Обчислювальні аспекти методу еліпсоїдів

Стецюк П.І.

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Семінар “Образний комп’ютер”

23 квітня 2024, Київ

План доповіді

1. Методи еліпсоїдів з масштабуванням простору, 30 хв.
(семінар “Теорія оптимальних рішень”, 15.11.2022)

2. Метод еліпсоїдів: деякі помилки, 40 хвилин
(Міжнародний семінар MOTL-2023, 14.11.2023)

3. Алгоритм еліпсоїдів для задачі СЛН, сторінка 182
в книзі Пападімітріу та Стайгліца (1984)

4. Обчислювальні експерименти для задачі Сильвестра
(Кібернетика та Компютерні Технології, 2024, № 1)

План доповіді

1. Методи еліпсоїдів з масштабуванням простору, 30 хв. (семінар “Теорія оптимальних рішень”, 15.11.2022)
2. Метод еліпсоїдів: деякі помилки, 40 хвилин (Міжнародний семінар MOTL-2023, 14.11.2023)
3. Алгоритм еліпсоїдів для задачі СЛН, сторінка 182 в книзі Пападімітріу та Стайгліца (1984)
4. Обчислювальні експерименти для задачі Сильвестра (Кібернетика та Компютерні Технології, 2024, № 1)

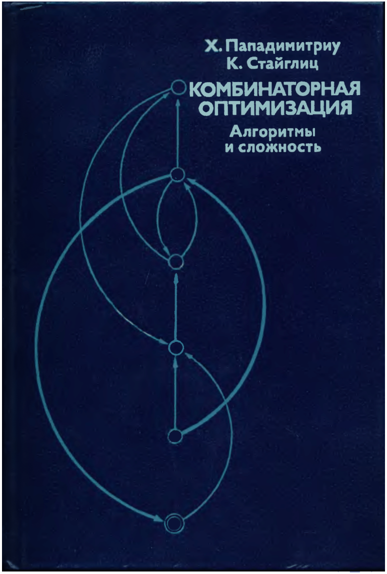
План доповіді

1. Методи еліпсоїдів з масштабуванням простору, 30 хв. (семінар "Теорія оптимальних рішень", 15.11.2022)
2. Метод еліпсоїдів: деякі помилки, 40 хвилин (Міжнародний семінар MOTL-2023, 14.11.2023)
3. Алгоритм еліпсоїдів для задачі СЛН, сторінка 182 в книзі Пападімітріу та Стайгліца (1984)
4. Обчислювальні експерименти для задачі Сильвестра (Кібернетика та Компютерні Технології, 2024, № 1)

План доповіді

1. Методи еліпсоїдів з масштабуванням простору, 30 хв. (семінар "Теорія оптимальних рішень", 15.11.2022)
2. Метод еліпсоїдів: деякі помилки, 40 хвилин (Міжнародний семінар MOTL-2023, 14.11.2023)
3. Алгоритм еліпсоїдів для задачі СЛН, сторінка 182 в книзі Пападімітріу та Стайгліца (1984)
4. Обчислювальні експерименти для задачі Сильвестра (Кібернетика та Компютерні Технології, 2024, № 1)

Комбинаторная оптимизация, 1984



Алгоритм еліпсоїдів для задачі СЛН (182 с.)

меньшее расстояние от x до граней P. Так как $x \in \operatorname{Int}(P)$ и $\varepsilon > 0$, то шар с центром в x и радиусом ε лежит целиком внутри P и, следовательно, на H. Но это абсурдно: никакая $(n-1)$-мерная гиперплоскость не может содержать n-мерного шара. □

8.7.3. Алгоритм. Основная идея алгоритма эллипсоидов очень проста. Алгоритм состоит из итераций. У нас постоянно имеется эллипсоид, содержащий некоторое решение данной системы СЛН,

АЛГОРИТМ ЭЛЛИПСОИДОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ СЛН

Вход. Система строгих линейных неравенств $Ax < b$ порядка $m \times n$ и размера L.

