Оптимізаційні Моделі для Балансування Мікроенергосистеми

Петро Стецюк, Ольга Хом'як

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Науковий семінар "Теорія оптимальних рішень"

28 жовтня 2025 року
Київ, Україна

Анотація

У доповіді представимо дві оптимізаційні моделі для балансування потужностями електроенергетичної системи з частковим та повним знеструмленням окремих магістральних вузлів електромережі. Моделі представлено задачами змішаного лінійного булевого програмування.

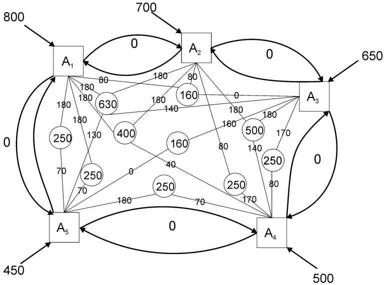
Оптимізаційні моделі відносяться

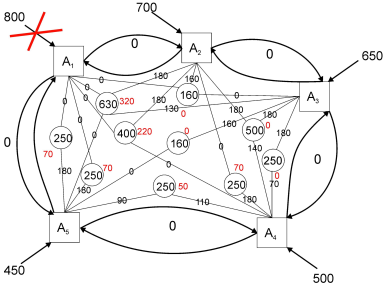
до класу моделей про мережевий потік мінімальної вартості з обмеженнями на пропускні здатності ребер.

План

Зміст

Звідки виникла задача?





[1] Каплун В., Гай О., Стецюк П., Івлічев А. Забезпечення оптимальних сценаріїв диспетчеризації регіональних енергосистем в умовах некерованого дефіциту потужності. Machinery & Energetics. 2023. 14(2).

Потоки потужності в мережі

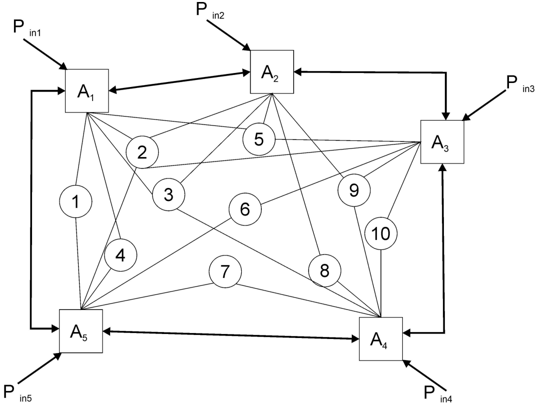


Рис. 1. Блок-схема потоків потужності в електроенергетичній системі

Розподіл потоків у мережі

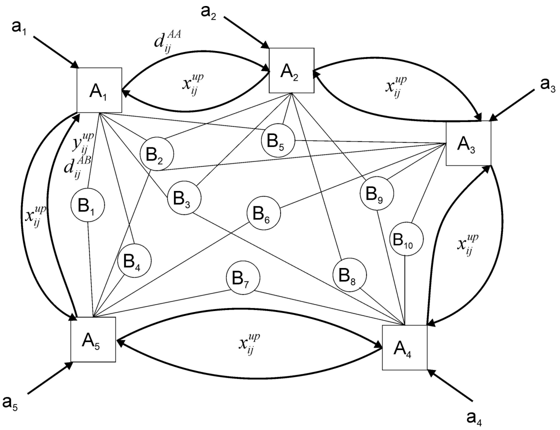


Рисунок 2. Графічна інтерпретація можливого розподілу потоків потужності в модельній електроенергетичній системі

Модельна задача: $x^{\mathrm{up}} = 800$, $y^{\mathrm{up}} = 180$

Node designation	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5					
Capacity, MVA	800	700	650	500	450					
Node designation	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
Capacity, MVA	250	630	400	250	160	160	250	250	500	250
Nodes	A_1A_2	A_2A_3	A_3A_4	A_4A_5	A_5A_1	A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3	A_1B_4	A_1B_5
Lengths L_i, km	85	90	110	140	95	13	7	9	15	20
Nodes	A_2B_2	A_2B_3	A_2B_5	A_2B_8	A_2B_9	A_3B_2	A_3B_5	A_3B_6	A_3B_9	A_3B_{10}
Lengths L_i, km	12	15	5	20	15	22	15	20	6	11
Nodes	A_4B_3	A_4B_7	A_4B_8	A_4B_9	A_4B_{10}	A_5B_1	A_5B_2	A_5B_4	A_5B_6	A_5B_7
Lengths L_i, km	25	18	6	17	10	7	17	3	18	13

