

ЗАДАЧІ МОДЕРНІЗАЦІЇ ПРОПУСКНИХ ЗДАТНОСТЕЙ ДУГ ВІДМОВОСТІЙКОЇ МЕРЕЖІ

Стецюк П.І., Лиховид О.П., Омеляненко А.М.
stetsyukp@gmail.com

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

XVIII міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2020)»
18-20 листопада 2020 року, м. Дніпро

- 1 Вступ (про відмовостійкі мережі)
- 2 Пошкодження (поломка) мережі
- 3 Модернізація відмовостійкої мережі
- 4 Лінійні та булеві задачі A і P
- 5 GuRoBi: обчислювальні експерименти

Зміст

- 1 Вступ (про відмовостійкі мережі)
- 2 Пошкодження (поломка) мережі
- 3 Модернізація відмовостійкої мережі
- 4 Лінійні та булеві задачі A і P
- 5 GuRoBi: обчислювальні експерименти

Проект НТЦУ №1625 (2000 – 2005)

В [1] описано математичне та програмне забезпечення для ряду задач оптимального проектування та маршрутизації в мережах з врахуванням можливого виходу з ладу окремих компонент мережі та зміни вимог до потоків.

-  1. Шор Н.З., Сергієнко І.В., Шило В.П. та ін.
Задачі оптимального проектування надійних мереж.
– Київ: Наукова думка, 2005. – 230 с.

Два сімейства ЛП-задач

В [1] розглядаються два сімейства задач лінійного програмування (ЛП-задачі) для знаходження оптимальних пропускних здатностей дуг відмовостійкої мережі.

У першому сімействі ЛП-задач (задача А) для передачі потоків використовуються всі можливі шляхи в мережі. У другому сімействі ЛП-задач (задача Р) для передачі потоків задіяні тільки шляхи із заданої множини шляхів.

-  1. Шор Н.З., Сергієнко І.В., Шило В.П. та ін. Задачі оптимального проектування надійних мереж. – Київ: Наукова думка, 2005. – 230 с.

Нелінійні та булеві задачі

ЛП-задачі A та P узагальнюються на випадки: задач нелінійного опуклого програмування [2] та задач булевого лінійного програмування [3].

-  **2. Стецюк П.И., Жидков В.А.** О двух задачах оптимизации пропускных способностей дуг отказоустойчивой сети // Транспортные системы и логистика, Кишинэу, 11-13 декабря 2013, С. 300–309.
-  **3. Сергиенко И.В., Стецюк П.И.** Две ЛП-задачи с булевыми переменными для отказоустойчивой сети // Информатика та системні науки (ІСН-2014), Полтава, 13-15 березня 2014, С. 284–287.

Зміст

- 1 Вступ (про відмовостійкі мережі)
- 2 Пошкодження (поломка) мережі**
- 3 Модернізація відмовостійкої мережі
- 4 Лінійні та булеві задачі A і P
- 5 GuRoBi: обчислювальні експерименти

Пошкодження (поломка) мережі

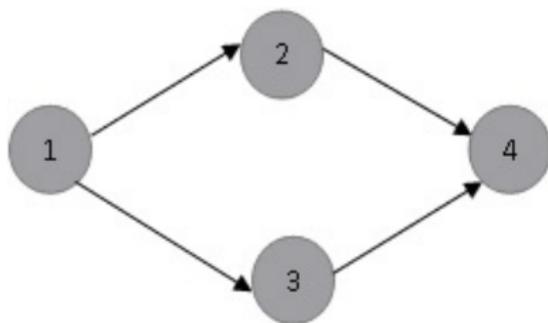
Нехай $N(V, A)$ – орієнтована мережа з вершинами V та дугами A . Пропускну здатність дуги $a \in A$ позначимо y_a .

Пошкодженням (поломкою) мережі $N(V, A)$ назвемо такий її стан, що пропускні здатності дуг мережі змінюються за правилом:

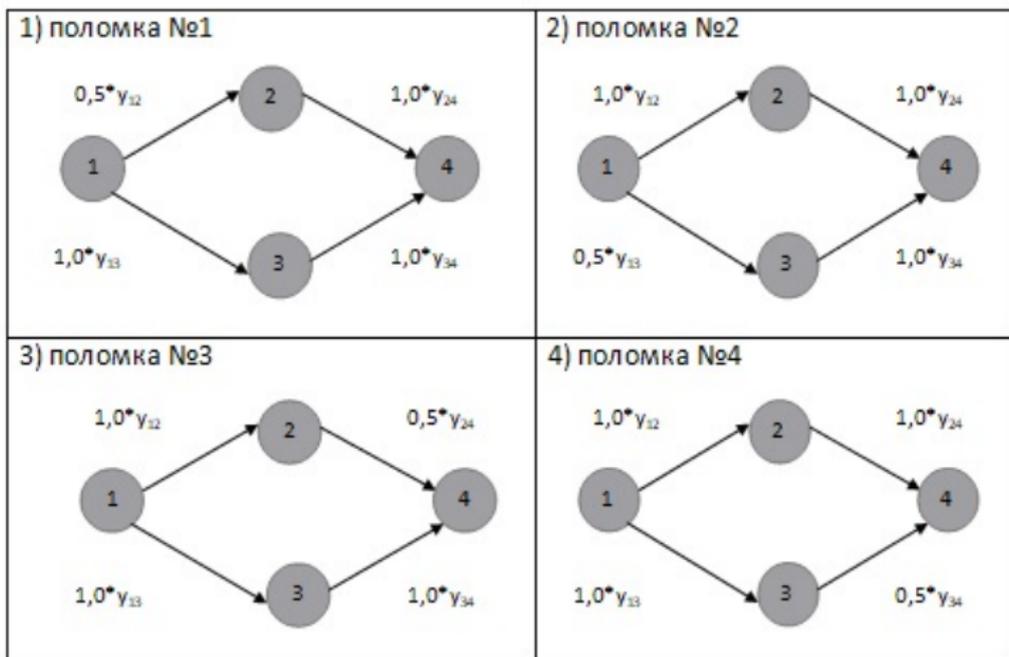
$$y'_a = \mu_a y_a, \quad \forall a \in A,$$

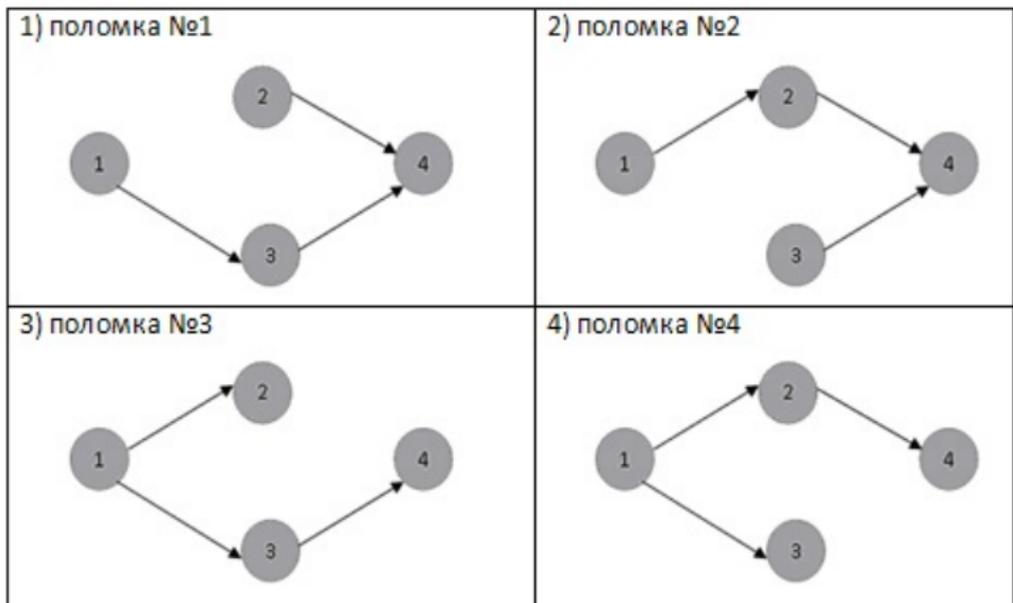
де хоча б один із коефіцієнтів $\mu_a \in [0, 1)$.

Якщо $\mu_a = 0$, то це рівнозначно відмові дуги a . Якщо $\mu_a = 1$, то це означає, що дуга a не має пошкоджень.

Сценарії 0,5F1 та 0F1 для мережі $Net(4,4)$ 

№ дуги	дуга (i, j)	Сценарій 0,5F1				Сценарій 0F1			
		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
1	(1,2)	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0
2	(1,3)	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0
3	(2,4)	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0
4	(3,4)	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0

Сценарій 0,5F1 для мережі $Net(4, 4)$ 

Сценарій 0F1 для мережі $Net(4,4)$ 

Зміст

- 1 Вступ (про відмовостійкі мережі)
- 2 Пошкодження (поломка) мережі
- 3 Модернізація відмовостійкої мережі**
- 4 Лінійні та булеві задачі A і P
- 5 GuRoBi: обчислювальні експерименти

Задачі модернізації: що дано?

