БУЛЕВА ЗАДАЧА ДЛЯ НАЙКОРОТШОГО k-ВЕРШИННОГО ЦИКЛУ У ПОВНОМУ ГРАФІ

Стецюк П.І.
stetsyukp@gmail.com

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, Київ

XXI Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015)"
24–25 вересня 2015 р, м. Львів

Зміст

Зміст

Що таке k-вершинний цикл?

Задані:

$D_{n,n}$ – повний граф, де n – кількість вершин
$d_{ij} > 0$ – відстань між вершинами i та j, $i \neq j$
s – вершина, в якій починається та завершується цикл

k-вершинний цикл $(1 \leq k \leq n-1)$

це цикл, який проходить через k вершин графа $D_{n,n}$ (вершина s не враховується)

$(n-1)$-вершинний цикл є гамільтоновим циклом

(проходить через усі вершини графа $D_{n,n}$)

Булеві та неперервні змінні

булеві змінні: $n(n-1) \quad + \quad (n-1)$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо дуга } (i,j) \text{ включається в цикл,} \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо цикл проходить через вершину } i, \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

неперервні змінні: $n(n-1)$

z_{ij} – величина потоку від вершини i до вершини j

Зміст

Формулювання задачі (продовження буде)

знайти

$$d_k^* = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1, j \neq s}^{n} x_{sj} = 1, \qquad \sum_{j=1, j \neq s}^{n} x_{js} = 1, \tag{2a}$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ij} = y_i, \qquad \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ji} = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n : i \neq s, \tag{2b}$$

$$\sum_{i=1, i \neq s}^{n} y_i = k, \tag{3}$$

Формулювання задачі (продовження)

$$z_{ij} - kx_{ij} \leq 0, \quad i,j = 1,\ldots,n, i \neq j, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{sj} = k, \quad \sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{js} = 0, \tag{5a}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} = -y_i, \quad i = 1,\ldots,n : i \neq s, \tag{5b}$$

$$y_i = 0 \vee 1, i = 1,\ldots,n : i \neq s, \tag{6a}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i,j = 1,\ldots,n : i \neq j \tag{6b}$$

Характеристика задачі

Задача (1)-(6)

є задачею змішаного булевого лінійного програмування.

Вона має

$2n^2-n-1$ змінних: булевих n^2-1, неперервних $n(n-1)$,

та

n^2+2n+1 обмежень: рівностей $3n+1$, нерівностей $n(n-1)$.

Зміст задачі (1)–(6)

Мінімізація цільової лінійної функції в (1) відповідає

знаходженню k-вершинного циклу мінімальної довжини d_k^*

Лінійні обмеження (2)–(6)

описують усі можливі цикли з вершини s, які проходять через k вершин графа $D_{n,n}$ (вершина s не враховується)

Детальніше про обмеження (2)–(5)

Обмеження (2) та (3):

Обмеження (3) задає k вершин, через які проходить цикл з вершини s (для них $y_i = 1$). Для цих k вершин та для вершини s обмеження (2) описують одноразовий вхід у вершину та одноразовий вихід з вершини.

Обмеження (4) та (5):

Обмеження (4) гарантують перевезення продукту між вершинами i та j тільки тоді, якщо $x_{ij} = 1$.
Обмеження (5) означають, що з вершини s потрібно розвести k одиниць продукту, залишаючи в кожній з вершин циклу рівно одну одиницю продукту.

Вони забезпечують зв'язність k-вершинного циклу

Частковий випадок задачі (1)–(6)

Якщо $k = n - 1$,

то отримуємо задачу для найкоротшого гамільтонового циклу, яка рівносильна відомій задачі комівояжера [1].

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М: Мир, 1978. – 432 с.