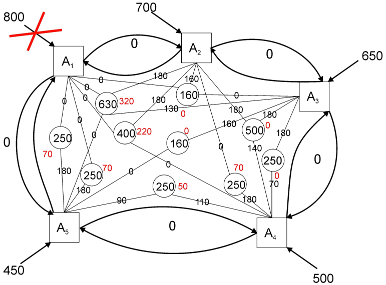
Таблиця 1. Параметри сегменту електроенергетичної схеми

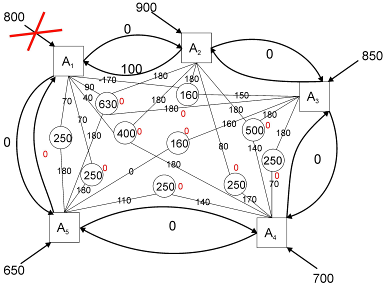
Два варіанти модельної задачі (2023)

Проведені в статті [1] розрахунки дозволили одержати направлені графи розподілу потоків енергії та значення ефективності цього розподілу за умови забезпечення нормальної роботи модельної електроенергетичної системи. Розглядався також варіант з повним знеструмленням вхідних ліній, що заживлюють вузол A1, але зі збереженням його робочого стану, при незмінності лімітів вузлів A2, A3, A4, A5.

[1] Каплун В., Гай О., Стецюк П., Івлічев А. Забезпечення оптимальних сценаріїв диспетчеризації регіональних енергосистем в умовах некерованого дефіциту потужності. Machinery & Energetics. 2023. 14(2).

Третій варіант модельної задачі (2023)





[1] Каплун В., Гай О., Стецюк П., Івлічев А. Забезпечення оптимальних сценаріїв диспетчеризації регіональних енергосистем в умовах некерованого дефіциту потужності. Machinery & Energetics. 2023. 14(2).

Розширення модельної задачі (2025)

В роботі [2] математична модель задачі оптимізації розширена на випадок часткового відключення вузла A_i та оптимального перерозподілу його потужності між іншими вузлами.

[2] Каплун В., Войтенко В., Стецюк П., Хом'як О. Балансування мікроенергосистем з адресним потокорозподілом потужності та мінімізацією втрат електроенергії. Збірник тез доповідей за матеріалами III міжнародної науково-практичної конференції «Цифрові технології в енергетиці і автоматиці». Київ, 6 червня 2025 р. С. 23-25.

Зміст

Постачальники та Споживачі

A – множина постачальників, B – множина споживачів,
n_A – кількість постачальників, n_B – кількість споживачів.

a_i^0 – наявний обсяг продукції постачальника $i \in A$,

Z_A – сумарний доданий обсяг продукції для постачальників,
z_i^{low} – нижня межа на доданий обсяг продукції для $i \in A$,
z_i^{up} – верхня межа на доданий обсяг продукції для $i \in A$

b_i^1 – критична продукція споживача $j \in B$,
b_i^2 – необхідна продукція споживача $j \in B$, $b_i^2 > b_i^1$

Зв'язки між Постачальниками та Споживачами

Нехай $E_{AA} \subset A \times A$ – множина ребер, яка задає зв'язки між постачальниками, а $E_{AB} \subset A \times B$ – множина ребер, яка задає зв'язки між постачальниками та споживачами, m_{AA} – кількість ребер E_{AA}, m_{AB} – кількість ребер E_{AB}.

Для кожного ребра ij задані вартості пересилання одиниці потоку (довжина ребра) $d_{ij}^{AA} = d_{ji}^{AA}$, $ij \in E_{AA}$ та $d_{ij}^{AB} = d_{ji}^{AB}$, $ij \in E_{AB}$ і верхні границі $x_{ij}^{up} = x_{ji}^{up}$, $ij \in E_{AA}$ та $y_{ij}^{up} = y_{ji}^{up}$, $ij \in E_{AB}$ для потоків, які можна пересилати тільки в одному напрямку, тобто або дугою ij або дугою ji.

