Двоетапна транспортна задача з двосторонніми обмеженнями на потреби споживачів

П.І. Стецюк, О.М. Хом'як, А.В. Івлічев

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

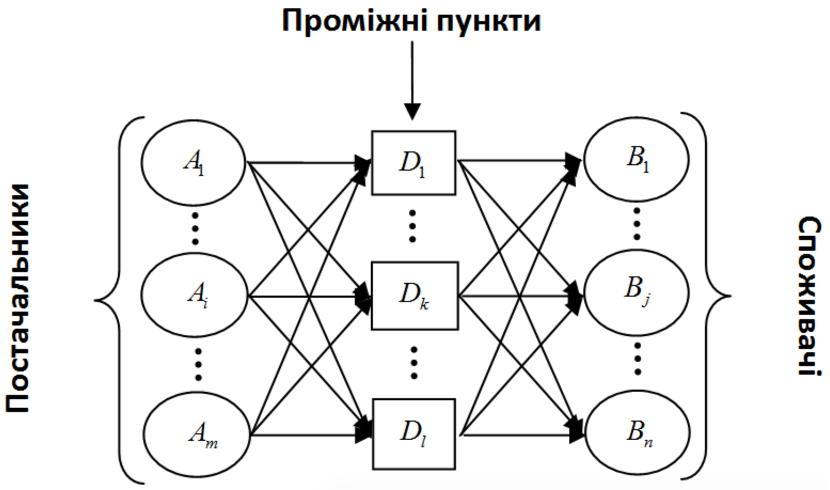
І міжнародна науково-практична конференція
"Цифрові технології в енергетиці і автоматиці"

08 червня 2023, Київ

Зміст

Зміст

Система зв'язків "A $\to$ D $\to$ B"



Постановка задачі

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \dots, A_m$ є $a_1, \dots, a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1, \dots, B_n$, задовольнивши їх потреби $b_1, \dots, b_n$.
Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів $D_1, \dots, D_l$.

Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j.

Змінні задачі

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k

y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j

Формулювання задачі

$$f^*_{xy} = \min_{x,y} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{i=1}^{n} y_{kj} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (4)$$

$$x_{ik} \geq 0, y_{kj} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, l, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) є задачею лінійного програмування
з $(m+n)\times l$ змінними та $m+n+l$ обмеженнями

Цільова функція та обмеження

Цільова функція (1) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти.

Обмеження (2) означають необхідність транспортування усієї продукції $a_1, \ldots, a_m$ із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) - що споживачам потрібно доставити необхідну продукцію $b_1, \ldots, b_n$ з проміжних пунктів.

Обмеження (4) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Умови сумісності

Твердження 1 [1]

Обмеження (2)–(5) є сумісними, якщо виконується умова:

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{6}$$

Рівність (6) означає, що обмеження (2) – (5) є лінійно залежними, тому одну довільну рівність з обмежень (2), (3) та (4) може бути вилучено.

1. Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. *Дослідження операцій: Навч. посіб.* – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.

Зміст

Постановка задачі

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \ldots, A_m$ є $a_1, \ldots, a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1, \ldots, B_n$ через l проміжних пунктів $D_1, \ldots, D_l$.
Об'єми потреб споживачів невідомі, задано їх нижні $b_1^{low}, \ldots, b_n^{low}$ та верхні $b_1^{up}, \ldots, b_n^{up}$ межі.

Потрібно знайти оптимальні план транспортування продукції та потреби споживачів, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j.

Змінні задачі

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k;

y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j;

z_j – кількість продукції, яка постачається споживачу B_j.

Формулювання задачі

$$f^*_{xyz} = \min_{x,y,z} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = z_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{i=1}^{n} y_{kj} = 0, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{11}$$

$$b_j^{low} \le z_j \le b_j^{up}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$x_{ik} \ge 0, y_{kj} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, l, j = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Цільова функція та обмеження

Цільова функція (7) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до проміжних пунктів та від проміжних пунктів до споживачів.

Обмеження (8) означають транспортування $a_1, \ldots, a_m$ одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (9) - що споживачам потрібно доставити невідомі об'єми $z_1, \ldots, z_n$ одиниць продукції з проміжних пунктів.

Обмеження (10) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам. Обмеження (11) задає умову на те, щоб сумарна продукція постачальників дорівнювала сумарній продукції виробників. Обмеження (12) задає нижні та верхні межі на невідомі потреби споживачів.

