

Масштабування даних для задачі побудови кривої в натуральній параметризації з кубічною кривою

Петро Стецюк, Ольга Хом'як, Володимир Жидков

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Міжнародний науковий симпозиум
присвячений 100-річчю від дня народження
академіка В.М. Глушкова
"Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLVIII)"
19-22 вересня 2023 року

- 1 Постановка задачі та її витоки
- 2 Система нелінійних рівнянь та оптимізаційна задача
- 3 Масштабування та обчислювальний експеримент

Зміст

- 1 Постановка задачі та її витоки
- 2 Система нелінійних рівнянь та оптимізаційна задача
- 3 Масштабування та обчислювальний експеримент

Витоки проблеми: аеродинаміка

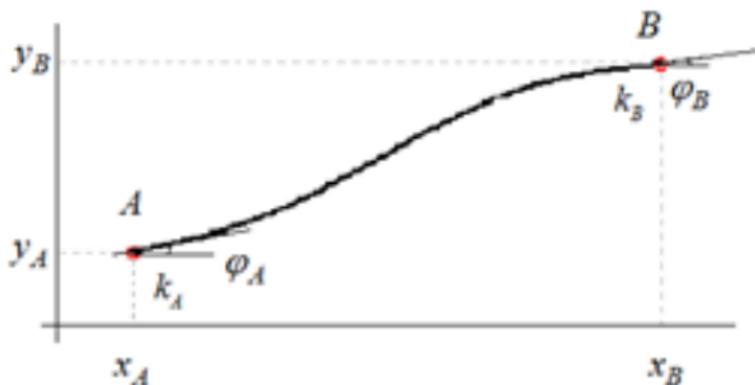
Плоскі криві в натуральній параметризації широко використовуються на практиці, де потрібно описати потоки, плавну траєкторію, шлях або форми, отримані з них.

Похідними формами є, наприклад, фрагменти аеродинамічних та гідродинамічних профілів, сопла, крила, гвинти та лопатки турбіни.

Загальновідомо, що будь-яка негладкість аеродинамічної поверхні може викликати аеродинамічну нестабільність. У надзвуковому режимі ситуація погіршується. Метод побудови кривих повинен мати вбудовану можливість обмежувати кривизну поверхні та забезпечувати гладкі межі.

Постановка задачі

Потрібно так з'єднати точки $A(x_A, y_A)$ та $B(x_B, y_B)$ кривою лінією у натуральній параметризації, де кривина $k(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$ має кубічну залежність по довжині дуги, щоб забезпечити в точках A та B задані значення кутів нахилу дотичних φ_A, φ_B та задані значення кривин k_A, k_B . Кути вимірюються в радіанах.



Цією проблематикою займаються:

Миколаївська школа:

-  Борисенко В., Агарков О., Палько К., Палько М. Моделювання плоских кривих у натуральній параметризації. *Геометричне моделювання та інформаційні технології*. 2016. № 1. С. 21-27.
-  Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Геометричне моделювання s-подібних скелетних ліній профілів лопаток осьових компресорів. *Вісник двигунобудування*. 2018. № 1. С. 45–52.

Інститут кібернетики:

-  Нестеренко А., Дученко О. Квазіньютонівські методи для моделювання плоских кривих. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. 33. С. 62-67.

Зміст

- 1 Постановка задачі та її витоки
- 2 Система нелінійних рівнянь та оптимізаційна задача
- 3 Масштабування та обчислювальний експеримент

Система нелінійних рівнянь

$$x_B = x_A + \int_0^S \cos \left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \times s \right) ds, \quad (1)$$

$$y_B = y_A + \int_0^S \sin \left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \times s \right) ds, \quad (2)$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{aS^4}{4} + \frac{bS^3}{3} + \frac{cS^2}{2} + d \times S, \quad (3)$$

$$k_A = d, \quad k_B = aS^3 + bS^2 + cS + d, \quad (4)$$

$$k(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$$

Функції нев'язок рівнянь (1)-(4)

$$f_1(a, b, c, S) = x_B - x_A - \int_0^S \cos \left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + k_A \times s \right) ds,$$