Зміст оптимізаційної задачі

Задача полягає у знаходженні

мінімальної сумарної вартості пересилання потоків в мережі за умов дотримання верхніх меж на потоки по ребрах, повного використання продукції постачальників, обов'язкового задоволення критичних потреб споживачів і максимального забезпечення їхніх необхідних потреб.

Вартість пересилання по ребру ij потоку обсягом p_{ij} є рівною $d_{ij}^{AA} p_{ij}$ для $ij \in E_{AA}$ та $d_{ij}^{AB} p_{ij}$ для $ij \in E_{AB}$.

Потокові неперервні та булеві змінні

$x_{ij}^{+} \geq 0$; $x_{ij}^{-} \geq 0$, $ij \in E_{AA}$ – невідомі обсяги потоків в мережі "постачальники–постачальники",

$y_{ij}^{+} \geq 0$; $y_{ij}^{-} \geq 0$, $ij \in E_{AB}$ – невідомі обсяги потоків в мережі "постачальники–споживачі".

Знак "+" означає напрям потоку від вершини i до вершини j,

а знак "–" означає напрям потоку від вершини j до вершини i.

$X_{ij} = 0 \vee 1$, $ij \in E_{AA}$ та $Y_{ij} = 0 \vee 1$, $ij \in E_{AB}$ – булеві змінні,
"1", якщо потік пересилається від вершини i до вершини j,
"0", якщо потік пересилається від вершини j до вершини i.

Інші змінні: z_i, u_{ij} та v_{ij}

$z_i \geq 0$ – невідомий доданий обсяг продукції постачальнику $i \in A$,

$z_i^{low} \leq z_i \leq z_i^{up}$, де z_i^{low} та z_i^{up} – задані нижні та верхні межі.

$u_{ij} \geq 0$, $ij \in E_{AA}$ – невідомі обсяги продукції, які додано до верхніх меж на потоки для ребер E_{AA},

$v_{ij} \geq 0$, $ij \in E_{AB}$ – невідомі обсяги продукції, які додано до верхніх меж на потоки для ребер E_{AB}.

За допомогою управління додатними штрафними коефіцієнтами P_{AA} та P_{AB} змінні u_{ij} та v_{ij} використовуються для виявлення «вузьких місць» у мережі, коли пересилання необхідних обсягів потоків в мережі забезпечити неможливо.

Кількість змінних у задачі

Всього $n = n_A + 4(m_{AA} + m_{AB})$, з яких

m_{AA} бінарних змінних $X = \{X_{ij}\} \ \ \forall ij \in E_{AA}$,

m_{AB} бінарних змінних $Y = \{Y_{ij}\} \ \ \forall ij \in E_{AB}$,

n_A неперервних змінних $z = \{z_i\} \ \ \forall i \in A$,

$3m_{AA}$ неперервних змінних $x = \{x^+_{ij}, x^-_{ij}\}$, $u = \{u_{ij}\} \ \forall ij \in E_{AA}$,

$3m_{AB}$ неперервних змінних $y = \{y^+_{ij}, y^-_{ij}\}$, $v = \{v_{ij}\} \ \forall ij \in E_{AB}$.

Зміст

Змішана лінійно-булева задача (1) – (8)

$$F^* = \min_{x,y,X,Y,u,v,z} \left\{ \begin{array}{l} F = \sum\limits_{ij\in E_{AA}} \left(d_{ij}^{AA}(x_{ij}^+ + x_{ij}^-) + P_{AA}u_{ij}\right) \\ \quad + \sum\limits_{ij\in E_{AB}} \left(d_{ij}^{AB}(y_{ij}^+ + y_{ij}^-) + P_{AB}v_{ij}\right) \end{array} \right\} \qquad (1)$$

$$\sum_{j:\, ij\in E_{AA}} (x_{ij}^+ - x_{ij}^-) - \sum_{j:\, ji\in E_{AA}} (x_{ji}^+ - x_{ji}^-) + \sum_{j:\, ij\in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) = a_i^0 + z_i, \qquad \forall i \in A, \quad (2)$$

$$\sum_{i\in A} z_i = Z_A, \qquad z_i^{\text{low}} \le z_i \le z_i^{\text{up}}, \qquad \forall i \in A, \qquad (3)$$

$$b_j^1 \le \sum_{i:\, ij\in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) \le b_j^2, \qquad \forall j \in B, \qquad (4)$$

