

2D-ЭЛЛИПСОИД И r -АЛГОРИТМЫ

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев

4-ая Международная научная конференция "Математическое
моделирование, оптимизация и информационные технологии"
25–28 марта 2014, г. Кишинэу (АТИК)

Содержание

- 1 r -алгоритмы и эллипсоиды
- 2 2d-эллипсоид и r -алгоритмы
- 3 Как 2d-эллипсоид ускоряет метод Поляка?

Содержание

- 1 r -алгоритмы и эллипсоиды
- 2 2d-эллипсоид и r -алгоритмы
- 3 Как 2d-эллипсоид ускоряет метод Поляка?

Актуально и сегодня ...

„Теория всего класса алгоритмов с растяжением пространства далека от совершенства. Нам кажется достаточно реалистичной целью – построение такого алгоритма, который по своей практической эффективности не уступал бы r -алгоритму и был столь же хорошо обоснован как метод эллипсоидов" [*].

*. Гершович В.И., Шор Н.З. *Метод эллипсоидов, его обобщения и приложения.* // Кибернетика, 1982, № 5.

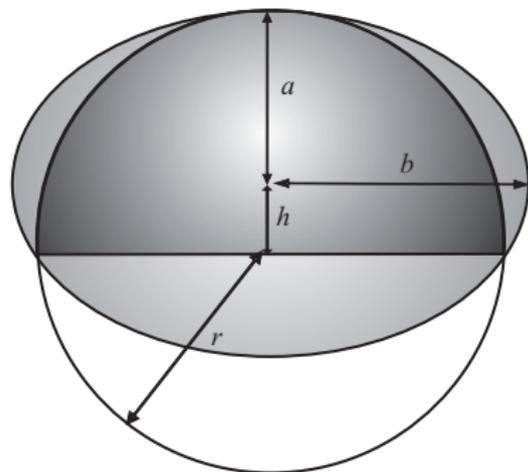
Метод эллипсоидов Юдина-Немировского-Шора

Метод эллипсоидов – частный случай методов с растяжением пространства в направлении субградиента.

 ШОР Н.З.(1977) Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – №1. – С. 94-95.

Первыми метод эллипсоидов предложили Д. Юдин и А. Немировский, исходя из методов последовательных отсечений.

 Юдин Д.Б., НЕМИРОВСКИЙ А.С.(1976)
Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач // Экономика и мат. методы. – Вып.2. – С. 357-369.

1d-эллипсоид \mathcal{E}_n в методе эллипсоидов

Эллипсоид \mathcal{E}_n , содержащий полушар в E^n , имеет минимальный объем, если

$$a = \frac{n}{n+1}r, \quad b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}r, \quad h = \frac{1}{n+1}r.$$

Чтобы преобразовать \mathcal{E}_n в шар нужно растянуть пространство с коэффициентом $\alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$.

На каждой итерации МЭ объем эллипсоида уменьшается в

$$q(n) = \frac{\text{vol}(\mathcal{E}_n)}{\text{vol}(S_n)} = \frac{a}{r} \left(\frac{b}{r}\right)^{n-1} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n \approx 1 - \frac{1}{2n},$$

r -алгоритмы и эллипсоиды (Стецюк, 1996)

Попытка объяснить r -алгоритмы сделана в статье



СТЕЦЮК П.И. r -алгоритмы и эллипсоиды // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113–134.

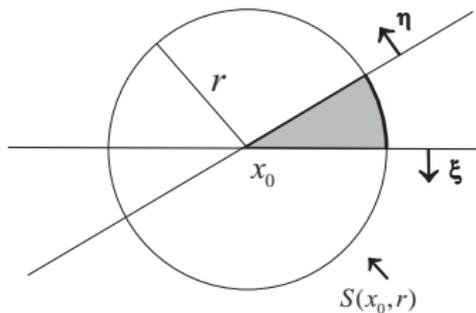
Здесь для преобразования специального эллипсоида в шар использует антио вражный прием, близкий к тому, который имеет место в r -алгоритмах.

Растяжение пространства реализуется в направлении разности двух нормированных субградиентов и близким к направлению разности двух субградиентов оно будет только тогда, когда нормы субградиентов близки.

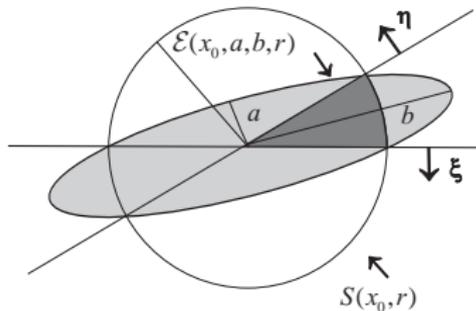
Содержание

- 1 r -алгоритмы и эллипсоиды
- 2 2d-эллипсоид и r -алгоритмы
- 3 Как 2d-эллипсоид ускоряет метод Поляка?