$$f_2(a, b, c, S) = y_B - y_A - \int_0^S \sin \left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + k_A \times s \right) ds,$$

$$f_3(a, b, c, S) = \varphi_B - \varphi_A - \frac{aS^4}{4} - \frac{bS^3}{3} - \frac{cS^2}{2} - k_A \times S,$$

$$f_4(a, b, c, S) = k_B - aS^3 - bS^2 - cS - k_A.$$

$$S \geq S_{min} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Оптимізаційна задача: невідомі a^* , b^* , c^* , S^*

$$f^* = f(a^*, b^*, c^*, S^*) = \min_{a, b, c, S} \{f(a, b, c, S) = \sum_{i=1}^4 |f_i(a, b, c, S)|\}, \quad (5)$$

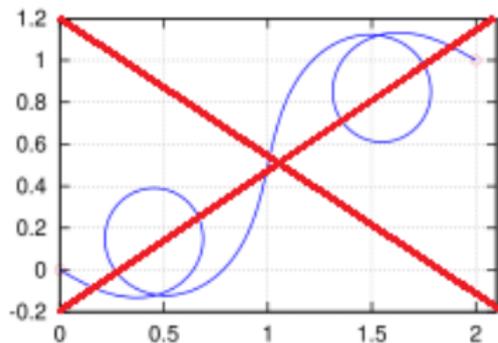
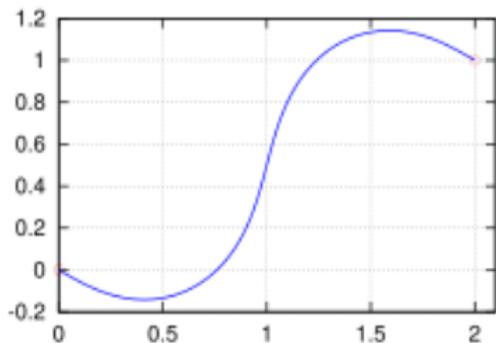
$$S_{min} \leq S \leq S_{max}, \quad (6)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_A + a \frac{i^4 s^4}{4N^4} + b \frac{i^3 s^3}{3N^3} + c \frac{i^2 s^2}{2N^2} + k_A \frac{is}{N} \leq \frac{\pi}{2}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Цільова функція (5) є кусково-гладкою та забезпечує мінімізацію суми модулів функцій нев'язок рівнянь (1)–(4).
 Обмеження (6) гарантують додатні значення довжини S .
 Обмеження (7) гарантує відсутність циклів.

Єдиність розв'язку

Обмеження (7) забезпечує існування єдиного розв'язку для задачі (5)–(7) незалежно від вибору величини S_{max} .



Метод розв'язання задачі (5)-(7)

На основі модифікації r-алгоритму Шора розроблено метод з управлінням параметрами:

α – коефіцієнт розтягу простору,

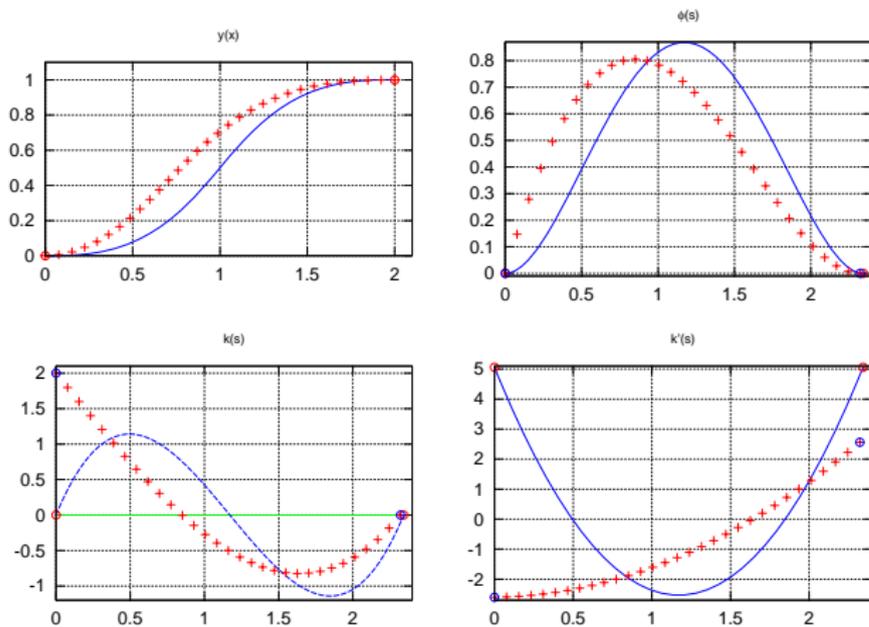
h_0 – крок на першій ітерації,

q_1 – коефіцієнт зменшення кроку на подальших ітераціях,

ε_x – критерій зупинки (зупинка за аргументом),

maxitn – максимальна кількість ітерацій.

Стартову точку вибрано рівною $(0, 0, 0, S_{min})^T$.

Два розв'язки задачі (5)-(7): $k_A = 0$ і $k_A = 2$ 

Зміст

- 1 Постановка задачі та її витоки
- 2 Система нелінійних рівнянь та оптимізаційна задача
- 3 Масштабування та обчислювальний експеримент**

Лема ($\mu > 0$) про масштабування

Якщо a^*, b^*, c^*, d^*, S^* є розв'язком системи (1)-(4), то $a^{**} = a^*/\mu^4$, $b^{**} = b^*/\mu^3$, $c^{**} = c^*/\mu^2$, $d^{**} = d^*/\mu$, $S^{**} = \mu S^*$ буде розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\mu x_B = \mu x_A + \int_0^S \cos \left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \times s \right) ds, \quad (8)$$

$$\mu y_B = \mu y_A + \int_0^S \sin \left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \times s \right) ds, \quad (9)$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{aS^4}{4} + \frac{bS^3}{3} + \frac{cS^2}{2} + d \times S, \quad (10)$$

$$\mu k_A = d, \quad \mu k_B = aS^3 + bS^2 + cS + d. \quad (11)$$

Приклади задач для експерименту

Погано масштабовані задачі ($\mu = 10$)

$$(I) \quad x_A = 0, y_A = 20, \varphi_A = \frac{\pi}{18}, k_A = 0, \\ x_B = 30, y_B = 40, \varphi_B = \frac{\pi}{36}, k_B = 0,$$

$$(II) \quad x_A = 0, y_A = 20, \varphi_A = \frac{\pi}{18}, k_A = 0.1, \\ x_B = 30, y_B = 40, \varphi_B = \frac{\pi}{36}, k_B = -0.05.$$

Добре масштабовані задачі ($\mu = 1$)

$$(III) \quad x_A = 0, y_A = 2, \varphi_A = \frac{\pi}{18}, k_A = 0, \\ x_B = 3, y_B = 4, \varphi_B = \frac{\pi}{36}, k_B = 0,$$

$$(IV) \quad x_A = 0, y_A = 2, \varphi_A = \frac{\pi}{18}, k_A = 0.01, \\ x_B = 3, y_B = 4, \varphi_B = \frac{\pi}{36}, k_B = -0.005.$$

Обчислювальний експеримент

Витрати g -алгоритму на пошук розв'язків

Задача ($\mu = 10$)/ Задача ($\mu = 1$)	Задача (I)/Задача (III)		Задача (II)/Задача (IV)	
	$\varepsilon_x = 10^{-8}$	$\varepsilon_x = 10^{-10}$	$\varepsilon_x = 10^{-8}$	$\varepsilon_x = 10^{-10}$
itn_1/itn_2	211/133	242/154	278/131	314/151
nfg_1/nfg_2	626/173	696/201	1039/183	1107/211
Δa^*	3.2e-09	8.9e-12	1.3e-06	2.0e-09
Δb^*	2.5e-09	3.7e-12	1.6e-07	2.6e-10
Δc^*	1.8e-09	1.3e-11	2.4e-08	4.2e-11
ΔS^*	1.3e-10	6.0e-12	7.5e-10	3.1e-12

Для розв'язання задач з погано масштабованими даними (задачі (I) та (II)) потрібно майже в два рази більше ітерацій та майже в п'ять разів більше обчислень узагальненого градієнта, ніж для розв'язання задач з добре масштабованими даними (III) та (IV).