$$x_{ij}^+ \le x_{ij}^{\text{up}} X_{ij} + u_{ij}, \qquad x_{ij}^- \le x_{ij}^{\text{up}}(1 - X_{ij}) + u_{ij}, \qquad i,j \in A,\ ij \in E_{AA}, \qquad (5)$$

$$y_{ij}^+ \le y_{ij}^{\text{up}} Y_{ij} + v_{ij}, \qquad y_{ij}^- \le y_{ij}^{\text{up}}(1 - Y_{ij}) + v_{ij}, \qquad i \in A,\ j \in B,\ ij \in E_{AB}, \qquad (6)$$

$$x_{ij}^+ \ge 0, \qquad x_{ij}^- \ge 0, \qquad u_{ij} \ge 0, \qquad X_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j \in A,\ ij \in E_{AA}, \qquad (7)$$

$$y_{ij}^+ \ge 0, \qquad y_{ij}^- \ge 0, \qquad v_{ij} \ge 0, \qquad Y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i \in A,\ j \in B,\ ij \in E_{AB}. \qquad (8)$$

Цільова функція задачі (1)–(8)

$$F^* = \min_{x,y,X,Y,u,v,z} \{F = M(x,y) + P(u,v)\} \qquad (1)$$

$$M(x,y) = \sum_{ij \in E_{AA}} d_{ij}^{AA}(x_{ij}^{+} + x_{ij}^{-}) + \sum_{ij \in E_{AB}} d_{ij}^{AB}(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-})$$

$$P(u,v) = P_{AA} \sum_{ij \in E_{AA}} u_{ij} + P_{AB} \sum_{ij \in E_{AB}} v_{ij}$$

Тут $M(x,y)$ – сумарна вартість пересилання потоків в мережі, а $P(u,v)$ – штрафи за корекції верхніх меж на потоки в мережі.
За допомогою $M(x,y)$ мінімізуємо вартість пересилання потоків в мережі (момент потужності в електроенергетичних задачах), а за допомогою $P(u,v)$ виясняємо на скільки потрібно збільшити верхні границі на пересилання потоків, якщо система (2)–(8) є несумісною.

Балансові обмеження задачі (1)–(8)

$$\sum_{j:\, ij\in E_{AA}} (x_{ij}^{+} - x_{ij}^{-}) - \sum_{j:\, ji\in E_{AA}} (x_{ji}^{+} - x_{ji}^{-}) + \\ + \sum_{j:\, ij\in E_{AB}} (y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-}) = a_i^0 + z_i, \qquad \forall i \in A, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in A} z_i = Z_A, \qquad z_i^{\mathrm{low}} \le z_i \le z_i^{\mathrm{up}}, \qquad \forall i \in A, \tag{3}$$

$$b_j^1 \le \sum_{i:\, ij\in E_{AB}} (y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-}) \le b_j^2, \qquad \forall j \in B. \tag{4}$$

Лінійні рівності (2) означають, що кожен із постачальників повинен переслати споживачам увесь обсяг продукції, що включає як його власні наявні ресурси, так і частину продукції, отриманої за рахунок розподілу між усіма постачальниками Z_A одиниць продукції згідно обмежень (3). Лінійні нерівності (4) означають, що кожен із споживачів може недоотримати необхідний обсяг продукції, але обов'язково повинен отримати критичний обсяг продукції.

Верхні та нижні межі в задачі (1)–(8)

$$\begin{aligned} x_{ij}^{+} &\le x_{ij}^{\mathrm{up}} X_{ij} + u_{ij}, \\ x_{ij}^{-} &\le x_{ij}^{\mathrm{up}} (1 - X_{ij}) + u_{ij}, \qquad i,j \in A,\ ij \in E_{AA} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y_{ij}^{+} &\le y_{ij}^{\mathrm{up}} Y_{ij} + v_{ij}, \\ y_{ij}^{-} &\le y_{ij}^{\mathrm{up}} (1 - Y_{ij}) + v_{ij}, \qquad i \in A,\ j \in B,\ ij \in E_{AB} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &x_{ij}^{+} \ge 0, \qquad x_{ij}^{-} \ge 0, \qquad u_{ij} \ge 0, \\ &X_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j \in A,\ ij \in E_{AA} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &y_{ij}^{+} \ge 0, \qquad y_{ij}^{-} \ge 0, \qquad v_{ij} \ge 0, \\ &Y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i \in A,\ j \in B,\ ij \in E_{AB} \end{aligned} \tag{8}$$

Властивості задачі (1)–(8)

Твердження 1.

