < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для регулировок (a) и (b) метод (3) сходится с любого начального приближения x_0. Регулировка (c) обеспечивает сходимость метода (3) для специальных классов выпуклых функций.

Проблемы в субградиентных методах

1. Овражная кусочно-линейная функция $(t > 1)$

$$f_1(x_1, x_2) = |x_1| + t|x_2|, \quad x^\star = (0,0) \quad f^\star = 0.$$

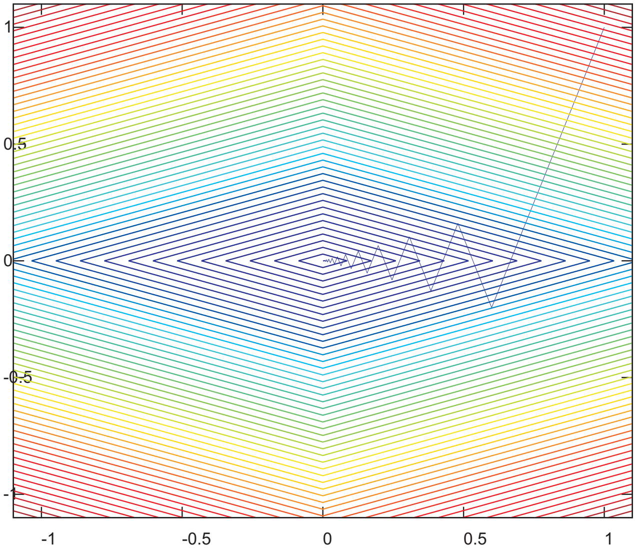
Метод Поляка $(\gamma = 1)$ сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$ (Поляк,1969).

2. Существенно овражная кусочно-квадратичная функция

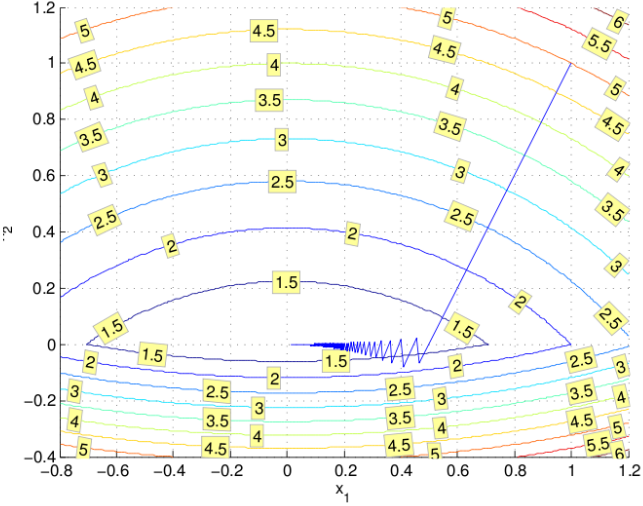
$$f_2(x_1, x_2) = \max\left\{x_1^2 + (2x_2 - 2)^2 - 3, x_1^2 + (x_2 + 1)^2\right\},$$

Вырождение в точке минимума $x^\star = (0,0)$, $f^\star = 1$.

Метод Поляка для $f_1(x_1, x_2) = |x_1| + 10|x_2|$



Метод Поляка для $f_2(x_1, x_2)$ (10000 итераций)



Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

Об идее Шора (1969)

Идея состоит в

применении линейных неортогональных преобразований пространства для улучшения свойств минимизируемой функции в преобразованном пространстве переменных.

Она оказалась эффективной вычислительной идеей в выпуклой оптимизации и послужила основой для создания двух семейств субградиентных методов с растяжением пространства:

- субградиентные методы с растяжением пространства в направлении субградиента. Их частный случай – метод эллипсоидов, (Юдин, Немировский, 1976), (Шор, 1976);
- субградиентные методы с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов (r-алгоритмы).

