# МЕТОД ЭЛЛИПСОИДОВ С БЕРЕГОВ ДНЕПРА

Стецюк П.И.
*stetsyukp@gmail.com*

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев

XV Міжнародна науково-практична конференція
"Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем"
22–24 листопада 2017 року, м. Дніпро

# Содержание

# Содержание

# Метод эллипсоидов предложили

1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений [1].

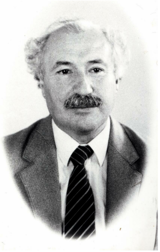
1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента [2].

1. Юдин Д.Б., Немировский А.С. *Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач* // Экономика и математические методы. – 1976. – Вып. 2. – С. 357–369.

2. Шор Н.З. *Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования* // Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.

# Почему „с берегов Днепра“?

Давид Борисович Юдин
родился 21 мая 1919 года
в Екатеринославе (сегодня - Днепр),
в 1941 году закончил
Днепропетровский университет

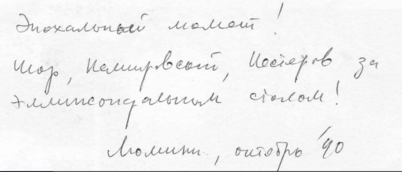


Наум Зуселевич Шор
родился 1 января 1937 года
в Киеве (город на Днепре),
в 1958 году закончил
Киевский университет

# Эпохальный момент!

Шор,
Немировский,
Нестеров за
эллипсоидальным
столом!

октябрь 1990


Эпохальный момент!
Шор, Немировский, Нестеров за
эллипсоидальным столом!
Люмини, октябрь '90

# На основе метода эллипсоидов

1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами

1981 **Grötchel M., Lóvasz L., Schrijver A.** разработали полиномиальные алгоритмы для ряда задач дискретной оптимизации

# XI симпозиум по мат. программированию

**Метод эллипсоидов и полученные на его основе результаты о сложности задач математического программирования были центральными на XI международном симпозиуме по математическому программированию (Бонн, ФРГ, август 1982).**

3. Канторович Л.В., Михалевич В.С., Рубинштейн Г.Ш., Третьяков Н.В., Шор Н.З., Якимец В.Н. *XI Международный симпозиум по математическому программированию* // Техническая кибернетика. – М.: Изв. АН СССР. – 1983. – № 1. – С. 197–201.

# XI симпозиум (метод эллипсоидов)

## Три премии – им. Фалкерсона (1), им. Данцига (2):

**им. Фалкерсона:** Grötchel M., Lóvasz L., Schrijver A., **1981**
**им. Данцига:** Хачиян Л., **1979**
**им. Данцига:** Юдин Д., Немировский А., **1976**

## Пленарный доклад Шора:

"Generalized gradient methods of nondifferentiable optimization employing space dilatation operations опубликован в [4]

4. Mathematical Programming: the state of art, Bonn, 1982 / *Bachem A., Grötchel M., Korte B. (eds.)* – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – 655 p.

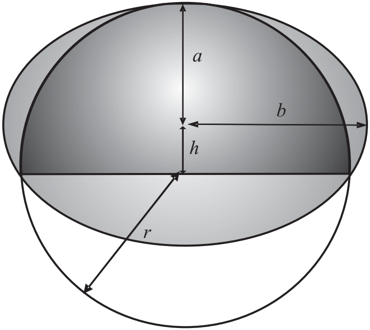
# Шор (1982) и Юдин (1983)

Шор в Бонне (1982)

Юдин в Риге (1983)

# Содержание

# 1-d эллипсоид и его свойства




Эллипсоид $\mathcal{E}_n$, содержащий полушар в $E^n$, имеет параметры

$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r}{2},$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$ и $r$ – радиус шара $S_n$.

Если пространство „растянуть" с коэффициентом $\alpha$ в направлении полуоси $a$, то $\mathcal{E}_n$ станет шаром в преобразованном пространстве.

**Отношение объема эллипсоида $\mathcal{E}_n$ к объему шара $S_n$ равно**

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

# Оператор растяжения пространства

## Введен Н.З. Шором (1969) и имеет следующий вид

$$R_\alpha(\xi) = I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \quad \text{где} \quad \alpha > 1.$$

Здесь: $\alpha$ – коэффициент растяжения пространства
в нормированном направлении $\xi \in E^n$, $\|\xi\| = 1$,
$I_n$ – единичная матрица размером $n \times n$.

## В методах используется обратный к нему оператор

$$R_\beta(\xi) = I_n + (\beta - 1)\xi\xi^T, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1,$$

который означает "сжатие"пространства субградиентов.