Якщо виконуються такі умови:

$$1) \sum_{i\in A} z_i^{low} \le Z_A \le \sum_{i\in A} z_i^{up}, \qquad 2) \sum_{j\in B} b_j^1 \le Z_A + \sum_{i\in A} a_i^0 \le \sum_{j\in B} b_j^2,$$

то система обмежень (2) – (8) є сумісною.

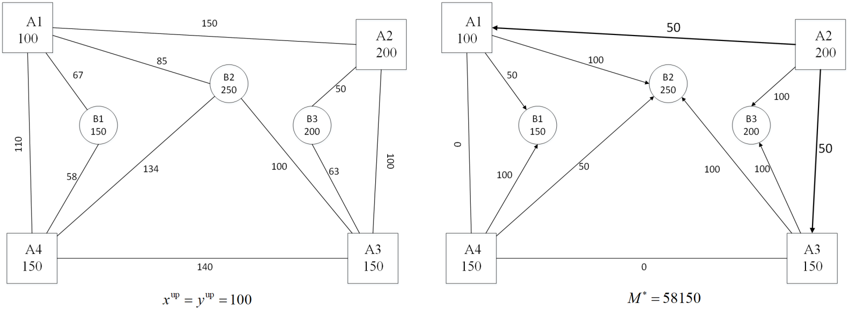
Твердження 2.

Нехай система обмежень (2) – (8) є сумісною, а штрафні коефіцієнти $P_{AA}{=}P_{BB}{=}\sum\limits_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA} + \sum\limits_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}$.

Якщо $P^* = 0$, *то* $(x^*, y^*, X^*, Y^*, z^*)$ *– розв'язок задачі (1) – (8), який задовільняє верхні межі на обсяги потоків по ребрах мережі.*

Якщо $P^* > 0$, *то серед компонент векторів* u^* *та* v^* *є хоча би одна додатна компонента і задача (1) – (8) не має розв'язку, який задовільняє верхні межі на обсяги потоків по ребрах мережі.*

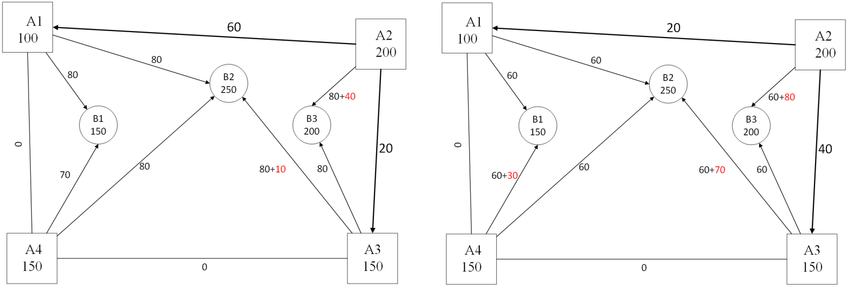
Приклад 1. Модельна мережа Net-4-3-11



Мережа включає 4 постачальники, 3 споживачі, 11 (4 + 7) ребер. Блок-схема мережі (зліва) та оптимальні обсяги потоків (справа). Штрафні коефіцієнти вибирались рівними $P_{AA} = P_{AB} = 100000$.

Два потоки в 50 у.о. пересилаються від A2 до A1 та A3.

Приклад 2. Net-4-3-11: два розподіли потоків



$y^{\text{up}} = 80,\ M^* = 57980$ $\quad$ $y^{\text{up}} = 60,\ M^* = 53160$

Додані обсяги потоків до верхніх меж (виділено червоним).

Варіант 1: від A2 до A1 та A3 пересилаються 60 у.о. та 20 у.о.

Варіант 2: від A2 до A1 та A3 пересилаються 20 у.о. та 40 у.о.

Зміст

Що модифікується?