Суть идеи Шора (1969)

Пусть на k-ой итерации субградиентного алгоритма производится замена переменных $x = B_k y$, где B_k – неособенная $n \times n$-матрица. Для субградиента имеем

$$f(x) - f(x_k) \geq (g_f(x_k), x - x_k) \quad \forall x \in E^n,$$

откуда, осуществляя замену переменных $x = B_k y$, получим

$$\varphi(y) - \varphi(y_k) \geq (B_k^T g_f(x_k), y - y_k) \quad \forall y \in E^n.$$

Вектор $g_\varphi(y_k) = B_k^T g_f(x_k)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(y) - \varphi(y_k) \geq (g_\varphi(y_k), y - y_k) \quad \forall y \in E^n$$

и есть субградиентом функции $\varphi(y) = f(B_k y)$ в точке $y_k = B_k^{-1} x_k = A_k x_k$.

Суть идеи Шора (1969) .....

Для функции $\varphi(y)$ субградиентный метод в пространстве переменных $y = A_k x$ имеет вид

$$y_{k+1} = y_k - h_k \frac{g_\varphi(y_k)}{\|g_\varphi(y_k)\|} = y_k - h_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}. \qquad (4)$$

Следовательно, очередное приближение $x_{k+1} = B_k y_{k+1}$ будет получено по формуле

$$x_{k+1} = B_k y_k - h_k B_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|} = x_k - h_k B_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}. \qquad (5)$$

На формулах (4) и (5) основаны субградиентные методы с преобразованием пространства переменных.

Здесь h_k – шаг в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных $y = A_k x = B_k^{-1} x_k$.

Субградиентный метод Shor69

Пусть x_0 – начальное приближение, B_0 – $n{\times}n$-матрица. Итерация субградиентного метода с последовательным преобразованием пространства переменных имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad B_{k+1} = B_k T_k, \qquad \text{(Shor69)}$$

где h_k – шаговый множитель, T_k – $n{\times}n$-матрица.

Метод (Shor69) называют B-формой субградиентного метода с преобразованием пространства.

Его можно записать в H-форме (по типу методов переменной метрики) с помощью симметричной матрицы $H_k = B_k B_k^T$.

Об двух семействах методов с растяжением

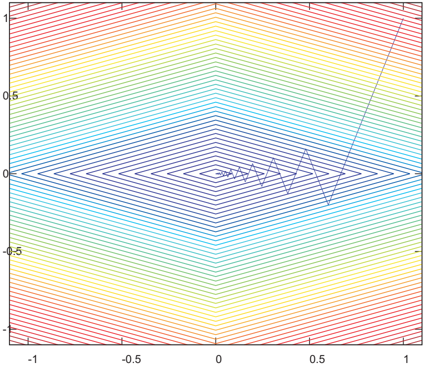
Если в методе (Shor69) матрицы T_k подбирать так, чтобы в преобразованном пространстве поверхности овражных функций становились менее овражными, то такой метод окажется эффективнее, чем субградиентный метод.

Это подверждают субградиентные методы Н.З. Шора на основе оператора растяжения пространства

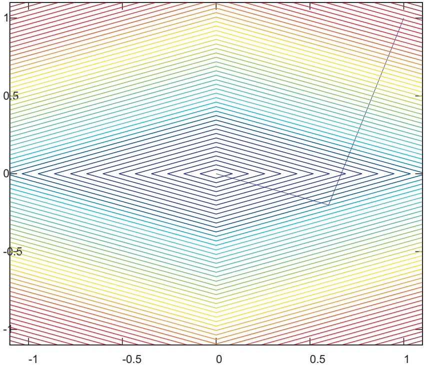
$$R_\alpha(\xi) = I + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \qquad \text{где} \qquad \alpha > 1, \qquad (*)$$

(I – единичная $n\times n$-матрица, вектор $\xi \in E^n$ такой, что $\|\xi\|=1$)

Ускорение по Шору для $f_1(x_1, x_2) = |x_1| + 10|x_2|$

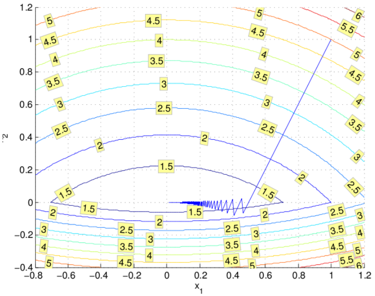


Метод Поляка

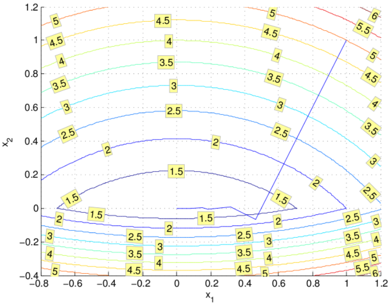


Метод amsg2 (2 итерации)

Ускорение по Шору для $f_2(x_1, x_2)$



Метод Поляка (10000 итер.)