Зміст

Формулювання задачі (продовження буде)

знайти

$$d^* = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{7}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad i = 1, \ldots, n : i \neq s, \tag{8}$$

Формулювання задачі (продовження)

$$z_{ij} - (n-1)x_{ij} \le 0, \quad i,j = 1,\dots,n : i \ne j, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1, j\ne s}^{n} z_{sj} = n-1, \qquad \sum_{j=1, j\ne s}^{n} z_{js} = 0, \tag{10a}$$

$$\sum_{j=1, j\ne i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\ne i}^{n} z_{ji} = -1, \quad i = 1,\dots,n : i \ne s, \tag{10b}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \ge 0, \quad i,j = 1,\dots,n : i \ne j \tag{11}$$

Задача (7)-(11) співпадає

з формулюванням задачі комівояжера в [2], стор. 46.

2. *Алексеева Е.В.* Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Е.В. Алексеева. – Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 131 с.

Роль обмежень (8)–(11) в задачі комівояжера

Обмеження (8)–(11)

описують усі можливі гамільтонові цикли у графі $D_{n,n}$

Обмеження (8)

забезпечують одноразовий вхід у вершину та одноразовий вихід з вершини (для всіх n вершин).

Обмеження (9) та (10)

забезпечують зв'язність гамільтонового циклу за рахунок перевезення $(n-1)$ одиниць продукту з вершини s, залишаючи в кожній з інших вершин циклу рівно одну одиницю продукту.
Вони дозволяють уникнути підциклів в задачі комівояжера.

Зміст

Про складність задач (1)–(6) та (7)–(11)

Задача знаходження найкоротшого k-вершинного циклу складніша, ніж задача знаходження найкоротшого гамільтонового циклу.

Це обумовлено тим, що потрібно визначити підмножину вершин, для якої буде знайдено гамільтонів підцикл.

Це підтверджують розрахунки для семи задач комівояжера з бібліотеки **TSPLIB**. Проводилися на **NEOS**-сервері за допомогою програми **gurobi 5.5.0** [3].

Програма gurobi для задач з бібліотеки TSPLIB

Задача	n	d^*	$t(sec)$		k	d_k^*	$t(sec)$
st70.tsp	70	675	14.33	+	35	268	23.58
eil76.tsp	76	538	11.29	–	38	219	11.55
kroA100.tsp	100	21282	105.80	–	50	9427	1194.46
kroB100.tsp	100	22141	75.27		50	9307	752.97
kroD100.tsp	100	21294	221.15	+	50	8929	1268.61
kroE100.tsp	100	22068	118.21		50	9312	644.35
eil101.tsp	101	629	29.57	–	50	232	133.16

Результати розв'язання задачі (1)–(6)

при $k=n-1$ (задача комівояжера) – в колонках 3, 4 та 5,
при $k = n/2$ та $s = 1$ – в колонках 6, 7, 8.

Що видно із таблиці?

Задача	n	d^*	$t(sec)$		k	d_k^*	$t(sec)$
st70.tsp	70	675	14.33	+	35	268	23.58
eil76.tsp	76	538	11.29	−	38	219	11.55
kroA100.tsp	100	21282	105.80	−	50	9427	1194.46
kroB100.tsp	100	22141	75.27		50	9307	752.97
kroD100.tsp	100	21294	221.15	+	50	8929	1268.61
kroE100.tsp	100	22068	118.21		50	9312	644.35
eil101.tsp	101	629	29.57	−	50	232	133.16

Знаходження k-вершинного циклу вимагає більших витрат по часу, ніж задача комівояжера. Так, наприклад, для графа **kroA100.tsp** вони більші в десять разів.

Висновки:

1. Сформульована задача змішаного булевого лінійного програмування для найкоротшого циклу через задану кількість вершин повного графа.
2. Частковий випадок дає формулювання задачі для знаходження найкоротшого гамільтонового циклу.
3. Наведено результати для тестових задач комівояжера з бібліотеки TSPLIB.

Посилання:

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М: Мир, 1978. – 432 с.

2. *Алексеева Е.В.* Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Е.В. Алексеева. – Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 131 с.

3. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014, http://www.gurobi.com

Подяки

Робота виконана при фінансовій підтримці НАН України (проекти № 0113U003146 та № 0112U002251).

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!