Нехай I_i – бінарний індикатор для постачальника $i \in A$
(1 – постачальник задіяний, 0 – не задіяний, $a_i^0 = 0$).
Часткове виключення вузла або декількох вузлів можна врахувати, якщо обмеження (3) замінити на такі обмеження

$$\sum_{i \in A} z_i = Z_A, \qquad I_i z_i^{\mathrm{low}} \leq z_i \leq I_i z_i^{\mathrm{up}}, \qquad \forall i \in A. \tag{9}$$

Для того, щоб врахувати повне виключення вузла достатньо додатково обмеження (6) замінити на обмеження

$$\begin{aligned} & y_{ij}^{+} \leq I_i \times y_{ij}^{\mathrm{up}} Y_{ij} + v_{ij}, \\ & y_{ij}^{-} \leq I_i \times y_{ij}^{\mathrm{up}} (1 - Y_{ij}) + v_{ij}, \qquad i \in A,\ j \in B,\ ij \in E_{AB}, \end{aligned} \tag{10}$$

яке забороняє передачу продукції від незадіяних постачальників до всіх зв'язаних з ними споживачів.

Формулювання оптимізаційної задачі

$$F^* = \min_{x,y,X,Y,u,v,z} \left\{ \begin{array}{l} F = \sum\limits_{ij \in E_{AA}} (d_{ij}^{AA}(x_{ij}^+ + x_{ij}^-) + P_{AA} u_{ij}) \\ \quad + \sum\limits_{ij \in E_{AB}} (d_{ij}^{AB}(y_{ij}^+ + y_{ij}^-) + P_{AB} v_{ij}) \end{array} \right\} \tag{11}$$

$$\sum_{j:\, ij \in E_{AA}} (x_{ij}^+ - x_{ij}^-) - \sum_{j:\, ji \in E_{AA}} (x_{ji}^+ - x_{ji}^-) + \sum_{j:\, ij \in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) = a_i^0 + z_i, \qquad \forall i \in A, \tag{12}$$

$$\sum_{i \in A} z_i = Z_A, \qquad I_i \times z_i^{\mathrm{low}} \le z_i \le I_i \times z_i^{\mathrm{up}}, \qquad \forall i \in A, \tag{13}$$

$$b_j^1 \le \sum_{i:\, ij \in E_{AB}} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-) \le b_j^2, \qquad \forall j \in B, \tag{14}$$

$$x_{ij}^+ \le x_{ij}^{\mathrm{up}} X_{ij} + u_{ij}, \qquad x_{ij}^- \le x_{ij}^{\mathrm{up}} (1 - X_{ij}) + u_{ij}, \qquad i, j \in A,\ ij \in E_{AA}, \tag{15}$$

$$y_{ij}^+ \le I_i \times y_{ij}^{\mathrm{up}} Y_{ij} + v_{ij}, \qquad y_{ij}^- \le I_i \times y_{ij}^{\mathrm{up}} (1 - Y_{ij}) + v_{ij}, \qquad i \in A,\ j \in B,\ ij \in E_{AB}, \tag{16}$$

$$x_{ij}^+ \ge 0, \qquad x_{ij}^- \ge 0, \qquad u_{ij} \ge 0, \qquad X_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i, j \in A,\ ij \in E_{AA}, \tag{17}$$

$$y_{ij}^+ \ge 0, \qquad y_{ij}^- \ge 0, \qquad v_{ij} \ge 0, \qquad Y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i \in A,\ j \in B,\ ij \in E_{AB}. \tag{18}$$

Дві властивості задачі (11)–(18)

Твердження 3.

Якщо $I_i = 1$ для всіх $i \in A$, то оптимізаційна задача (11) – (18) еквівалентна оптимізаційній задачі (1) – (8).

Твердження 4.

Якщо виконуються такі умови:

$$1)\sum_{i\in A} I_i \times z_i^{low} \le Z_A \le \sum_{i\in A} I_i \times z_i^{up}, \quad 2)\sum_{j\in B} b_j^1 \le Z_A + \sum_{i\in A} a_i^0 \le \sum_{j\in B} b_j^2,$$

то система обмежень (12) – (18) є сумісною.

Третя властивість задачі (11)–(18)

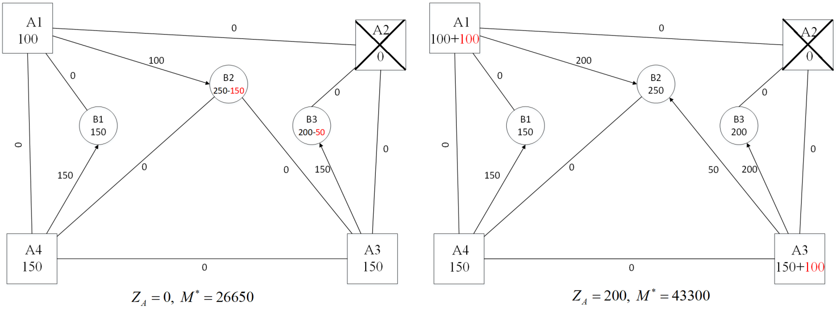
Твердження 5.