Умови сумісності

Твердження 2 [2]

Обмеження (8)–(13) є сумісними, якщо виконується умова:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j^{up}. \tag{14}$$

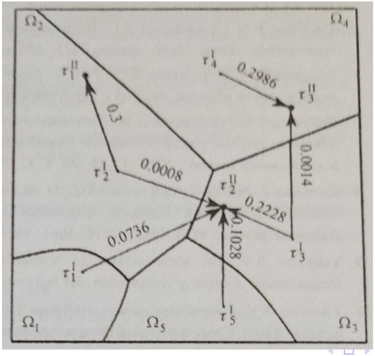
Умова (14) означає, що обмеження (8) – (11) є лінійно залежними, тому одну з рівностей в обмеженнях (8) та (10) може бути вилучено, причому довільну.

2. Стецюк П.І., Хом'як О.М., Ляшко В.І. *Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів.* // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. 2022. Т. 1.

Зміст

Задача оптимального розбиття-розподілу [3]

3. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. *Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств.* // Кибернетика и системный анализ. – 2020. – №1. – С. 3–15.



Постановка задачі

Деякий постачальник однорідного ресурсу, неперервно розподілений зі щільністю $\rho(x) = 1$ в області Ω, постачає його в п'ять пунктів (першого етапу) для первинної переробки чи зберігання. Задано координати цих пунктів та координати пунктів (другого етапу) споживання ресурсу, що був перероблений (зберігався) в пунктах першого етапу.

Потрібно розбити множину Ω постачальників ресурсу на сфери їх обслуговування в п'яти пунктах першого етапу і визначити об'єми перевезень v_{ij}, $i = \overline{1, 5}$, $j = \overline{1, 3}$, від пунктів першого етапу в пункти споживання другого етапу так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування ресурсу від постачальників в пункти першого етапу і доставки переробленого ресурсу в пункти другого етапу.

Формулювання задачі

$$\sum_{i=1}^{5} \int_{\Omega_i} c_i^I(x_i, \tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})\nu_{ij} \to \min, \tag{15}$$

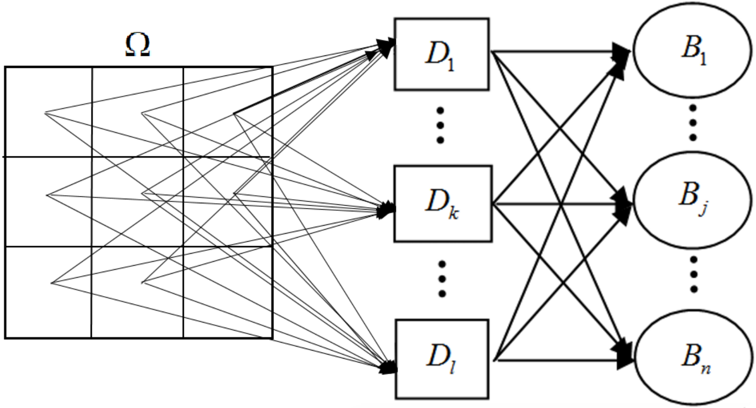
$$\sum_{j=1}^{3} \nu_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x)dx, \quad i = \overline{1,5}, \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{5} \nu_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1,3}, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{5} \int_{\Omega_i} \rho(x)dx = \sum_{j=1}^{3} b_j^{II}. \tag{18}$$

Зміст

Система зв'язків "$\Omega \to D \to B$"



Обчислювальний експеримент

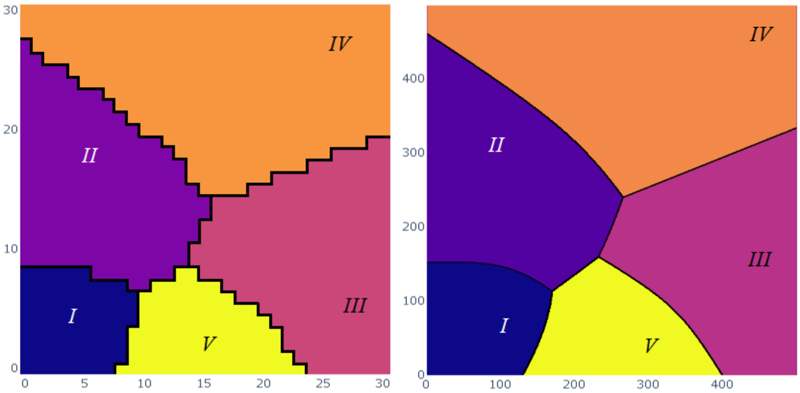
Два розбиття Ω на квадратні ділянки:

31×31 та 500×500.