Висновок:

Метод може бути використаний

для профілювання різноманітних гідро- та аеродинамічних поверхонь та перехідних каналів змінного перерізу з необхідними геометричними властивостями.

Його можна використовувати для побудови S-подібних фрагментів зовнішнього контуру сопла і контуру центрального тіла. Вибір параметрів кривої дозволяє контролювати форму кривої таким чином, щоб в базових точках характеристики кривої відповідали заданим характеристикам проектованого профілю.

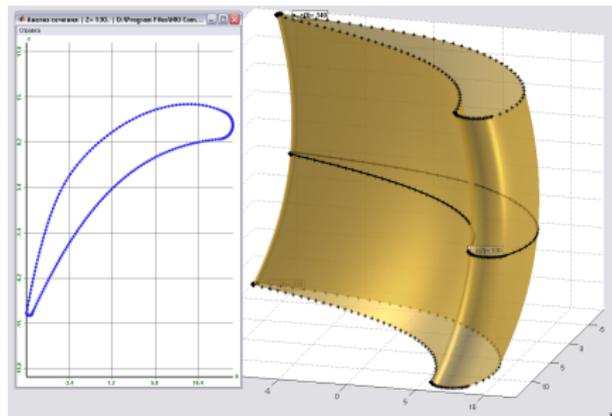
Література:

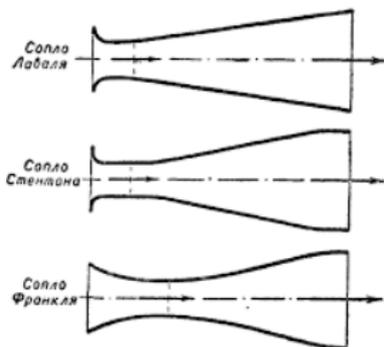
-  Stetsyuk P.I., Tkachenko O.V., Zhydkov V.O. Using Shor's r-algorithm for building naturally parametrized curve having cubic curvature. *Proceedings of the 7-th International Conference on Control and Optimization with Industrial Application*, Baku, Azerbaijan, 26-28 August, 2020. Vol. I. P. 389-391.
-  Khomiak O., Stetsyuk P., Zhydkov V., Infante L. Using Optimization to Construct Naturally Parametrized Curve with Cubic Curvature. *In: Arsenyeva, O., Romanova, T., Sukhonos, M., Tsegelnyk, Y. (eds) Smart Technologies in Urban Engineering. STUE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023. Vol 536. Springer, Cham. P. 14–24.

Volkswagen Foundation
(грант № 97 775)

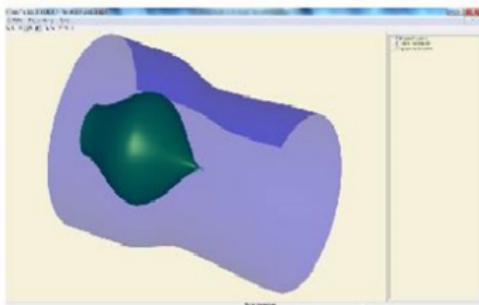
Дякую за увагу!

Backup Slides: ППП "Поверхня" (перо лопатки)

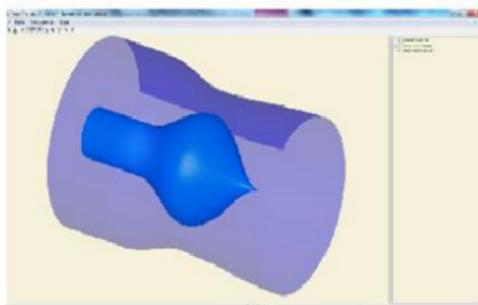




Сопло з центральним тілом (ЦТ)



ЦТ - ліворуч



ЦТ - праворуч