Нехай система обмежень (12) – (18) є сумісною, а штрафні коефіцієнти $P_{AA}{=}P_{BB}{=}\sum\limits_{ij\in E_{AA}} d_{ij}^{AA}{+}\sum\limits_{ij\in E_{AB}} d_{ij}^{AB}$.

Якщо $P^* = 0$, *то* $(x^*, y^*, X^*, Y^*, z^*)$ *– розв'язок задачі (11) – (18), який задовільняє верхні межі на обсяги потоків по ребрах мережі.*

Якщо $P^* > 0$, *то серед компонент векторів* u^* *та* v^* *є хоча би одна додатна компонента і задача (11) – (18) не має розв'язку, який задовільняє верхні межі на обсяги потоків по ребрах мережі.*

Приклад 3. $x^{\text{up}}=y^{\text{up}}=200$, $P_{AA}=P_{BB}=10000$

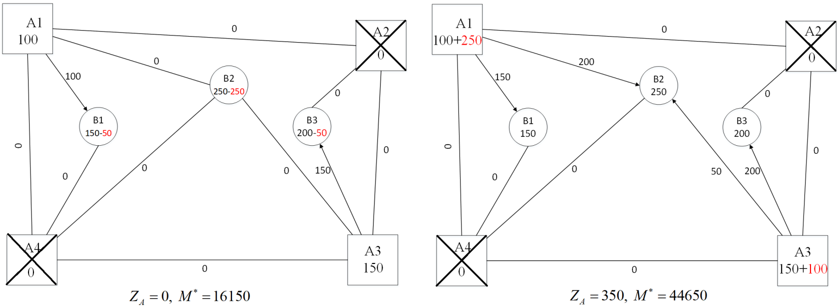


Оптимальні потоки у мережі Net-4-3-11 з незадіяним A2.

Варіант 1 – необхідні потреби B2 та B3 не виконуються.

Варіант 2 – продукція A2 розподілена між A1 та A3 порівну.

Приклад 4. $x^{\mathrm{up}}=y^{\mathrm{up}}=200$, $P_{AA}=P_{BB}=10000$



Оптимальні потоки у мережі Net-4-3-11 з незадіяними A2 та A4.

Варіант 1 – необхідні потреби усіх споживачів не виконуються.

Варіант 2 – продукція A2+A4 розподілена між A1 (250) та A3 (100).

Висновки та подальші плани

Розроблені оптимізаційні моделі можуть бути використані для балансування потужностей в системах диспетчеризації регіональних енергосистем за умов непередбачуваних пошкоджень енергетичної інфраструктури та виникненням при цьому некерованого дефіциту потужності.
Вони дозволяють моделювати як часткове так і повне знеструмлення окремих магістральних вузлів.

Подальші плани:

спільно з ННІ енергетики, автоматики та енергозбереження (Національний університет біоресурсів і природокористування) модернізувати моделі для вироблення своєчасних управлінських рішень з боку систем диспетчеризації центрального та регіонального рівнів на формування адекватних реакцій та сценаріїв забезпечення живучості регіональних енергосистем.

Робота підтримана

«Розробити математичні моделі, методи та програмні засоби мінімізації ризиків для об'єктів критичної інфраструктури»
(тема № 2.3/25-П/ВП 130.1230)

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

e-mail: stetsyukp@gmail.com

BACKUP SLIDE 1: Потік мінімальної вартості

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{k:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i, \forall i \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A. \tag{3}$$

Тут джерело ($b_i > 0$), сток ($b_i < 0$), проміжний вузол ($b_i = 0$).

BACKUP SLIDE 2: Корисні посилання

Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B.

Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. PRENTICE HALL, Upper Saddle River, New Iersey, 1993, 846 p.

Bertsekas D. P.

Network optimization: continuous and discrete models. Athena Scientific. 1998. 608 p.

Ермольев Ю.М., Мельник И.М.

Экстремальные задачи на графах. Киев: Наукова думка, 1968. 176 с.