Задачі (7) – (13) мають

4.823 змінних та 976 обмежень для сітки 31×31,
1.250.018 змінних та 250.015 обмежень для сітки 500×500.

Оптимальні розбиття Ω: $0 \le b_i \le 1,\ i = \overline{1,3}$



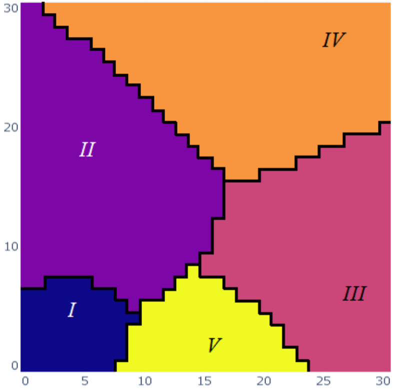
а) б)

План перевезення

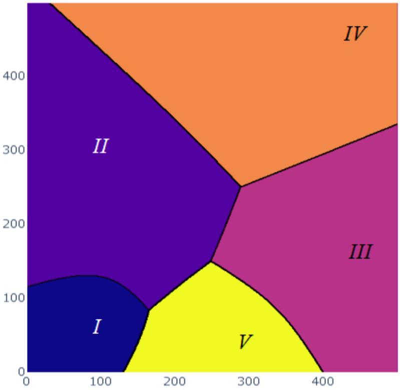
$$
v_a = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0832466 & 0.0000 \\ 0.220604 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.238293 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.361082 \\ 0.0000 & 0.0967742 & 0.0000 \end{pmatrix}, \; v_б = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.09066 & 0.0000 \\ 0.22896 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.232524 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.342172 \\ 0.0000 & 0.105684 & 0.0000 \end{pmatrix}.
$$

Об'єми виробництва 0.0832466; 0.220604; 0.238293; 0.361082; 0.0967742 та об'єми споживання у пунктах другого етапу 0.220604; 0.418314; 0.361082 (рис. а); об'єми виробництва 0.09066; 0.22896; 0.232524; 0.342172; 0.105684 та об'єми споживання у пунктах другого етапу 0.22896; 0.428868; 0.342172 (рис. б).

Оптимальні розбиття Ω: $b_1^{low} = b_1^{up} = b_1 = 0.3$, $b_2^{low} = b_2^{up} = b_2 = 0.4$, $b_3^{low} = b_3^{up} = b_3 = 0.3$



а)



б)

План перевезення

$$v_a = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0686785 & 0.0000 \\ 0.3000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.23975 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 \\ 0.0000 & 0.0915713 & 0.0000 \end{pmatrix}, \quad v_б = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.07418 & 0.0000 \\ 0.3000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.226712 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 \\ 0.0000 & 0.099108 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Об'єми виробництва 0.0686785; 0.3; 0.23975; 0.3; 0.0915713 та об'єми споживання у пунктах другого етапу 0.3; 0.4; 0.3 (рис. а), об'єми виробництва 0.07418; 0.3; 0.226712; 0.3; 0.099108 та об'єми споживання у пунктах другого етапу 0.3; 0.4; 0.3 (рис. б).

Висновки

Представлено математичну модель двоетапної транспортної задачі з двосторонніми обмеженнями на потреби споживачів.

Її частковим випадком є класична двоетапна транспортна задача, яка визначає найбільш економічний план транспортування продукції від постачальників до споживачів.

Наведено результати обчислювальних експериментів з використанням солвера Gurobi для дискретного аналога модельної задачі оптимального розбиття-розподілу множини на підмножини з заданими центрами підмножин.

Література

1. *Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб.// К.: Центр учбової літератури. – 2007. – 256 с.*

2. *Стецюк П.І., Хом'як О.М., Ляшко В.І. Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів. // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2022. – Т. 1.*

3. *Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. // Кибернетика и системный анализ. – 2020. – №1. – С. 3–15.*

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!