



Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Международный научный семинар  
«Моделирование и оптимизация в транспорте и логистике»,  
посвященный памяти Дмитрия Ильича Соломона

# ДМИТРИЙ СОЛОМОН И КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «ЭВРИКА»

Д.ф.-м.н. Петр СТЕЦЮК  
заведующий отделом методов негладкой оптимизации

**Демонстрируем  
опубликованные  
КНИГИ...**





**... отвечаем  
на вопросы**

групповое фото  
на память



# СБОРНИКИ ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ Н.З. ШОРА

Н. З. ШОР

## МЕТОДЫ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И СЛОЖНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ



КИШИНЭУ • ЭВРИКА • 2008



АКАДЕМИК Н. З. ШОР (1937 – 2006)

*"Теория всего класса алгоритмов с растяжением пространства ещё далека от совершенства. Нам кажется достаточно реалистической целью построение такого алгоритма, который по своей практической эффективности не уступал бы  $\tau$ -алгоритму и был столь же хорошо обоснован, как метод эллипсоидов".*

*Шор*

270

## СОДЕРЖАНИЕ

Академик Н. З. Шор ..... 3

### ЧАСТЬ I

Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения .....	16
Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании .....	39
Метод случайного поиска для задач двухэтапного стохастического программирования и его обобщение .....	45
Алгоритм решения двухэтапной задачи стохастического программирования .....	51
Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов .....	59
Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования .....	76
О методе решения одного класса динамических распределительных задач .....	81
Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования .....	95

### ЧАСТЬ II

Минимизация матричных функций и недифференцируемая оптимизация .....	116
Использование модификации $\tau$ -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций .....	147
Роль избыточных ограничений в улучшении двойственных оценок для полиномиальных оптимизационных задач .....	176
Lagrangian Bounds in Multiextremal Polynomial and Discrete Optimization Problems .....	198
Список трудов Н. З. Шора .....	244

# СБОРНИКИ ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ Н.З. ШОРА

**Н. З. ШОР**

## МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И МАТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ



КИШИНЭУ • ЭВРИКА • 2009

238

### СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ..... 4

#### ЧАСТЬ I

Обобщенные градиентные методы минимизации негладких функций . .  
и их применение к задачам математического программирования .... 14

Новые направления в развитии методов негладкой оптимизации ... 44

Метод растяжения пространства для ускорения сходимости .....  
в задачах овражного типа ..... 54

Использование операции растяжения пространства в задачах .....  
минимизации выпуклых функций ..... 66

О скорости сходимости метода обобщенного градиентного спуска .....  
с растяжением пространства ..... 79

Некоторые вопросы сходимости обобщенного градиентного спуска .. 90

О решении минимаксных задач методом обобщенного градиентного ..  
спуска с растяжением пространства ..... 96

О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе .....  
минимизации функций этого класса ..... 109

Об одной модификации алгоритмов минимизации градиентного .....  
типа с растяжением пространства для решения задач .....  
большой размерности ..... 121

#### ЧАСТЬ II

О методе получения оценок в квадратичных экстремальных .....  
задачах с булевыми переменными ..... 130

Квадратичные оптимизационные задачи ..... 138

239

Об одном подходе к получению глобальных экстремумов в .....  
полиномиальных задачах математического программирования ..... 156

Об одном классе оценок глобального минимума .....  
полиномиальных функций ..... 166

Использование точных штрафов при построении описанных .....  
эллипсоидов минимального объема ..... 173

Алгоритмы построения оптимальных описанных эллипсоидов .....  
на основе методов негладкой оптимизации ..... 179

Использование алгоритма субградиентного типа с растяжением .....  
пространства для построения эллипсоида максимального объема, .....  
вписанного в многогранник ..... 185

Построение эллипсоида максимального объема, вписанного в .....  
многогранник, с использованием последовательного растяжения .....  
пространства ..... 195

