ВИКОРИСТАННЯ СОЛВЕРА BARON ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ УПАКОВКИ НЕРІВНИХ КРУГІВ

[1] Стецюк П.І., [2] Романова Т.Є., [3] Тиводар С.Р.

[1] Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

[2] Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України

[3] Ужгородський національний університет

XXVI Міжнародний науково-практичний семінар
«КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ»,
присвячений пам'яті професора Донця Г.П.
13-15 червня 2024 року
Кропивницький – Запоріжжя – Київ

Формулювання квадратичної задачі

Нехай задано сімейство m кругів C_i з радіусами $r_i,\ i = 1, \dots, m$, та зовнішній круг C_0 з центром в точці $(0,0)$ та змінним радіусом R.

Якщо задати (x_i, y_i) – невідомий центр круга, $C_i,\ i = 1, \dots, m$, то задачі оптимальної упаковки відповідає така багатоекстремальна квадратична задача:

$$R^* = \min_{R,x,y} R \tag{1}$$

за обмежень

$$x_i^2 + y_i^2 \le (R - r_i)^2,\ i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 \ge \left(r_i + r_j\right)^2,\ \ 1 \le i < j \le m, \tag{3}$$

$$R \ge \max_{i=1,\dots,m} r_i, \tag{4}$$

де $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$.

Таблиця 1. BARON – розв’язки задачі (1) – (4) для шести тестових прикладів

m	N_{itn}	N_{nodes}	N^*_{nodes}	R_{low}	R_{up}	R^*
5	6796413	1535	849	8.55369	**9.00140**	**9.00140**
6	5819686	2502	2502	10.5063	**11.0570**	**11.0570**
7	2842333	18880	147157	12.7890	**13.4621**	**13.4621**
8	825944	88276	406705	13.8261	**16.2217**	**16.2217**
9	490757	136297	312999	12.0193	19.3517	19.2332
10	354724	103893	144784	14.3897	22.1176	22.0002

Солвер BARON (7200 секунд)

N_{itn} – кількість ітерацій

N_{nodes} – максимальна кількість вершин

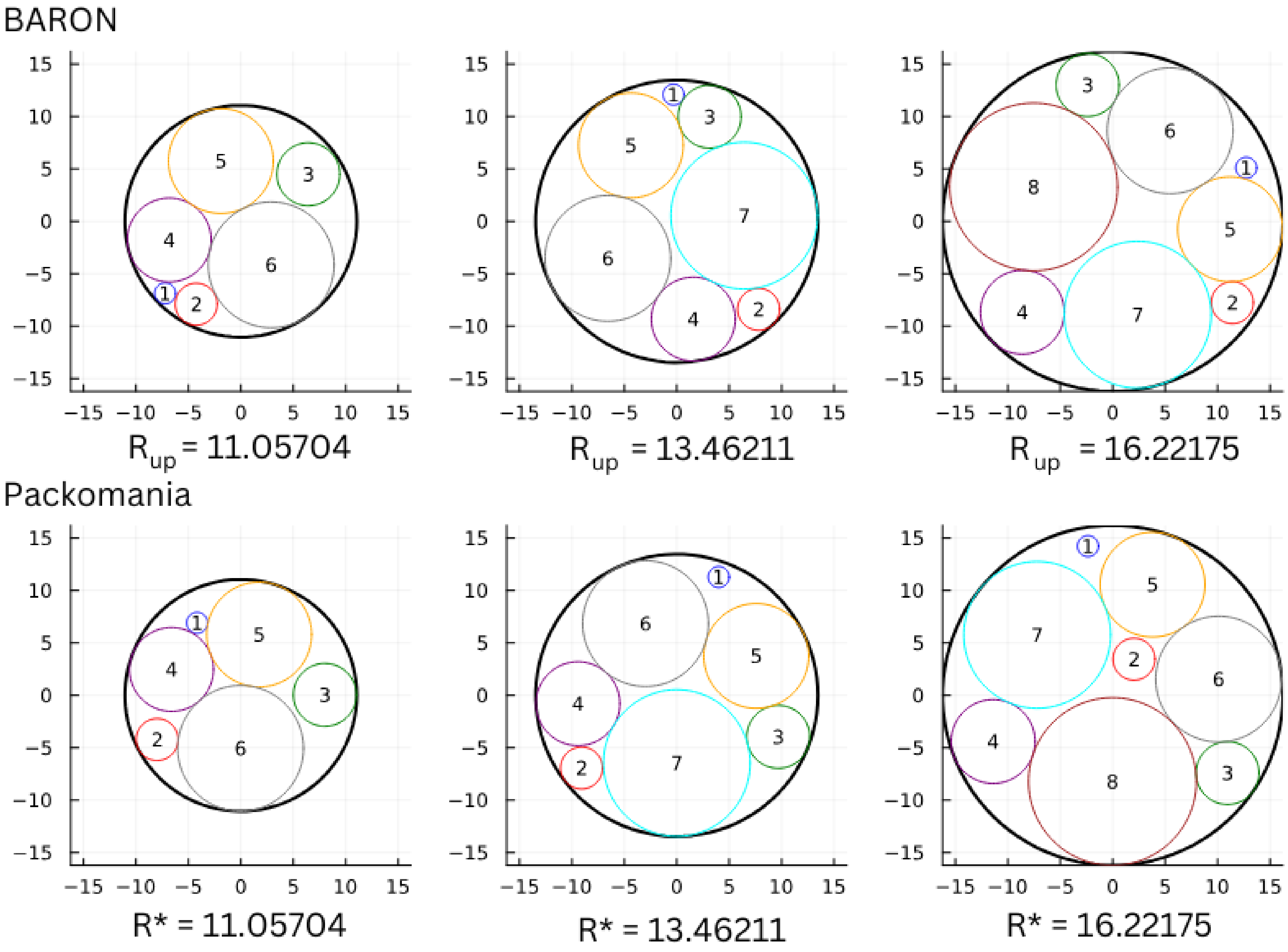
N^*_{nodes} – номер вершини, на якій знайдено найменше значення радіусу зовнішнього круга

