Оптимальный 2d-эллипсоид и растяжение пространства по разности нормированных субградиентов

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

VIII-а міжнародна школа-семінар "Теорія прийняття рішень",
26 вересня – 1 жовтня 2016 року, м. Ужгород, Україна

Outline

Outline

Оператором растяжения пространства

называют оператор $R_\alpha(\xi)$, который имеет вид

$$R_\alpha(\xi) = I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^T,$$

где: I_n – единичная матрица размером $n \times n$;
$\alpha > 1$ – коэффициент растяжения пространства
в нормированном направлении $\xi \in E^n$, $\|\xi\| = 1$.

Здесь:

E^n – евклидово пространство со скалярным
произведением (x, y) для $x \in E^n$ и $y \in E^n$.

Матрица B (обратное преобразование)

В методах используется обратный к $R_\alpha(\xi)$ оператор

$$R_\beta(\xi) = I_n + (\beta - 1)\xi\xi^T, \quad \text{where} \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1,$$

который означает "сжатие" пространства субградиентов.

Матрица B пересчитывается по формуле

$$B_{k+1} = B_k * R_{\beta_k}(\xi_k) = B_k + (\beta_k - 1)(B_k\xi)\xi^T$$

и требует $\approx 2n^2$ операций умножения

Лемма 1 (Stetsyuk, OPTIMA 2014)

Пусть B_k – $n\times n$*-матрица, такая что* $\|B_k^{-1}(x_k-x^*)\|\le r$*;* g_1 *и* g_2 – n*-мерные векторы, такие что* $(x_k-x^*,g_1)\ge 0$ *и* $(x_k-x^*,g_2)\ge 0$*. Если* $-\|B_k^T g_1\|\|B_k^T g_2\| < (B_k^T g_1, B_k^T g_2) < 0$ *и матрица* B_{k+1} *вычисляется по формуле*

$$B_{k+1}=B_k R_{\beta_1}\left(\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}\right) R_{\beta_2}\left(\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}\right), \; \xi=\frac{B_k^T g_1}{\|B_k^T g_1\|}, \eta=\frac{B_k^T g_2}{\|B_k^T g_2\|},$$

где $\beta_1=\sqrt{1+(\xi,\eta)}$ *и* $\beta_2=\sqrt{1-(\xi,\eta)}$*, то матрица* B_{k+1} *имеет следующие свойства: (i)* $\|B_{k+1}^{-1}(x_k-x^*)\|\le r$*; (ii)* $\det(B_{k+1})=\det B_k\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}$*; (iii)* $(B_{k+1}^T g_1, B_{k+1}^T g_2)=0$*.*

Об интерпретации леммы 1

Имеются:

(1) локализация точки x^* в эллипсоиде $\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$;
(2) g_1 и g_2 – нормали отсекающих гиперплоскостей в x_k;
(3) тупой угол φ_k между нормалями в $Y_k = A_k X = B_k^{-1} X$.

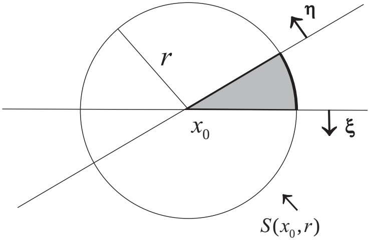
После растяжения по „разности нормалей“

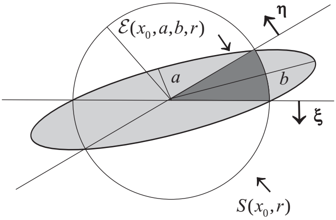
получаем:

(i) локализацию x^* в эллипсоиде $\|B_{k+1}^{-1}(x_k - x^*)\| \leq r$;
(ii) меньший в $1/\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_k}$ раз объем эллипсоида;
(iii) ортогональные нормали в $Y_{k+1} = A_{k+1} X = B_{k+1}^{-1} X$.

Outline

Тело W и 2d-эллипсоид





Тело W получено как пересечение шара и двух полупространств.

2d-эллипсоид содержит W и имеет минимальный объем.