Выход. n-вектор x, для которого $Ax < b$, если такой вектор существует; «нет» в противном случае.

1: (Задание начальных значений) Положить $j := 0$, $t_0 := 0$, $B_0 := n^2 2^{2L} \cdot I$

(**Comment:** j далее считает число итераций; текущий эллипсоид имеет вид $E_j = \{x\colon\ (x - t_j)' B_j^{-1} (x - t_j) \leqslant 1\}$).

2: (Проверка) **if** t_j — решение системы $Ax < b$ **then return** t_j;
if $j > K = 16n(n+1)L$ **then return** «нет»;

3: (Итерация) Выбрать любое неравенство в $Ax < b$, которое нарушается при $x = t_j$, скажем $a' t_j \geqslant b$. Положить

$$t_{j+1} := t_j - \frac{1}{n+1} \frac{B_j a}{\sqrt{a' B_j a}};$$

$$B_{j+1} := \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[B_j - \frac{2}{n+1} \frac{(B_j a)(B_j a)'}{a' B_j a} \right];$$

$$j := j + 1;$$

go to 2.

Рис. 8.5.

если такое решение вообще существует. Итерация состоит в замене текущего эллипсоида меньшим, который также с гарантией содержит некоторое решение (если оно вообще существует). После достаточного числа итераций мы либо должны обнаружить решение, либо приходим к выводу, что после ряда сжатий эллипсоид стал слишком мал, чтобы содержать решение, и заключаем, что решения не существует. Полностью этот алгоритм приведен на рис. 8.5.

Пример 8.10. Предположим, что для некоторого j мы получили $t_j = (0,\ 0)'$, $B_j = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ и одно из неравенств имеет вид $x + y < -1$. Эта ситуация изображена на рис. 8.6(a). Напомним, что откуда-то нам известно, что решение данной индивидуальной задачи СЛН, если оно существует, лежит внутри эллипсоида E_j. Так как любое решение должно удовлетворять неравенству $x + y < -1$, то с уверенностью можно сказать, что все решения лежат в нижней левой половине этого эллипсоида. Если бы мы могли каким-нибудь обра-

Алгоритм еліпсоїдів для задачі СЛН

АЛГОРИТМ ЭЛЛИПСОИДОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ СЛН

Вход. Система строгих линейных неравенств $Ax < b$ порядка $m \times n$ и размера L.

Выход. n-вектор x, для которого $Ax < b$, если такой вектор существует; «нет» в противном случае.

1: (Задание начальных значений) Положить $j := 0$, $t_0 := 0$, $B_0 := n^2 2^{2L} \cdot I$

(**Comment**: j далее считает число итераций; текущий эллипсоид имеет вид $E_j = \{x: (x - t_j)' B_j^{-1} (x - t_j) \leqslant 1\}$).

2: (Проверка) **if** t_j — решение системы $Ax < b$ **then return** t_j;

if $j > K = 16n(n+1)L$ **then return** «нет»;

3: (Итерация) Выбрать любое неравенство в $Ax < b$, которое нарушается при $x = t_j$, скажем $a' t_j \geqslant b$. Положить

$$t_{j+1} := t_j - \frac{1}{n+1} \frac{B_j a}{\sqrt{a' B_j a}};$$

$$B_{j+1} := \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[B_j - \frac{2}{n+1} \frac{(B_j a)(B_j a)'}{a' B_j a} \right];$$

$$j := j + 1;$$

go to 2.