Метод amsg2 (31 итерация)

Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

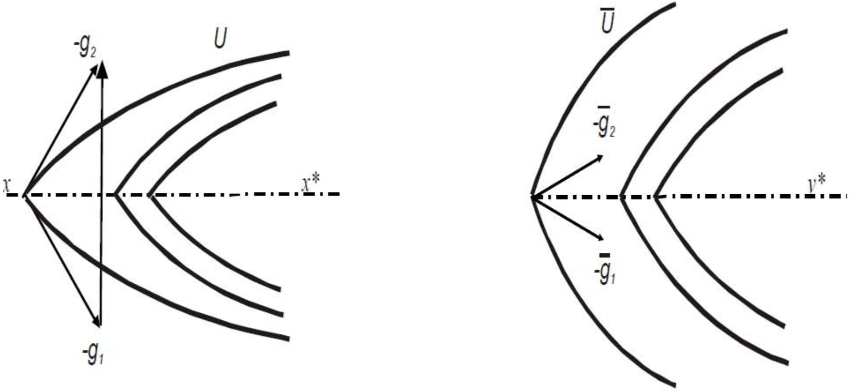
История r-алгоритмов

r-алгоритмы получили свое название от русского слова "разность". Их называют r-алгоритмами Шора, либо r-алгоритмами Шора–Журбенко.

- Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С.51–59.
- Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979.

В r-алгоритмах шаг выбирается из условия точного (приближенного) минимума функции по направлению сдвига, благодаря чему определяются те два последовательных субградиента, растяжение по разности которых улучшает свойства овражной функции в преобразованном пространстве переменных.

Идея r-алгоритмов (рисунок из книг Шора)



Основная цель:

построить алгоритмы, монотонные (почти монотонные) по минимизируемой функции.

Вычислительная схема r-алгоритмов

r-Алгоритмом называется процедура построения последовательностей $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ по правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \;\; B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k), \;\; k = 0, 1, 2, \dots, \qquad (6)$$

где $$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad h_k \geq h_k^\star = \operatorname*{argmin}_{h \geq 0} f(x_k - hB_k\xi_k), \qquad (7)$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|}, \;\; r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1. \qquad (8)$$

Здесь x_0 — начальное приближение, $B_0 = I_n$ – единичная $n \times n$-матрица, h_k – шаговый множитель, α_k – коэффициент растяжения пространства, $g_f(x_k)$ и $g_f(x_{k+1})$ – произвольные субградиенты функции $f(x)$ в точках x_k и x_{k+1}. Если $g_f(x_k) = 0$, то x_k – точка минимума функции $f(x)$ и процесс (6)–(8) останавливается.

Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

Два результата для гладких функций

Для минимизации гладких функций r-алгоритмы по своей структуре близки к алгоритмам квазиньютоновского типа с переменной метрикой. Это определило такие результаты.

1. Предельный вариант r-алгоритма с бесконечным коэффициентом растяжения (здесь $\beta = 0,\ h_k = h_k^*$) является проективным вариантом метода сопряженных градиентов (Журбенко, 1971).

2. Предельный вариант r-алгоритма с восстановлением матрицы B_k после каждых n итераций обладает квадратичной скоростью сходимости при обычных условиях гладкости и регулярности $f(x)$ (Шор, 1979).

Самый общий результат

Теорема (Шор, 1974)

для класса почти дифференцируемых кусочно-гладких функций определяет достаточные условия, при которых $r_\mu(\alpha)$-алгоритм ($h_k{=}h_k^*$) сходится к локальному минимуму.

Эти условия слишком сильные и не выполняются даже для кусочно-линейных функций. Наиболее типичная ситуация, когда это происходит, связана с нарушением линейной независимости множества $G_f(x)$ – множества почти-градиентов $f(x)$ в точке x.