New algorithms for constructing optimal circumscribed and .....  
inscribed ellipsoids ..... 203

Алгоритмы построения инвариантного эллипсоида минимального .....  
объема для устойчивой динамической системы ..... 226

# СБОРНИКИ ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ Н.З. ШОРА

Н. З. ШОР

## АЛГОРИТМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ И НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ



КИШИНЭУ • ЭВРИКА • 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

	267
Предисловие .....	4
Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи .....	11
Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов .....	18
О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования .....	48
Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів .....	54
Определение на ЭЦВМ наивыгоднейших маршрутов по заданной сети дорог .....	60
Определение на ЭЦВМ наивыгоднейшего положения красной линии продольного профиля на вольном ходу .....	75
Алгоритм и опыт решения сетевых транспортных задач .....	81
Методика выбора оптимальных сечений сети 6-10 кв методом последовательного анализа вариантов .....	94
Алгоритм определения грузонапряженностей на звеньях сети путей сообщения .....	111
Метод последовательного анализа вариантов для численного решения задач оптимизации .....	118
Математические методы решения некоторых задач размещения .....	125
Математические основы решения задачи выбора оптимального очертания продольного профиля .....	130
Определение наивыгоднейшего варианта сети 35-10 кв с проверкой на минимальный режим .....	139
	268
Оптимальный расчет электрических сетей с тремя ступенями напряжения с помощью электронной цифровой вычислительной машины .....	143
Математические методы выбора оптимального варианта сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газа .....	151
Численные методы расчета потокораспределения в системах промышленной вентиляции .....	168
Выбор оптимального диаметра нефтепровода с учетом поэтапного наращивания мощности .....	174
О методе оценки количества условно оптимальных траекторий дискретного сепарабельного динамического программирования .....	179
Применение математических методов при оптимальном проектировании Единой Газоснабжающей Системы с учетом динамики ее развития .....	195
Алгоритмы оптимизации для решения задач развития Единой Системы Газоснабжения .....	207
О комплексе задач оптимизации проектных решений по профилю сложных участков дорог (на примере БАМ) .....	212
Выбор структуры развивающихся газопроводов с учетом ограничения ресурсов .....	246
О декомпозиционном алгоритме выбора оптимального профиля железной дороги .....	251
Кусочно-вогнутая задача рюкзачного типа .....	260

# «НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Д. И. Соломон

## ДРОБНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Кишинэу • Эврика • 2010

Серия научных публикаций  
«Недифференцируемая оптимизация и ее приложения»,  
посвященная академику Н. З. ШОРУ

Редакционная коллегия серии:  
Акад. НАН Украины И. В. СЕРГИЕНКО,  
Д-р техн. наук Д. И. СОЛОМОН,  
Канд. физ.-мат. наук П. И. СТЕЦЮК

CZU 519.85  
С 60

### Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Соломон, Д. И.

Дробное программирование и недифференцируемая оптимизация. /  
Д. И. Соломон; Нац. Акад. наук Украины, Акад. Транспорта,  
информатики и коммуникаций. – К.: Эврика, 2010 (Tipogr. AŞM). – 556 p.  
150 ex.

ISBN 978-9975-941-53-2.

519.85  
С 60

Монография посвящена задачам дробной оптимизации и методам их решения, основанным на алгоритмах минимизации недифференцируемых функций. Описываются различные субградиентные методы и основанные на них схемы декомпозиции, а также особенности их применения для решения задач дробной оптимизации.

Книга рассчитана на специалистов в области математического программирования, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Рекомендовано к печати Ученым советом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины (протокол № 5 от 16.03.10) и Сенатом Академии транспорта, информатики и коммуникаций Республики Молдова (протокол № 6 от 18.02.10).