Тело W и 2d-эллипсоид



Тело W получено как пересечение шара и двух полупространств.

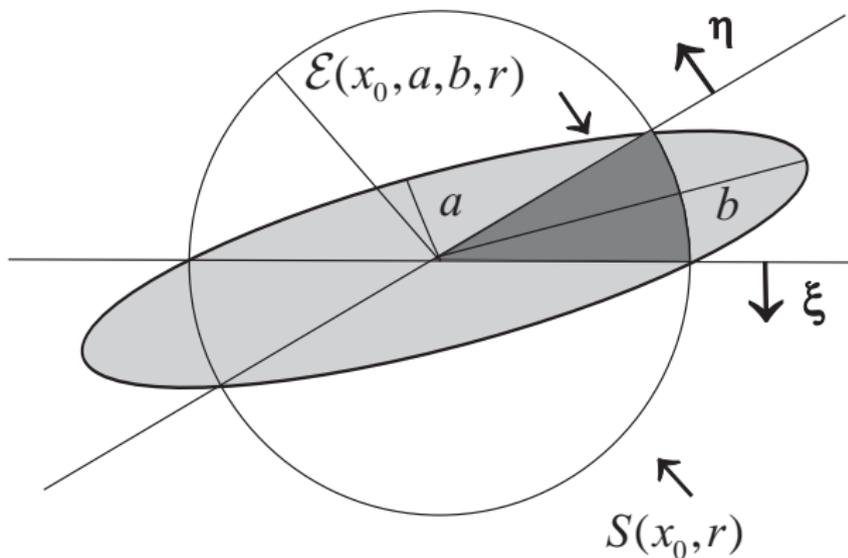


2d-эллипсоид содержит W и имеет минимальный объем.



СТЕЦЮК П.И. r -алгоритмы и эллипсоиды // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113–134.

2d-эллипсоид

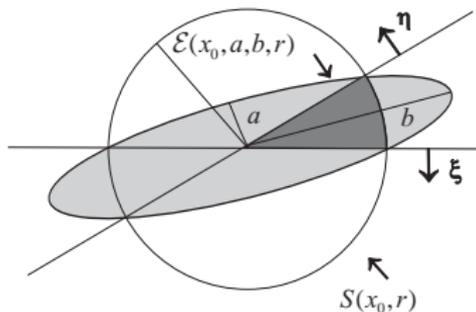


2d-эллипсоид содержит W и имеет минимальный объем.

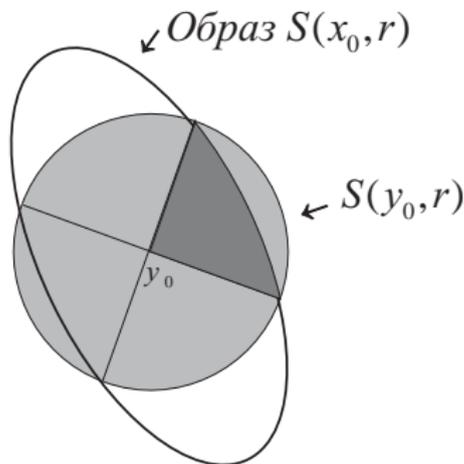
Свойства 2d-эллипсоида

1. Если угол φ между векторами ξ и η тупой, то 2d-эллипсоид содержит тело W .
2. Объем 2d-эллипсоида меньше, чем объем шара, и это уменьшение равно $\sqrt{1 - (\xi, \eta)^2} = \sqrt{1 - (\cos \varphi)^2}$.
3. Преобразовать 2d-эллипсоид в шар можно растяжением пространства в направлении $\frac{\xi - \eta}{\|\xi - \eta\|}$ с коэффициентом $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\xi, \eta)}}$ и сжатием пространства в ортогональном направлении $\frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|}$ с коэффициентом $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi, \eta)}}$. Но экономнее это сделать с помощью ОЭО.