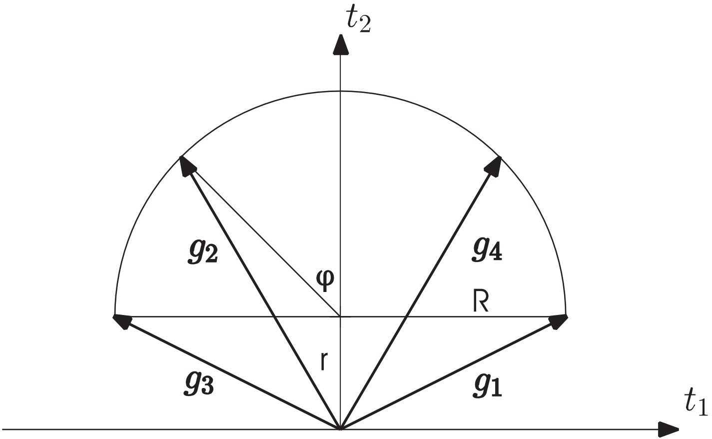
Можно ли улучшить результат Шора (1974)?

Оказывается нельзя.

Построен пример выпуклой кусочно-линейной функции, для которой возможно "зацикливание" $r_\mu(\alpha)$-алгоритма.

Стецюк П.И. К вопросу сходимости r-алгоритмов // Кибернетика и систем. анализ. – 1995. – № 6. – С. 173–177.

Идея „ловушек“ для $r_\mu(\alpha)$-алгоритма



Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

$r(\alpha)$-алгоритм с адаптивным шагом

Оказался эффективным вариантом r-алгоритмов и на его основе разработано ряд программных реализаций (Журбенко Н.Г., Шабашова Л.П., Кунцевич А.В. и др.)

Используются в Днепропетровске

Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. – К.: Наук. думка, 2005. – 564 с.

Суть адаптивной регулировки шага

Величина шага h_k адаптивно настраивается с помощью параметров h_0, q_1, n_h, q_2, где h_0 – величина начального шага (используется на 1-й итерации, на каждой последующей итерации уточняется); q_1 – коэффициент уменьшения шага ($q_1 \leq 1$), если условие завершения спуска по направлению ($h_k > h_k^*$) выполняется всего за один шаг одномерного спуска; q_2 – коэффициент увеличения шага ($q_2 \geq 1$); натуральное число n_h задает число шагов одномерного спуска ($n_h > 1$), через каждые из которых шаг в одномерном спуске будет увеличиваться в q_2 раз. **(Шор, Стеценко, 1989)**

Octave-функция ralgb5 (Стецюк, 2011)

```
%     ralgb5 реализует $r(\alpha)$-алгоритм с адаптивным шагом,
%     использует подготовленную пользователем octave-функцию
%     function [f,g] = calcfg(x), которая вычисляет значения
%     функции $f=f(x)$ и её субградиента $g(x)$ в точке $x$.

%  Входные параметры:
%    calcfg -- имя функции calcfg(x) для вычисления f и g
%    x  -- начальная точка x0(1:n) (на выходе портится)
%    alpha -- коэффициент растяжения пространства
%    h0, nh, q1, q2 -- параметры адаптивной регулировки шага
%    epsx, epsg, maxitn -- параметры останова

%  Выходные параметры:
%    xr -- найденная точка минимума xr(n)
%    fr -- значение функции в точке минимума
%    itn -- число затраченных итераций
%    ncalls -- число вызовов функции calcfg
%    istop -- код останова (2=epsg,3=epsx,4=maxitn,5=error)
```