Рецензенты: **Н.Г. Журбенко**, канд. физ.-мат. наук, Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, НАН Украины,  
**Д.К. Замбицкий**, канд. физ.-мат. наук, Академия экономических знаний Молдовы

M-208-96  
ISBN

©Изд-во Эврика, 2010  
© Соломон Д.И., 2010



**НАУМ ЗУСЕЛЕВИЧ ШОРА (1937 – 2006)** – один из основоположников направления недифференцируемой оптимизации в математическом программировании. Автор 10 монографий и более 200 статей.

Родился 1 января 1937 г. в г. Киеве. После окончания в 1958 г. Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко работал в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины (с 1983 по 1990 г. – заведующим лабораторией, с 1990 по 2006 г. – заведующим отделом). Профессор (1989), член-корреспондент (1990), академик (1997) Национальной академии наук Украины. Лауреат Государственных премий УССР (1973), СССР (1981), Украины (1993, 1999), премий НАН Украины имени В. М. Глушкова (1987), имени В. С. Михалевича (1997).

Работы Н. З. Шора положили начало численным методам оптимизации недифференцируемых функций и существенно повлияли на развитие линейного, нелинейного, дискретного и стохастического программирования. Разработанные им методы получили мировую известность и способствовали становлению Института кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины как одного из мировых лидеров в области теории и практики методов оптимизации.

# «НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

П. И. Стецюк

## МЕТОДЫ ЭЛЛИпсоИДОВ И $r$ -АЛГОРИТМЫ

Кишинэу • Эврика • 2014

484

### СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ..... 6

#### РАЗДЕЛ I

##### Метод эллипсоидов и его обобщения

Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования (Шор, 1977) ..... 14

Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования (Шор, Гершович, 1979) ..... 19

Метод эллипсоидов, его обобщения и приложения (Гершович, Шор, 1982) ..... 30

Использование операции растяжения пространства в задачах минимизации выпуклых функций (Шор, 1970) ..... 51

#### РАЗДЕЛ II

##### Приближенный метод эллипсоидов

Приближенный метод эллипсоидов (Стецюк, 2003) ..... 66

Об одном эллипсоиде для внешней аппроксимации  $n$ -мерного полушара (Стецюк, 2003) ..... 74

Модификация метода эллипсоидов (Стецюк, 2003) ..... 83

On a modification of ellipsoid method (Stetsyuk, Nurminski, 2010) ..... 86

Об одном методе нахождения  $L_p$ -решения системы линейных уравнений (Стецюк, Колесник, Березовский, 2003) ..... 92

К ускорению метода эллипсоидов с помощью использования шарового слоя (Стецюк, Буганцов, 2002) ..... 100

485

### РАЗДЕЛ III

#### $r$ -алгоритмы и эллипсоиды

К вопросу сходимости  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритма (Стецюк, 1995) ..... 110

К обоснованию сходимости алгоритмов с растяжением пространства (Стецюк, 1996) ..... 116

$r$ -алгоритмы и эллипсоиды (Стецюк, 1996) ..... 121

Метод центров тяжести простых тел (Стецюк, 1996) ..... 150

К методам эллипсоидов (Стецюк, 1999) ..... 177

Об ускорении сходимости методов эллипсоидов (Стецюк, 2001) ..... 185

#### РАЗДЕЛ IV

##### Ортогонализирующие линейные операторы

Ортогонализирующие линейные операторы в выпуклом программировании I (Стецюк, 1997) ..... 192

Ортогонализирующие линейные операторы в выпуклом программировании II (Стецюк, 1997) ..... 220

Классические фейеровские методы с преобразованием пространства (Стецюк, 1996) ..... 239

Об одном способе ускорения метода ортогонального субградиентного спуска (Стецюк, 1998) ..... 245

Об одном методе для нахождения допустимой точки выпуклого неравенства (Стецюк, 2000) ..... 253

К методам решения плохообусловленных систем линейных уравнений (Стецюк, 2001) ..... 261