R_{low} – нижня границя на радіус

R_{up} – верхня границя на радіус

Packomania (https://www.packomania.com)

R^* – найменший радіус круга C_0



<u>Рисунок 1</u>

BARON та **Packomania**: розв'язки задачі (1) – (4) для $m \in \{6, 7, 8\}$

Твердження 1

Нехай $x^* = \{ x_i^* \}_{i=1}^m, y^* = \{ y_i^* \}_{i=1}^m$ *,* R^* *– розв'язок задачі (1) – (4), а кут φ такий, що* $0 \le \varphi \le 2\pi$. *Тоді* $x^{**} = \{ x_i^{**} \}_{i=1}^m, y^{**} = \{ y_i^{**} \}_{i=1}^m$*,* $R^{**} = R^*$ *буде розв'язком задачі (1) – (4), якщо центри кругів* $C_i, i = 1, \dots, m$*, обчислюються за формулами*

$$x_i^{**} = \cos\varphi * x_i^* + \sin\varphi * y_i^*, \quad y_i^{**} = -\sin\varphi * x_i^* + \cos\varphi * y_i^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Наслідок 1. Якщо до задачі (1) – (4) додати обмеження (лінійна рівність)

$$x_m = \bar{x}, \quad \text{де } -R^* + r_m \le \bar{x} \le R^* - r_m, \tag{5}$$