Код octave-функции ralgb5 (Стецюк, 2011)

```
function [xr,fr,itn,ncalls,istop]=ralgb5(calcfg,x,alpha,h0,q1,
                                         q2,nh,epsg,epsx,maxitn);
itn=0; hs=h0; B=eye(length(x)); xr=x;                    # row001
ncalls = 1; [fr,g0] = calcfg(xr);                         # row002
printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n",  # row003
       itn, fr, fr, 0, ncalls);
if(norm(g0) < epsg) istop = 2;  return; endif            # row004
for (itn = 1:maxitn)                                      # row005
   dx = B * (g1 = B' * g0)/norm(g1);                      # row006
   d = 1; ls = 0; ddx = 0;                                # row007
   while (d > 0)                                          # row008
      x -= hs * dx; ddx += hs * norm(dx);                 # row009
      ncalls ++; [f, g1] = calcfg(x);                     # row010
      if (f < fr)  fr = f; xr = x; endif                  # row011
      if(norm(g1) < epsg) istop = 2;  return; endif       # row012
      ls ++; (mod(ls,nh)==0) && (hs *= q2);               # row013
      if(ls > 500) istop = 5;  return; endif              # row014
      d = dx' * g1;                                       # row015
   endwhile                                               # row016
   (ls == 1) && (hs *= q1);                               # row017
   printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n", # row018
          itn, f, fr, ls, ncalls);
   if(ddx < epsx) istop = 3;  return; endif               # row019
   xi = (dg = B' * (g1 - g0) )/norm(dg);                  # row020
   B += (1 / alpha - 1) * B * xi * xi';                   # row021
   g0 = g1;                                               # row022
endfor                                                    # row023
istop = 4;                                                # row024
endfunction
```

Выбор параметров для ralgb5

При минимизации негладких функций рекомендуется:

$$\alpha = 2 \div 3,\ h_0 = 1.0,\ q_1 = 1.0,\ q_2 = 1.1 \div 1.2,\ n_h = 2 \div 3.$$

Если известна априорная оценка расстояния от начальной точки x_0 до точки минимума x^*, то начальный шаг h_0 целесообразно выбирать порядка $\|x_0 - x^*\|$.
При минимизации гладких функций рекомендуется

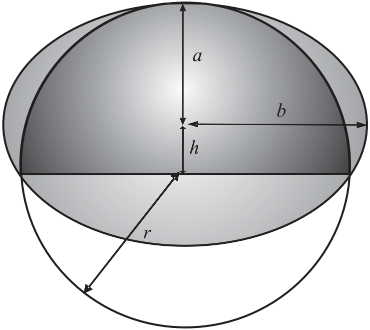
$$q_1 = 0.8 \div 0.95.$$

При таком выборе параметров, как правило, число спусков по направлению редко превосходит два, а за n шагов точность по функции улучшается в три-пять раз.

Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

Метод эллипсоидов Юдина-Немировского-Шора



Эллипсоид $\mathcal{E}_n$, содержащий полушар в E^n, имеет минимальный обьем, если

$$a = \frac{n}{n+1} r,\ \ b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} r,\ \ h = \frac{1}{n+1} r.$$

Чтобы преобразовать $\mathcal{E}_n$ в шар нужно растянуть пространство с коэффициентом $\alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$.

На каждой итерации МЭ объем эллипсоида уменьшается в

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{a}{r}\left(\frac{b}{r}\right)^{n-1} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n \approx 1 - \frac{1}{2n},$$

Актуально и сегодня

Н.З.Шор, В.И.Гершович, 1982

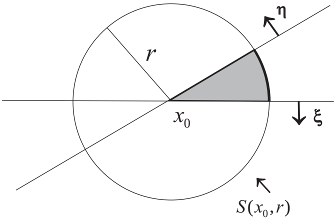
„Теория всего класса алгоритмов с растяжением пространства далека от совершенства. Нам кажется достаточно реалистичной целью – построение такого алгоритма, который по своей практической эффективности не уступал бы r-алгоритму и был столь же хорошо обоснован как метод эллипсоидов“.

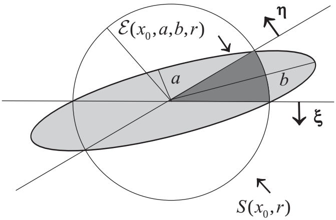
Одна из попыток использует антиовражный прием, близкий к тому, который имеет место в r-алгоритмах.