# «НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина

## НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ И $r$ -АЛГОРИТМЫ

Киев • Наукова думка • 2015

### Серия научных публикаций «Недифференцируемая оптимизация и ее приложения», посвященная Науке Зуслевичу Шору

Данная серия научных публикаций посвящена современным теоретическим и практическим достижениям в тех или иных направлениях, связанных с научным наследием академика Н. З. Шора. Первая книга этой серии – монография Д. И. Соломона „Дробное программирование и недифференцируемая оптимизация“ была опубликована в 2010 году. Она посвящена методам решения задач дробного программирования с помощью субградиентных алгоритмов в сочетании со схемами декомпозиции. Значительное внимание в монографии уделено задачам транспортного типа больших размерностей.

Вторая публикация этой серии – книга П. И. Стецюка „Методы эллипсоидов и  $r$ -алгоритмы“ (2014). В ней представлены исследования по развитию методов эллипсоидов, которые являются частным случаем предложенных Н. З. Шором алгоритмов с преобразованием пространства. Основное внимание уделено специальным видам однооранговых линейных операторов, построению ускоренных модификаций методов эллипсоидов и исследованию их связи с  $r$ -алгоритмами и другими методами минимизации негладких функций.

Книга «Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и  $r$ -алгоритмы» продолжает данную серию научных публикаций. В книге представлены некоторые аспекты теории и приложений непрерывных задач оптимального разбиения множеств как еще одного источника, порождающего негладкие задачи, для решения которых применяются различные варианты  $r$ -алгоритмов. Их использование дает уникальную возможность доводить до численных результатов решение сложных задач нового раздела бесконечномерного математического программирования – теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Особое внимание уделяется теоретическим и практическим приложениям этой теории.

К непрерывным задачам оптимального разбиения заданного множества на некоторые его подмножества сводятся бесконечномерные транспортные задачи, бесконечномерные задачи размещения и многие другие. Впервые бесконечномерный аналог транспортной задачи был рассмотрен Л. В. Канторовичем в трехстраничной статье "О перемещении масс" (ДАН СССР, 1942), где предложен и обоснован метод потенциалов с критерием на минимальное перемещение масс. В конце статьи приводятся две задачи – конечномерная задача о железнодорожных перевозках и бесконечномерная задача о выравнивании площади аэродрома, которые носят прикладной характер.

Об этой статье Т. Кулманс (вместе с Л. В. Канторовичем удостоен Нобелевской премии 1975 года за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов) 12 ноября 1956 г. писал: «Дорогой профессор Канторович. Недавно мне представился случай ознакомиться с экземпляром Вашей статьи «О перемещении масс» в Докладах Академии Наук СССР за 1942 г. Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, которое началось в период с 1941 г. и продолжается по настоящее время. Я прилагаю к письму краткий перечень наиболее важных статей, появившихся в американской литературе . . . В то же время я хотел бы отметить, что Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах».<sup>1</sup>

Уже одно это доказывает актуальность и востребованность тематики книги Е. М. Киселевой и Л. С. Коряшкиной. Кроме того, именно транспортные задачи обусловили первый субградиентный метод, предложенный в статье Н. З. Шора "Применение градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи" 1962 года<sup>2</sup>. Он фактически является методом потенциалов, где под потенциалом следует понимать "сферу влияния пункта производства". Вот что пишет об этом алгоритме в статье 1962 года Н. З. Шор: "С математической точки зрения вычислительный процесс является разновидностью градиентного метода в пространстве потенциалов. В заключение показывается, что процесс решения обладает интересной эргодической закономерностью, что позволяет подбирать параметры процесса для получения решения с заданной точностью." (Шор, 2012, 11с).

Надеемся, что данная серия научных публикаций пополнится новыми работами в области недифференцируемой оптимизации, а книга Е. М. Киселевой и Л. С. Коряшкиной окажется полезной для специалистов по математическому программированию, и они найдут в ней ряд оригинальных идей для построения эффективных алгоритмов решения бесконечномерных экстремальных задач.