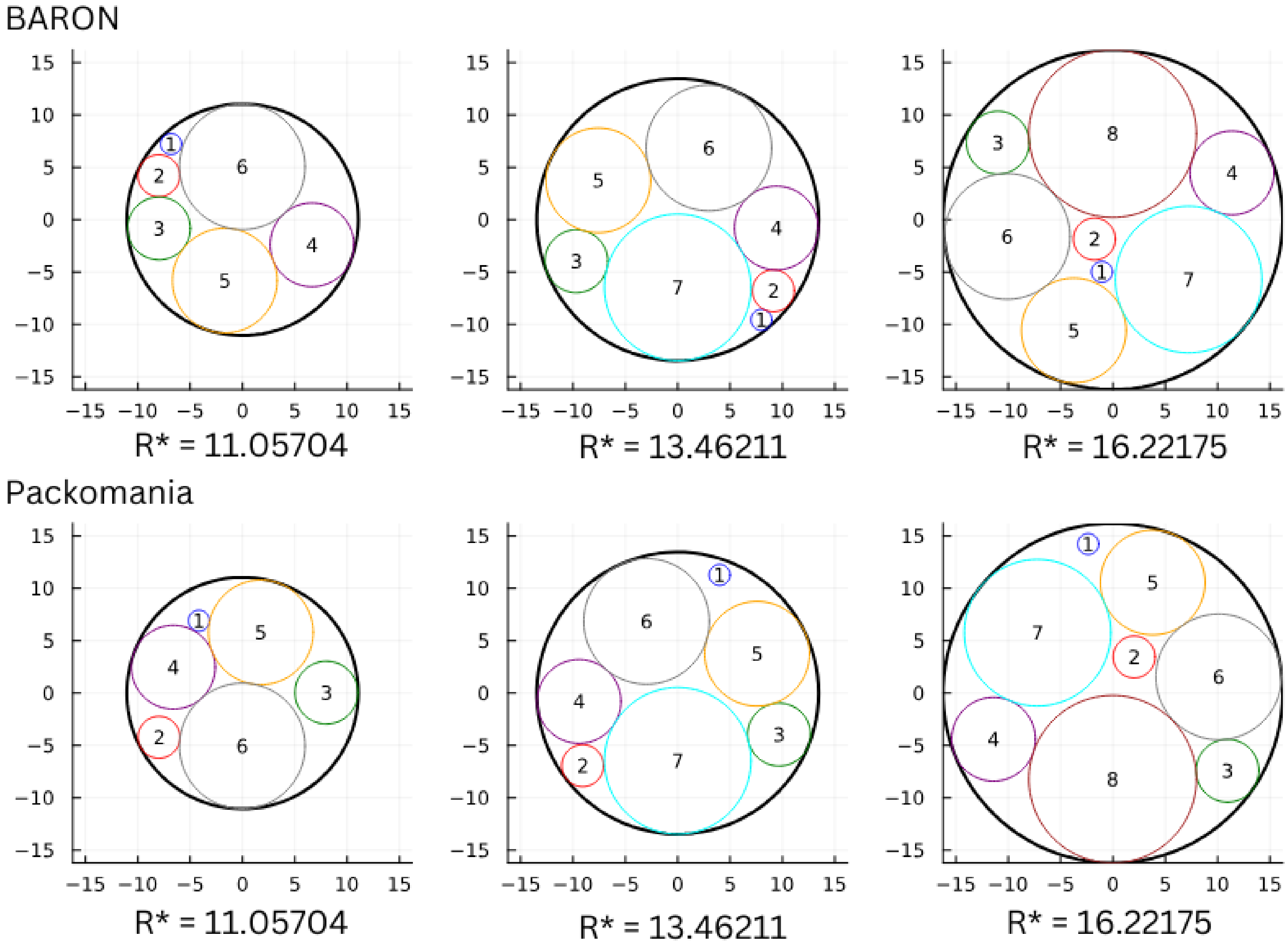
то в задачі (1) – (5) розв'язків стане менше, що прискорить роботу солвера **BARON**.

Таблиця 2. BARON – розв'язки задачі (1) – (5) для шести тестових прикладів

m	x_m	N_{itn}	N_{nodes}	N^*_{nodes}	$time$	R_{low}	R_{up}
5	-0.01535	33	5	-1	**0.78**	9.00139	9.00140
6	-0.02365	333	15	-1	**2.38**	11.0570	11.0570
7	0.00055	12589	292	11223	**48.87**	13.4621	13.4621
8	-0.02348	101679	2079	15446	**638.57**	16.2217	16.2217
9	-0.02009	757457	53254	113331	7200	16.8822	19.2332
10	-0.02110	440500	79418	68323	7200	14.5351	22.0002

x_m – значення зафіксованих координат центрів відповідних найбільших кругів C_i, $i = m$, які взяті з сайту https://www.packomania.com

$time$ – час розв'язання тестових прикладів



<u>Рисунок 2</u>

BARON та **Packomania**: розв'язки задачі (1) – (5) для $m \in \{6, 7, 8\}$

Твердження 2

Нехай $x^* = \{ x_i^* \}_{i=1}^m$, $y^* = \{ y_i^* \}_{i=1}^m$, R^* *– розв'язок задачі (1) – (4). Тоді* $x^{***} = \{ x_i^{***} \}_{i=1}^m$, $y^{***} = \{ y_i^{***} \}_{i=1}^m$, $R^{***} = R^*$ *– розв'язок задачі (1) – (4), якщо центри кругів* C_i , $i = 1, \dots, m$, *обчислюються за формулами* $x^{***} = x_i^*$, $y^{***} = -y_i^*$, $i = 1, \dots, m$.

Наслідок 2. Якщо до задачі (1) – (5) додати обмеження (лінійна нерівність)

$$y_m \le 0, \tag{6}$$

то це дозволить ще більше прискорити роботу солвера **BARON**.