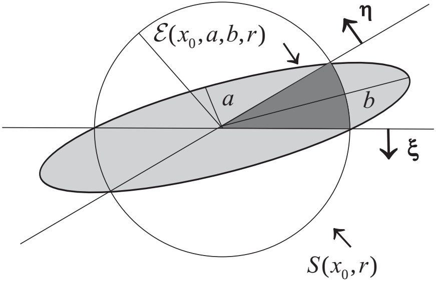
Стецюк П.И. r-алгоритмы и эллипсоиды // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113–134.

Свойства 2d-эллипсоида

(i) Если угол φ между векторами ξ и η тупой, то 2d-эллипсоид содержит тело W.

(ii) Объем 2d-эллипсоида меньше, чем объем шара, и это уменьшение равно $\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}=\sqrt{1-(\cos\varphi)^2}$.

Преобразование 2d-эллипсоида в шар



требует растяжения

в направлении $\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}$

с коэф. $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}} > 1$

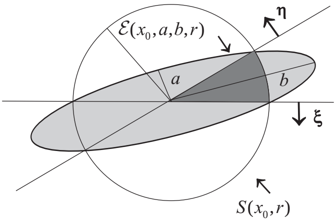
и последующего сжатия

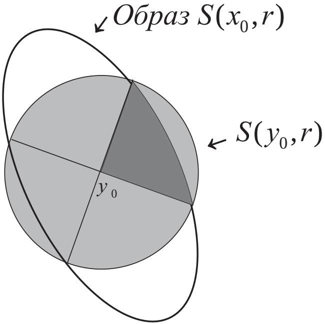
в направлении $\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}$

с коэф. $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}} < 1.$

$$q = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}(x_0,a,b,r))}{\mathrm{vol}(S(x_0,r))} = \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right) = \sqrt{1-(\xi,\eta)^2}.$$

2d-эллипсоид до и после преобразования





2d-эллипсоид

в преобразованном пространстве становится шаром

Outline

Близость к r-алгоритмам

(iii) в преобразованном пространстве эллипсоид станет шаром, а образы векторов ξ и η будут ортогональными.

Это позволяет "расширить" конус подходящих направлений убывания функции для субградиентного процесса в преобразованном пространстве переменных, аналогично тому как это делается в r-алгоритмах.

- Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С.51–59.
- Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979.

Коэффициент растяжения в направлении

разности двух нормированных субградиентов равен

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{1-(\xi,\eta)}}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}} = \sqrt{1 - \frac{2(\xi,\eta)}{1+(\xi,\eta)}}$$

если $(\xi,\eta) = -1/2$, **то** $\alpha = \sqrt{3}$,
если $(\xi,\eta) = -\sqrt{2}/2$, **то** $\alpha = 1+\sqrt{2}$,
если $(\xi,\eta) = -9/10$, **то** $\alpha = \sqrt{19}$,
если $(\xi,\eta) = -99/100$, **то** $\alpha = \sqrt{199}$, . . .

Outline

ОЭО (Одноранговый Эллипсоидальный Оператор)

ОЭО есть линейный оператор

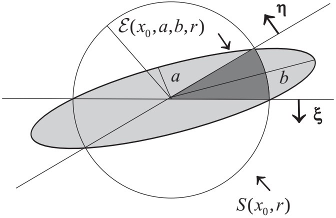
$$T_1(\xi,\eta) = I - \frac{1}{1-(\xi,\eta)^2}\left(\left(1-\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}\right)\eta - (\xi,\eta)\xi\right)\eta^T, \quad (1)$$

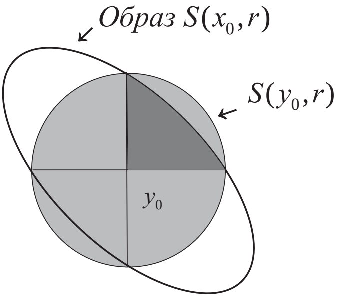
действующий из E^n в E^n. Здесь $\xi,\eta \in E^n$ – векторы, такие что $\|\xi\| = 1, \|\eta\| = 1$ и $(\xi,\eta)^2 \neq 1$, I – единичная $n\times n$-матрица.

Стецюк П.И. Ортогонализующие линейные операторы в выпуклом программировании (Часть I) // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 3. – С.97–119.