Содержание

1. О двух идеях Н.З. Шора
   - Субградиентный метод (1962)
   - Преобразование пространства (1969)
2. r-алгоритмы Шора–Журбенко
   - История и идея
   - Теоретические результаты
   - Практические результаты
3. r-алгоритмы и эллипсоиды
   - Метод эллипсоидов и r-алгоритмы
   - Эллипсоид за два растяжения

Тело W и Специальный эллипсоид





Тело W получено как пересечение шара и двух полупространств.

Специальный эллипсоид содержит W и имеет минимальный объем.

Стецюк П.И. r-алгоритмы и эллипсоиды // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113–134.

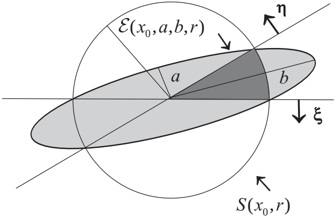
Свойства Специального эллипсоида

1. Если угол φ между векторами ξ и η тупой, то эллипсоид содержит тело W. Объем эллипсоида меньше, чем объем шара, и это уменьшение равно

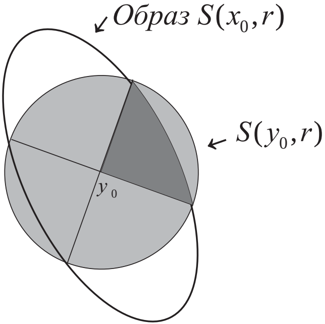
$$\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}=\sqrt{1-(\cos\varphi)^2}.$$

2. Преобразовать эллипсоид в шар можно растяжением пространства в направлении $\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}$ с коэффициентом $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}}$ и сжатием пространства в ортогональном направлении $\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}$ с коэффициентом $\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}}$.

Эллипсоид до и после растяжения



Специальный эллипсоид



в дважды растянутом пространстве становится шаром

Одноранговый эллипсоидальный оператор (ОЭО)

ОЭО есть линейный оператор

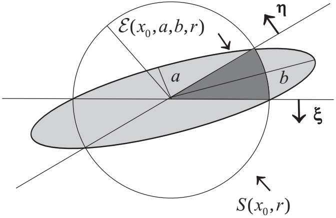
$$T_1(\xi,\eta) = I - \frac{1}{1-(\xi,\eta)^2}\left(\left(1-\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}\right)\eta - (\xi,\eta)\xi\right)\eta^T, \quad (9)$$

действующий из R^n в R^n. Здесь $\xi,\eta \in R^n$ – векторы, такие что $\|\xi\| = 1, \|\eta\| = 1$ и $(\xi,\eta)^2 \neq 1$, I – единичная $n \times n$-матрица.

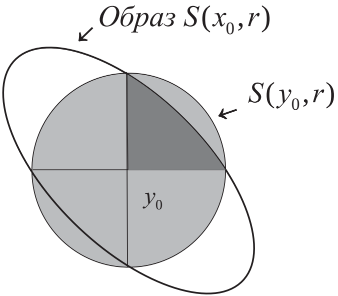
Стецюк П.И. Ортогонализующие линейные операторы в выпуклом программировании (Часть I) // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 3. – С.97–119.

ОЭО преобразует в шар Специальный эллипсоид, описанный вокруг тела W, которое получено в результате пересечения шара и двух полупространств, проходящих через центр шара. Он в два раза экономнее, чем последовательные растяжения.

Эллипсоид до и после преобразования



Специальный эллипсоид



в преобразованном пространстве становится шаром

Близость к r-алгоритмам

В преобразованном пространстве эллипсоид станет шаром, а образы векторов ξ и η будут ортогональными.

Это позволяет “расширить” конус подходящих направлений убывания функции для субградиентного процесса в преобразованном пространстве переменных, аналогично тому как это делается в r-алгоритмах.

Растяжение пространства реализуется в направлении разности двух нормированных субградиентов и близким к направлению разности двух субградиентов оно будет только тогда, когда нормы субградиентов близки.

Заключение или **Актуально и сегодня**

Н.З.Шор, В.И.Гершович, 1982

„Теория всего класса алгоритмов с растяжением пространства далека от совершенства. Нам кажется достаточно реалистичной целью – построение такого алгоритма, который по своей практической эффективности не уступал бы r-алгоритму и был столь же хорошо обоснован как метод эллипсоидов“.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!