2d-эллипсоид до и после двух растяжений



2d-эллипсоид в



растянутом пространстве
становится шаром

ОЭО (Одноранговый Эллипсоидальный Оператор)

ОЭО есть линейный оператор

$$T_1(\xi, \eta) = I - \frac{1}{1 - (\xi, \eta)^2} \left(\left(1 - \sqrt{1 - (\xi, \eta)^2} \right) \eta - (\xi, \eta) \xi \right) \eta^T, \quad (1)$$

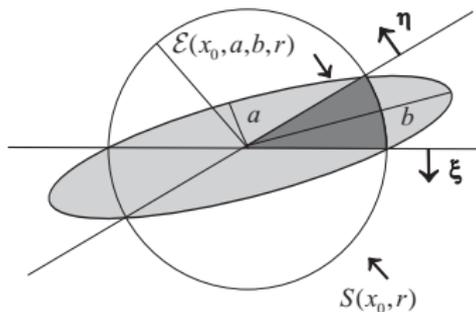
действующий из R^n в R^n . Здесь $\xi, \eta \in R^n$ – векторы, такие что $\|\xi\| = 1, \|\eta\| = 1$ и $(\xi, \eta)^2 \neq 1$, I – единичная $n \times n$ -матрица.



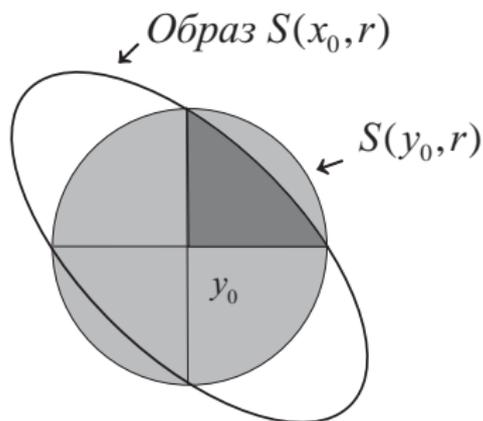
СТЕЦЮК П.И. Ортогонализирующие линейные операторы в выпуклом программировании (Часть I) // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 3. – С.97–119.

ОЭО преобразует в шар 2d-эллипсоид, описанный вокруг тела W , которое получено в результате пересечения шара и двух полупространств, проходящих через центр шара.

2d-эллипсоид до и после преобразования



2d-эллипсоид



в преобразованном
пространстве становится
шаром

Близость к r -алгоритмам

В преобразованном пространстве эллипсоид станет шаром, а образы векторов ξ и η будут ортогональными.

Это позволяет “расширить” конус подходящих направлений убывания функции для субградиентного процесса в преобразованном пространстве переменных, аналогично тому как это делается в r -алгоритмах.

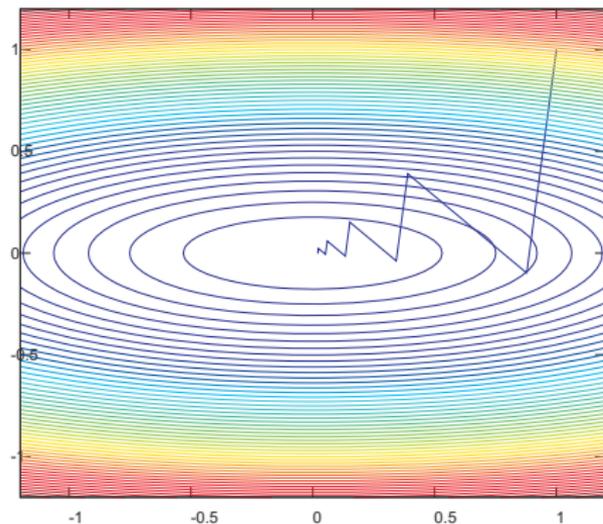
 ШОР Н.З., ЖУРВЕНКО Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С.51–59.

 ШОР Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979.

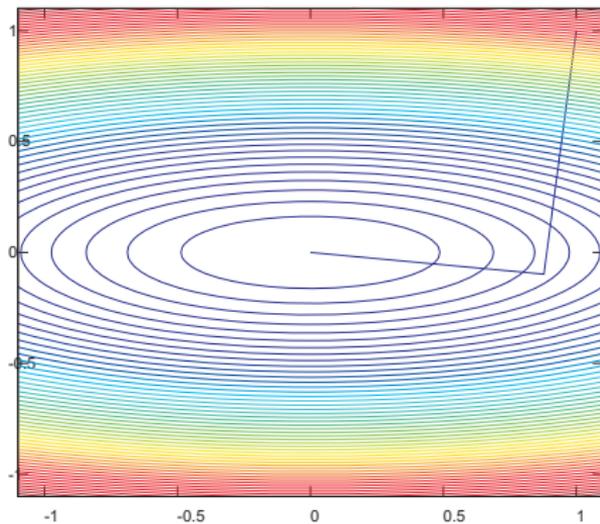
Содержание

- 1 r -алгоритмы и эллипсоиды
- 2 2d-эллипсоид и r -алгоритмы
- 3 Как 2d-эллипсоид ускоряет метод Поляка?