# Почему метод эллипсоидов сходится?

**Отношение объема эллипсоида $\mathcal{E}_n$ к объему шара $S_n$ равно**

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Если коэффициент $\alpha$ такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$, то отношение $q(n) < 1$ и объем эллипсоида, в котором локализуется искомая точка, убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(n)$.

# О двух вариантах метода эллипсоидов

## В методе эллипсоидов Юдина-Немировского-Шора

$$q(n) \le 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{и реализуется при} \quad \alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

## В приближенном методе эллипсоидов [5]

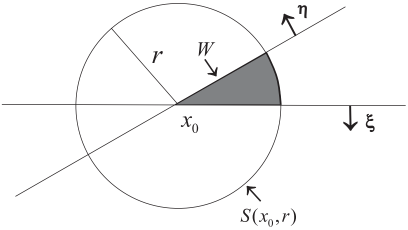
$$q(n) \approx 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{и реализуется при} \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}.$$

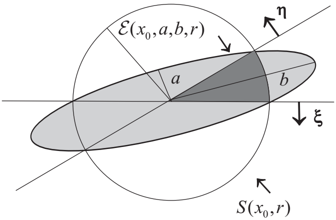
Если $n = 1$, то $q(1) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$.

5. Стецюк П.И. *Приближенный метод эллипсоидов* // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 141–146.

# Содержание

# Тело $W$ и 2d-эллипсоид



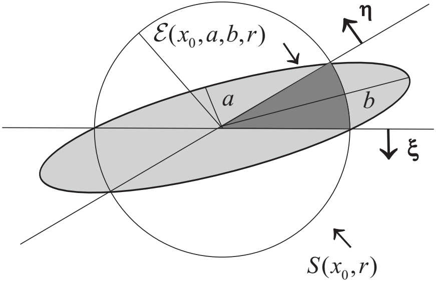




Тело $W$ получено как пересечение шара и двух полупространств.

2d-эллипсоид содержит $W$ и имеет минимальный объем.

6. Стецюк П.И. *$r$-алгоритмы и эллипсоиды* // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113–134.

# Преобразование 2d-эллипсоида в шар




требует растяжения

в направлении $\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}$

с коэф. $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}} > 1$

и последующего сжатия

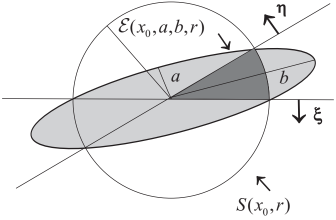
в направлении $\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}$

с коэф. $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}} < 1.$

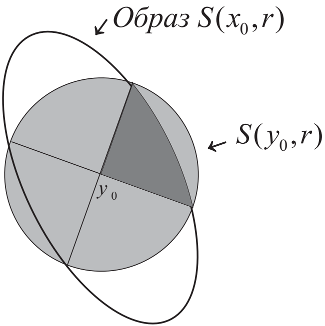
### Объем 2d-эллипсоида меньше, чем объем шара

$$q = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}(x_0,a,b,r))}{\mathrm{vol}(S(x_0,r))} = \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right) = \sqrt{1-(\xi,\eta)^2}.$$

# 2d-эллипсоид до и после преобразования




2d-эллипсоид




в преобразованном пространстве становится шаром

# Замечательное свойство 2d-эллипсоида

**В преобразованном пространстве**

„образы“ векторов $\xi$ и $\eta$ являются ортогональными

Это позволяет “расширить” конус подходящих направлений убывания функции для субградиентного процесса в преобразованном пространстве переменных [7], подобно тому, как это делается в $r$-алгоритмах Шора-Журбенко.

7. Стецюк П.И. *Методы эллипсоидов и $r$-алгоритмы.* – Кишинэу: Эврика, 2014. – 488 с.

# Содержание

# Уважаемая Елена Михайловна!

Поздравляем с Юбилеем!
А мы постараемся, чтобы для решения задач из [8] Вы вскоре смогли бы использовать не только $r$-алгоритмы, но и „методы эллипсоидов с берегов Днепра“.

8. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и $r$-алгоритмы.* – Киев, Наукова думка, 2015. – 400 с.

# Совет от ИК с „берегов Днепра“

## Теорема-2017: (Отдел 120 – Киселевой Е.М.)

В связи с тем, что для метода эллипсоидов Шора (1977) в 2017 году справедливы замечательные соотношения:

$$\alpha_{min} = \frac{2017 - 1937}{2017 - 1977} = \frac{80}{40} = 2,$$

$$\alpha_{max} = \frac{2017 - 1977}{1947 - 1937} = \frac{40}{10} = 4,$$

для $r$-алгоритмов рекомендуется использовать $\alpha \in [2, 4]$.

Здесь $\alpha$ – коэффициент растяжения пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов.

# Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!