Таблиця 3. BARON – розв'язки задачі (1) – (6) для шести тестових прикладів

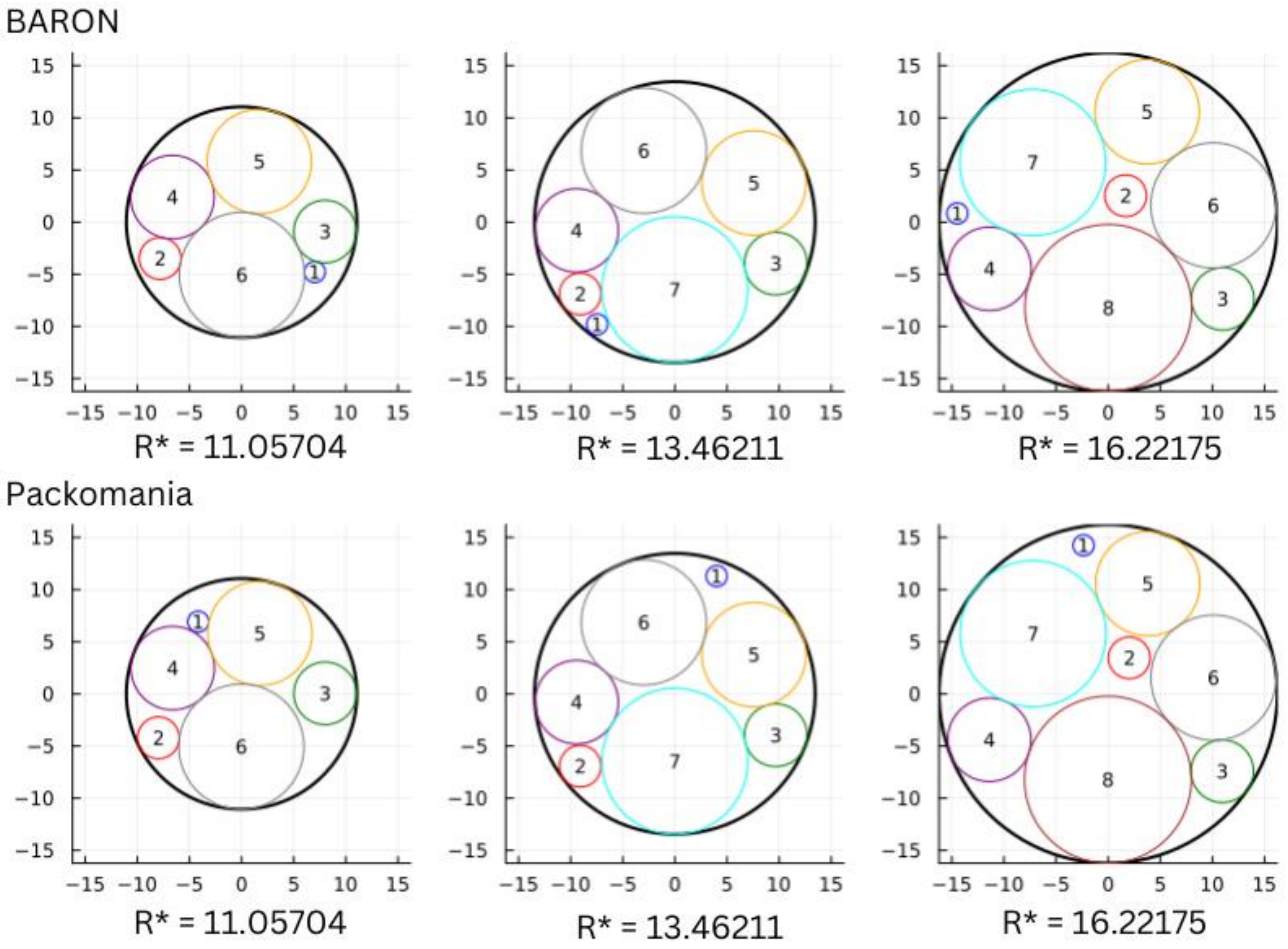
m	x_m	N_{itn}	N_{nodes}	N^*_{nodes}	$time$	R_{low}	R_{up}
5	-0.01535	13	3	-1	**0.37**	9.00139	9.00140
6	-0.02365	21	5	5	**0.61**	11.0570	11.0570
7	0.00055	6000	150	159	**26.41**	13.4621	13.4621
8	-0.02348	48299	903	4317	**309.91**	16.2217	16.2217
9	-0.02009	319676	22524	230328	7200	**17.0606**	**19.2332**
10	-0.02110	176855	33998	176179	7200	**16.8858**	**22.0002**

Задача (1) – (5)

0.78
2.38
48.87
638.57

Задача (1) – (4)

12.0193	19.3517
14.3897	22.1176



<u>Рисунок 3</u>

BARON та **Packomania**: розв’язки задачі (1) – (6) для $m \in \{6, 7, 8\}$

Подяка

Volkswagen Foundation (грант № 97775)

Запитання?

Дякую за увагу!