[1] **П.І. Стецюк**
д. ф.-м. н., с.н.с., завідувач відділу
[1] **А.А. Супрун**
аспірант
[1]*Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ*

ПРИСКОРЕННЯ GUROBI ТА CPLEX ДЛЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Задача комівояжера полягає в знаходженні найкоротшого гамільтонового циклу, який проходить через n вершин графа, відстань між якими $d_{ij} > 0$, $i, j = 1,...,n$, $i \neq j$. Вона може бути сформульована як задача змішаного булевого лінійного програмування такого вигляду [1]: знайти

$$d^* = \min_{x_{ij} \in \{0,1\}, z_{ij} \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$z_{ij} - (n-1) x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1,...,n, \quad i \neq j, \tag{3}$$

$$\sum_{i=2}^{n} z_{1i} = (n-1), \quad \sum_{i=2}^{n} z_{i1} = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} z_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} z_{ij} = 1, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Тут булева змінна x_{ij} дорівнює одиниці, якщо цикл містить дугу ij, та дорівнює нулю в протилежному випадку. Невід'ємна змінна z_{ij} задає величину потоку деякого умовного продукту від вершини i до вершини j.

Мінімізація цільової лінійної функції (1) відповідає пошуку гамільтонового циклу мінімальної довжини d^*. Обмеження (2) описують одноразовий вхід та одноразовий вихід для кожної із вершин. Обмеження (3), (4) і (5) гарантують зв'язність циклу. Обмеження (3) забезпечують перевезення продукту між вершинами i та j тільки в тому випадку, якщо $x_{ij} = 1$. Обмеження (4), (5) означають, що з першої вершини необхідно вивезти k одиниць продукту, залишаючи в кожній з вершин циклу лише одну одиницю продукту.

Задача (1)–(5) містить $N = 2n(n-1)$ змінних, з яких $n(n-1)$ є булеві, а $n(n-1)$ – неперервні, та $M = (n+1)^2$ обмежень, у тому числі $(3n+1)$ – лінійні рівності, а $n(n-1)$ – лінійні нерівності. Якщо $n = 100$, то кількості змінних та обмежень вимірюються десятками тисяч. Для таких розмірів задачу (1)–(5) можна успішно розв'язувати за допомогою сучасних програм Gurobi 9.1.1 та CPLEX 20.1.0.0 з NEOS-сервера [2]. Наша мета – оцінити час розв'язання задач комівояжера у формі (1)–(5) при $n = 100$ за допомогою вказаних програм.

При цьому ми проілюструємо вплив двох типів додаткових обмежень у формі лінійних нерівностей, які можна додати до задачі (1)–(5) з метою прискорення методів гілок та меж, які використовуються програмами Gurobi та CPLEX. Перший тип лінійних нерівностей має вигляд

$$x_{ij} + x_{ji} \le 1, \quad i, j = 1,\dots,n, \quad i \ne j, \tag{6}$$

і означає, що для кожної дуги ij потік можна пересилати тільки в одному, але довільному напрямку. Другий тип лінійних нерівностей має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} x_{ij} \le n, \tag{7}$$

і означає, що цикл містить не більше, ніж n дуг.

Якщо обмеження (6) або обмеження (7) додати до задачі (1)–(5), то це не змінить множину допустимих розв'язків, але забезпечить більш точні межі для тих ЛП-підзадач, які використовуються для відсікання тієї чи іншої гілки дерева рішень у методі гілок та меж. Часові витрати (в секундах) Gurobi та CPLEX для розв'язання задач (1)–(5), (1)–(5),(6) та (1)–(5),(7) для п'яти відомих графів kro100A $\div$ kro100E ($n = 100$) з бібліотеки TSPLIB представлено у таблиці.

Задача	d^*	t_{gurobi} (сек.) для задач			t_{cplex} (сек.) для задач		
		(1)-(5)	(1)-(5),(6)	(1)-(5),(7)	(1)-(5)	(1)-(5),(6)	(1)-(5),(7)
kro100A.tsp	21282	44.97	28.79	33.04	695.88	98.19	73.32
kro100B.tsp	22141	121.29	73.23	80.09	551.18	152.92	162.31
kro100C.tsp	20749	65.90	17.27	54.77	423.77	83.58	108.45
kro100D.tsp	21294	83.82	19.89	71.35	423.04	85.41	92.13
kro100E.tsp	22068	130.86	52.00	75.70	479.86	102.57	91.93

Розрахунки проводилися на NEOS-сервері. Тут *.tsp – назва відповідної евклідової задачі комівояжера; t_{gurobi}, t_{cplex} – час, затрачений на розв'язання задач програмами Gurobi 9.1.1 та CPLEX 20.1.0.0.

Висновок. Для 100-вершинних графів евклідові задачі комівояжера у формі (1)–(5) можна розв'язувати за декілька хвилин на сучасних ПЕОМ за допомогою нових версій **gurobi** та **cplex**. Використання додаткових лінійних обмежень (6) та (7) дозволяє прискорити процес розв'язування задачі в декілька разів. Описана техніка може бути використана для прискорення **gurobi** та **cplex** при знаходженні найкоротших k-вершинних шляхів та циклів [3].

Список використаних джерел

1. Алексеева Е.В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 131 с.

2. NEOS Server. https://neos-server.org/

3. Стецюк П.И. Формулировки задач для кратчайшего k-вершинного пути и кратчайшего k-вершинного цикла в полном графе // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – № 1. – С. 78–82.