Двоетапна транспортна задача з умовами на потреби споживачів та пропускні спроможності проміжних пунктів

П.І. Стецюк, О.М. Хом'як

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

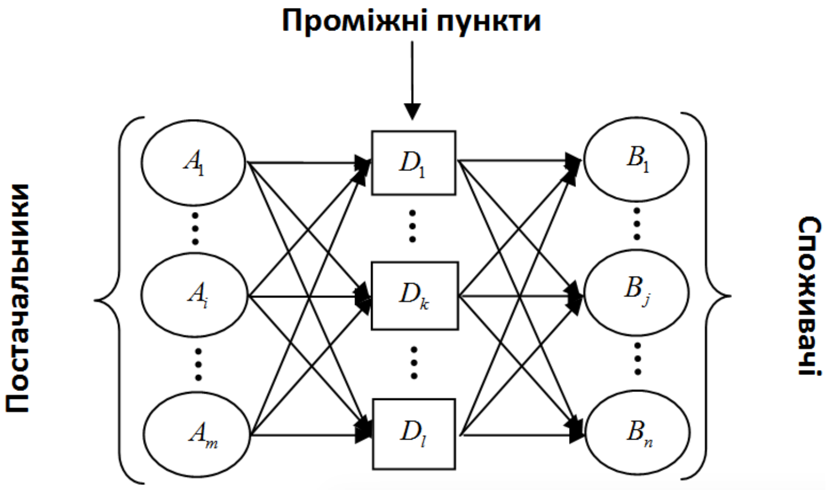
XXV Міжнародний науково-практичний семінар
"Комбінаторні конфігурації та їхні застосування"

14-16 червня 2023
Запоріжжя - Кропивницький

Зміст

Зміст

Система зв'язків "A → D → B"



Постановка задачі

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \ldots, A_m$ є $a_1, \ldots, a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1, \ldots, B_n$, задовольнивши їх потреби $b_1, \ldots, b_n$.
Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів $D_1, \ldots, D_l$.

Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j.

Змінні задачі

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k

y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j

Формулювання задачі

$$f^*_{xy} = \min_{x,y} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{i=1}^{n} y_{kj} = 0, \quad k = 1, \ldots, l, \quad (4)$$

$$x_{ik} \geq 0, y_{kj} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, l, j = 1, \ldots, n. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) є задачею лінійного програмування з $(m+n) \times l$ змінними та $m+n+l$ обмеженнями

Цільова функція та обмеження

Цільова функція (1) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів.

Обмеження (2) означають необхідність транспортування усієї продукції $a_1, \ldots, a_m$ із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) - що споживачам потрібно доставити необхідну продукцію $b_1, \ldots, b_n$ з проміжних пунктів.

Обмеження (4) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Умова існування розв'язку

Твердження 1 [1]

Обмеження (2)–(5) є сумісними, якщо виконується умова:

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (6)$$

1. Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. *Дослідження операцій: Навч. посіб.* – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.

Зміст

Постановка задачі

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \dots, A_m$ є $a_1, \dots, a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1, \dots, B_n$ через l проміжних пунктів $D_1, \dots, D_l$, для яких $d_1^{up}, \dots, d_l^{up}$ задають їх максимальні спроможності. Потреби споживачів невідомі, задано їх нижні $b_1^{low}, \dots, b_n^{low}$ та верхні $b_1^{up}, \dots, b_n^{up}$ межі.

Потрібно знайти оптимальні план транспортування продукції та потреби споживачів, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від D_k до споживача B_j.

Змінні задачі

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k;

y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j;

z_j – кількість продукції, яка постачається споживачу B_j.

Формулювання задачі

$$f^*_{xyz} = \min_{x,y,z} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = z_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{i=1}^{n} y_{kj} = 0, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leq d_k^{up}, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{12}$$

$$b_j^{low} \leq z_j \leq b_j^{up}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

$$x_{ik} \geq 0, y_{kj} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, l, j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Цільова функція та обмеження

Цільова функція (7) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів.

Обмеження (8) означають транспортування $a_1, \ldots, a_m$ одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (9) - що споживачам потрібно доставити невідомі об'єми $z_1, \ldots, z_n$ одиниць продукції з проміжних пунктів.

Обмеження (10) гарантують, що уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, буде обов'язково відправлена споживачам. Обмеження (11) задають верхні межі на пропускні спроможності проміжних пунктів. Обмеження (12) означає, що сумарна продукція постачальників дорівнює сумарній продукції виробників. Обмеження (13) задають нижні та верхні межі на невідомі потреби споживачів.

Умови існування розв'язку

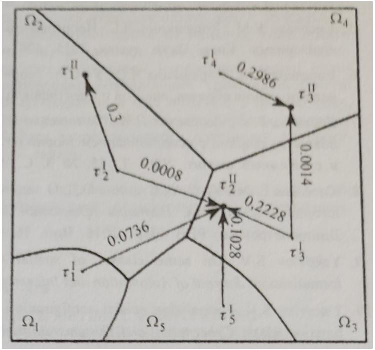
Твердження 2

Система обмежень (8)–(14) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконуються умови:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j^{up}, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{k=1}^{l} d_k^{up}. \tag{15}$$

Зміст

Задача оптимального розбиття-розподілу [2]



2. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. *Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств.* // КиСА. – 2020. – №1. – С. 3–15.