Пример 1 (квадратичная функция)

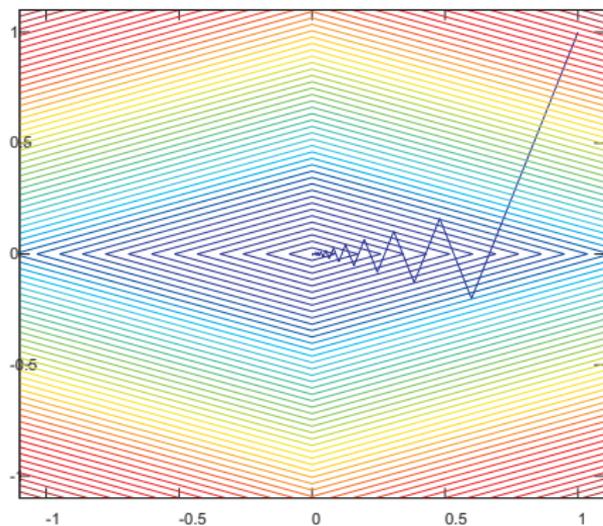


Метод Поляка

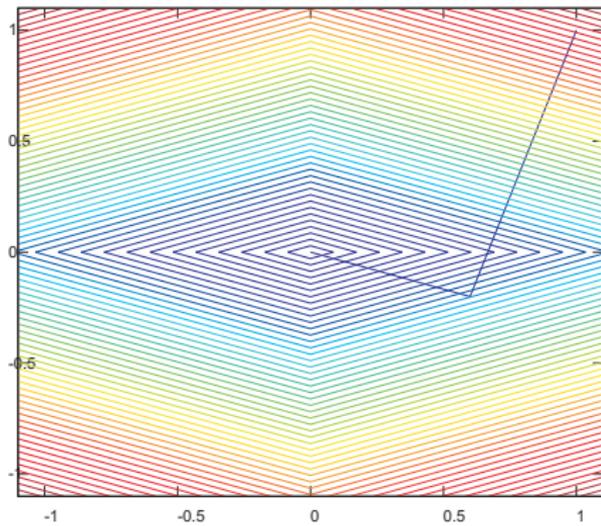


Метод amsg2

Пример 2 (кусочно-линейная функция)

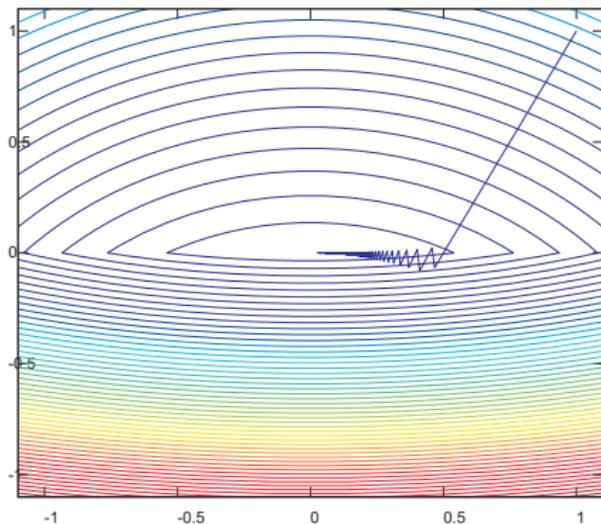


Метод Поляка

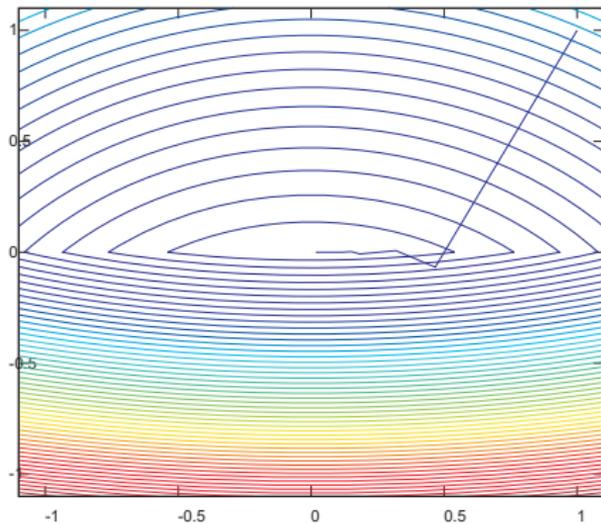


Метод amsg2

Пример 3 (кусочно-квадратичная функция)



Метод Поляка



Метод amsg2

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!