ОЭО преобразует в шар 2d-эллипсоид, описанный вокруг тела W, которое получено в результате пересечения шара и двух полупространств, проходящих через центр шара.

2d-эллипсоид до и после преобразования

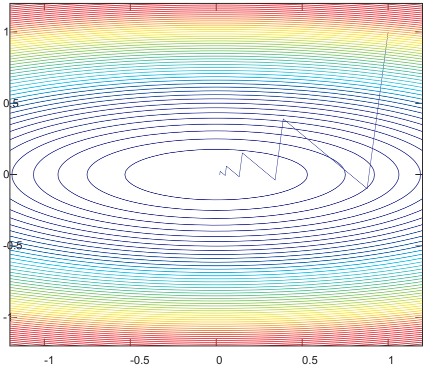




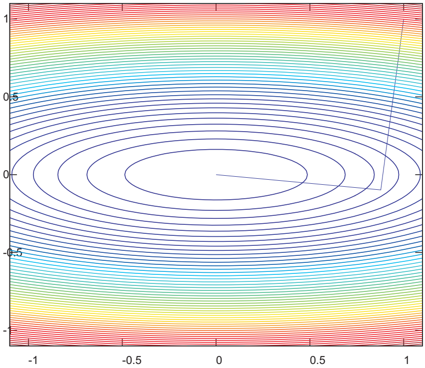
2d-эллипсоид

в преобразованном пространстве становится шаром

Пример 1 (квадратичная функция)

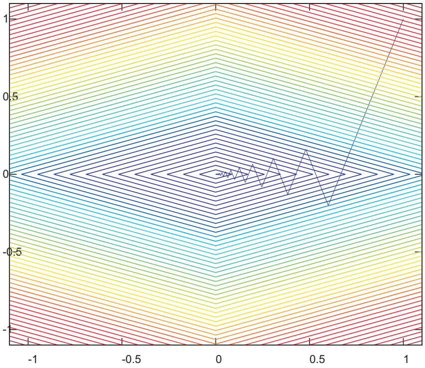


1.1 Траектория метода Поляка

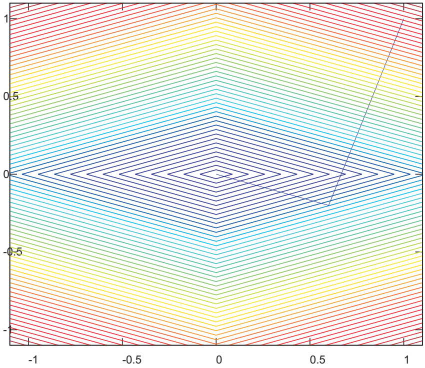


1.2 Траектория метода amsg2

Пример 2 (кусочно линейная функция)

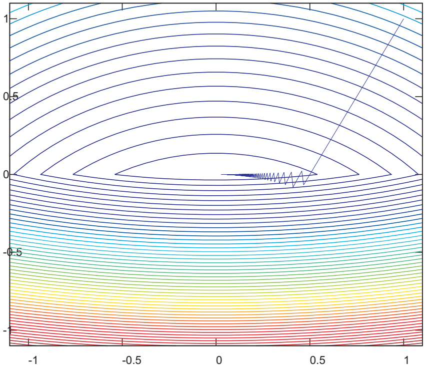


2.1 Траектория метода Поляка

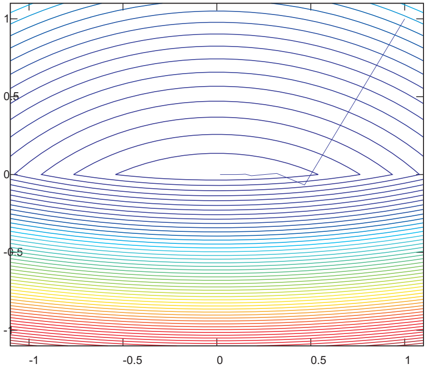


2.2 Траектория метода amsg2

Пример 3 (кусочно квадратичная функция)



3.1 Траектория метода Поляка



3.2 Траектория метода amsg2

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!