Постановка задачі (модельний приклад [2])

Деякий постачальник однорідного ресурсу, неперервно розподіленого зі щільністю $\rho(x) = 1$ в області Ω, постачає його для зберігання в п'ять пунктів першого етапу. Задано координати цих пунктів та координати пунктів другого етапу (споживання ресурсу), що зберігався в пунктах першого етапу.

Потрібно розбити множину Ω на сфери обслуговування в п'яти пунктах першого етапу і визначити об'єми перевезень ν_{ij}, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$, від пунктів першого етапу в пункти другого етапу так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування ресурсу від постачальників в пункти першого етапу і доставки ресурсу в пункти другого етапу.

Формулювання задачі [2]

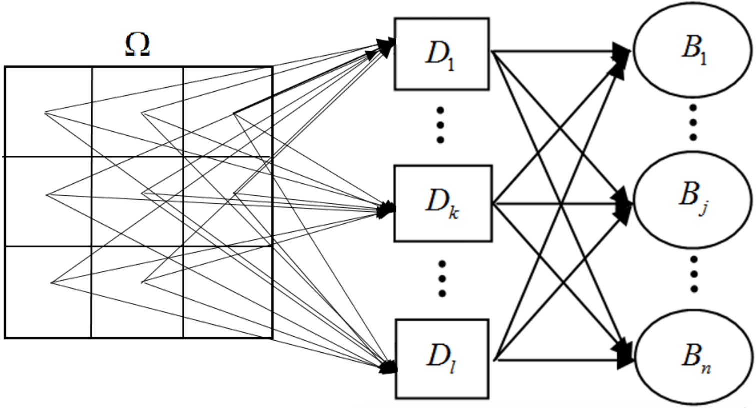
$$\sum_{i=1}^{5}\int_{\Omega_i} c_i^I(x_i,\tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})\nu_{ij} \to \min, \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{3}\nu_{ij} = \int_{\Omega_i}\rho(x)dx, \quad i=\overline{1,5}, \qquad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{5}\nu_{ij} = b_j^{II}, \quad j=\overline{1,3}, \qquad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{5}\int_{\Omega_i}\rho(x)dx = \sum_{j=1}^{3} b_j^{II}. \qquad (19)$$

Розбиття Ω на квадратні ділянки



Для сітки 500×500 ЛП-задачі (7) – (14) мають **1.250.020 змінних та 250.022 обмежень.**

Два оптимальні розбиття Ω (солвер Gurobi)

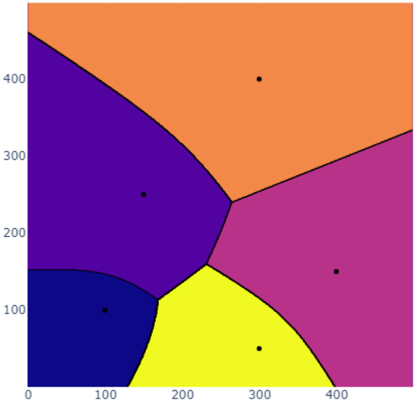


Рис. 1

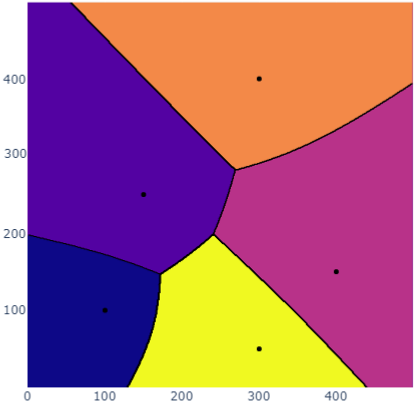


Рис. 2

На рис. 1 представлено розбиття множини Ω для $d_k^{up} = \sum_{i=1}^{m} a_i$, а на рис. 2 – для $d_k^{up} = 0.25 \times \sum_{i=1}^{m} a_i$, $k = 1, \ldots, l$.

Плани перевезень (рис.1 та рис. 2)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.09066 & 0.0000 \\ 0.22896 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.232524 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.342172 \\ 0.0000 & 0.105684 & 0.0000 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.112212 & 0.0000 \\ 0.2500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2500 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2500 \\ 0.0000 & 0.137788 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Об'єми споживання в пунктах другого етапу

для рис. 1: 0.22896; 0.428868; 0.342172,
$(f^*_{xyz} = 0,477676,\ time = 15$ секунд);
для рис. 2: 0.25; 0.5; 0.25,
$(f^*_{xyz} = 0,485096,\ time = 23$ секунди).

Висновки

Розроблено математичну модель двоетапної транспортної задачі з двосторонніми обмеженнями на потреби споживачів та верхніми межами на пропускні спроможності проміжних пунктів.

Її частковим випадком є класична двоетапна транспортна задача, яка визначає найбільш економічний план транспортування продукції від постачальників до споживачів.

Наведено результати обчислювальних експериментів для дискретного аналога модельної задачі оптимального розбиття-розподілу множини на підмножини з заданими центрами підмножин.

Література

1. *Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб.// К.: Центр учбової літератури. – 2007. – 256 с.*

2. *Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. // Кибернетика и системный анализ. – 2020. – №1. – С. 3–15.*

3. *Gurobi Optimization Inc.: Gurobi Optimizer Reference Manual. http://www.gurobi.com/documentation/*

4. *Стецюк П.І., Хом'як О.М., Ляшко В.І. Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів. // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2022. – Т. 1.*

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!