План доповіді

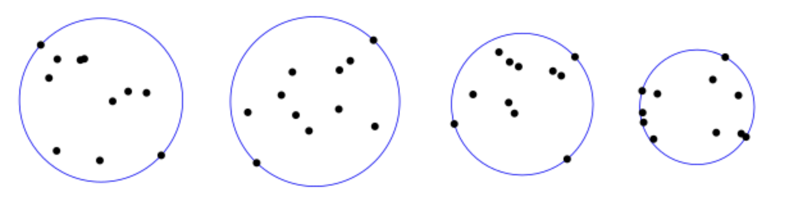
1. Методи еліпсоїдів з масштабуванням простору, 30 хв. (семінар “Теорія оптимальних рішень”, 15.11.2022)
2. Метод еліпсоїдів: деякі помилки, 40 хвилин (Міжнародний семінар MOTL-2023, 14.11.2023)
3. Алгоритм еліпсоїдів для задачі СЛН, сторінка 182 в книзі Пападімітріу та Стайгліца (1984)
4. Обчислювальні експерименти для задачі Сильвестра (Кібернетика та Компютерні Технології, 2024, № 1)

Задача Сильвестра (про найменшу гіперкулю)

Задана множина точок $A_m = \{a_j, j = 1, \ldots, m\}$, $a_j \in \mathbb{R}^n$.

Потрібно побудувати гіперкулю мінімального радіуса, яка охоплює всі точки множини A_m.

Цю задачу для $\mathbb{R}^2$ вперше сформулював англійський математик Джеймс Джозеф Сильвестр.



Задача Сильвестра може бути сформульована

як така задача опуклого програмування: **знайти**

$$f^* = f(x^*) = \min_{x \in R^n} \{ f(x) = \max_{j=1,\dots,m} \|x - a_j\|^2 \} \qquad (1)$$

за обмежень

$$\|x - x_0\| \le r_0. \qquad (2)$$

де $x \in R^n$ – вектор невідомих координат центру гіперкулі, $x_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_j$ – центр кулі радіуса $r_0 = \sqrt{\max_{j=1,\dots,m} \|x_0 - a_j\|^2}$, в якій локалізовано точку x^* – розв'язок задачі (1) – (2).

Мінімальний радіус гіперкулі буде рівним $\sqrt{f^*}$.

Результати роботи методу еліпсоїдів при $n = 30$

ε	k^*	t	$f(x_{k^*})$	$\|x_{k^*} - x^*\|$
1.0e-02	9248	0.6	0.9669151409420581O	1.419648e-03
1.0e-04	17344	1.1	0.9666675076144826	4.038524e-05
1.0e-06	25522	1.6	0.9666669634550528	8.408335e-06
1.0e-08	33675	2.1	0.9666666694991410	1.177884e-06
1.0e-10	41800	2.5	0.9666666666926282	5.148086e-08
1.0e-12	49954	3.1	0.9666666666666778	4.682847e-09
1.0e-16	65514	4.2	0.9666666666666712	1.009356e-11
1.0e-20	69468	4.5	0.9666666666666701	7.548093e-12
1.0e-24	83439	5.4	0.9666666666666690	4.869797e-13
1.0e-28	95098	6.2	0.9666666666666701	5.061942e-13
1.0e-30	95921	6.3	0.9666666666666712	5.064286e-13

Література (2022 – 2024)

- Stetsyuk P.I, Fischer A., Khomiak O. M. Ellipsoid method with space scaling. *Proceedings of the 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2022).* 24-26 August, 2022, Baku, Azerbaijan. P. 402-404.
- Fischer A., Khomyak O., Stetsyuk P. The ellipsoid method and computational aspects. *Commun. Optim. Theory.* 21. 2023. P. 1-14.
- Стецюк П.І., Фішер А., Хом'як О.М. Уніфіковане представлення класичного методу еліпсоїдів. *Кібернетика та системний аналіз.* 2023. Т. 59, № 5. С. 113-123.
- Стецюк П.І., Будник М.М., Сенько І.О., Стовба В.О., Чайковський І.А. Використання методу еліпсоїдів для вивчення зв'язків у медичних даних. Cybernetics and Computer Technologies. 2023. 3. С. 23–43.
- Стецюк П.І., Хом'як О.М., Давидов О.О. Використання методу еліпсоїдів для задачі Сильвестра та її узагальнення. *Cybernetics and Computer Technologies.* 2024. 1. С. 27–46.

Подяки

Національний Фонд Досліджень України
(грант №2021.01/0136)

Volkswagen Foundation
(грант №97 775)

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!