Редакционная коллегия

<sup>1</sup> Канторович Л. В. Математико-экономические работы / Л. В. Канторович. – Новосибирск: Наука, 2011. – 760 с. – (Избранные труды).

<sup>2</sup> Шор Н. З. Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации: Сб. избр. тр. – Кишинев: Эврика, 2012. – 270 с.

# «НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

П.И. Стецюк

## ДВОЙСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Кишинэу • Эврика • 2018

501

### СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ..... 6

#### РАЗДЕЛ I

Двойственные оценки в квадратичных задачах  
(пионерские работы Шора)

О методе получения оценок в квадратичных экстремальных  
задачах с булевыми переменными (Шор, Давыдов, 1985) ..... 18

Квадратичные оптимизационные задачи (Шор, 1987) ..... 26

Об одном подходе к получению глобальных экстремумов  
в полиномиальных задачах математического  
программирования (Шор, 1987) ..... 44

Об одном классе оценок глобального минимума  
полиномиальных функций (Шор, 1987) ..... 55

Задачи минимизации матричных функций и  
недифференцируемая оптимизация (Шор, 1995) ..... 62

#### РАЗДЕЛ II

Двойственные оценки Шора

Использование модификации  $\tau$ -алгоритма для нахождения  
глобального минимума полиномиальных  
функций (Шор, Стецюк, 1997) ..... 94

Использование  $\tau$ -алгоритма в задачах полуопределенного  
программирования (Шор, Стецюк, 1997) ..... 123

Нахождение глобальных минимумов полиномиальных функций с  
использованием двойственных квадратичных  
оценок (Шор, Стецюк, Крылов, 1997) ..... 130

Dual Solution of Quadratic-Type Problems by  
 $\tau$ -algorithm (subroutine DSQTP) (Shor, Stetsyuk, 2001) ..... 148

Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete  
optimization problems (Shor, Stetsyuk, 2002) ..... 150

502

#### РАЗДЕЛ III

Новые семейства функционально избыточных  
ограничений в квадратичных булевых задачах

О функционально избыточных ограничениях для булевых  
оптимизационных задач квадратичного типа (Стецюк, 2005) ..... 198

Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном  
взвешенном разрезе графа (Стецюк, 2006) ..... 204

Об уточнении лагранжевых двойственных оценок в бинарных  
и булевых квадратичных задачах (Стецюк, Пардалос, 2006) ..... 221

Об уточнении верхних оценок Н.З. Шора для числа  
независимости графа (Стецюк, 2007) ..... 230

Бинарный квадратичный многогранник и его  
аппроксимации (Стецюк, Золотых, 2010) ..... 232

О внешней аппроксимации бинарного и булевого  
квадратичных многогранников (Золотых, Стецюк, 2010) ..... 245

#### РАЗДЕЛ IV

Оценки для числа устойчивости графа

О новых лагранжевых двойственных оценках для числа  
устойчивости графа (Стецюк, Пардалос, Крошко, 2006) ..... 250

Об одной верхней оценке для взвешенного числа  
устойчивости графа (Стецюк, Бутенко, Березовский, 2007) ..... 261

Точная ЛП-оценка для взвешенного числа устойчивости  
 $t$ -совершенных графов (Стецюк, Ляшко, Нурминский, 2009) ..... 271

О новых свойствах оценок Шора для взвешенного числа  
устойчивости графа (Стецюк, 2008) ..... 284

ЛП-ориентированная верхняя оценка для числа устойчивости  
графа на основе  $p$ -колес (Стецюк, Бутенко, Лиховид, 2008) ..... 298

Об ЛП-ориентированных верхних оценках для взвешенного числа  
устойчивости графа (Стецюк, Лиховид, 2009) ..... 310

Оценки Н.З. Шора в квадратичных экстремальных задачах и их  
применение в комбинаторной оптимизации (Стецюк, 2010) ..... 333

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**