Задані:

1. Мережа $N(V, A)$; y_a^0 – значення існуючих пропускних здатностей дуг, $a \in A$; y_a^{low} , y_a^{up} , $a \in A_m$ – нижні та верхні межі на пропускні здатності дуг, що модернізуються.
2. Мережевий трафік K : обсяги потоків в мережі $N(V, A)$; d_k , $k \in K$ – обсяг потоку від вершини $s(k) \in V$ до вершини $r(k) \in V$. Тут $s(k) = sender(k)$, $r(k) = receiver(k)$.
3. Сценарій пошкоджень T : $\mu_{at} \in [0, 1]$, $\forall a \in A$, $\forall t \in T$.

Задачі модернізації: що шукаємо?

Знайти:

Мінімальної вартості значення пропускних здатностей дуг (додаються до вже існуючих та підлягають модернізації), при яких забезпечується заданий обсяг трафіку K , якщо в мережі $N(V, A)$ станеться одна, але довільна, поломка зі сценарію пошкоджень T (сценарію відмов T).

Додаткові позначення:

A_m – множина дуг для модернізації пропускних здатностей;
 c_a – вартість створення одиниці пропускної здатності $a \in A_m$;
 C_a – витрати на створення пропускної здатності $a \in A_m$;
 A_v^+, A_v^- – множини вхідних, вихідних дуг для вершини $v \in V$.

Два сімейства задач модернізації

визначаються способом передачі потоків в мережі:

Задача А: залучаються всі можливі шляхи в мережі;

Задача Р: залучаються лише шляхи із заданої множини шляхів $P = \cup_{k \in K} P_k$, де P_k – множина шляхів для потоку k .

Невідомі:

y_a – пропускна здатність, що додається до дуги $a \in A_m$;

u_a – булева змінна (1 – дуга додається, 0 – не додається);

x_{akt} – потік продукту k по дузі a при пошкодженні t ;

z_{kpt} – потік продукту k по шляху p при пошкодженні t .

Зміст

- 1 Вступ (про відмовостійкі мережі)
- 2 Пошкодження (поломка) мережі
- 3 Модернізація відмовостійкої мережі
- 4 Лінійні та булеві задачі А і Р**
- 5 GuRoBi: обчислювальні експерименти

Формулювання ЛП-задачі А

$$f_A^* = \min_{x,y} \sum_{a \in A_m} c_a y_a \quad (1a)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} x_{akt} \leq \mu_{at}(y_a^0 + y_a), \quad \forall a \in A_m, \forall t \in T, \quad (2a)$$

$$\sum_{k \in K} x_{akt} \leq \mu_{at} y_a^0, \quad \forall a \in A \setminus A_m, \forall t \in T, \quad (3a)$$

$$\sum_{a \in A_v^+} x_{akt} - \sum_{a \in A_v^-} x_{akt} = \begin{cases} d_k, & \text{якщо } v=s(k); \\ -d_k, & \text{якщо } v=r(k); \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall v \in V, \\ \forall k \in K, \\ \forall t \in T, \end{matrix} \quad (4a)$$

$$x_{akt} \geq 0, \quad \forall a \in A, \forall k \in K, \forall t \in T, \quad (5a)$$

$$y_a^{low} \leq y_a \leq y_a^{up}, \quad \forall a \in A_m. \quad (6a)$$

Зміст обмежень у ЛП-задачі А

(2a), (3a) означають, що потоки по дугах не повинні перевищувати пропускних здатностей дуг при довільній одній полонці зі сценарію відмов;

(4a) гарантують виконання умов по трафіку;

(5a) відповідають за невід'ємність потоків;

(6a) – двобічні обмеження на пропускні здатності дуг $a \in A_m$.

Велика розмірність ЛП-задачі А

Кількість змінних

$$N_A = |A_m| * |K| * |T| + |A_m|$$

і кількість обмежень

$$M_A = |V| * |K| * |T| + |A_m| * |T| + |A \setminus A_m| * |T| + 2 * |A_m|.$$

Для середніх розмірів мережі задача (1а)–(6а) є задачею великої розмірності. Наприклад, якщо $|V| \approx 40$, $|A| \approx 50$, $|A_m| \approx 50$, $|T| \approx 50$ і $|K| \approx 1000$, тоді

$$N_A \approx 2.500.000, \quad M_A \approx 2.000.000.$$

Формулювання ЛП-задачі Р

$$f_P^* = \min_{z,y} \sum_{a \in A_m} c_a y_a \quad (1p)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \delta_{kpa} z_{kpt} \leq \mu_{at} (y_a^0 + y_a), \forall a \in A_m, \forall t \in T, \quad (2p)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \delta_{kpa} z_{kpt} \leq \mu_{at} y_a^0, \forall a \in A \setminus A_m, \forall t \in T, \quad (3p)$$

$$\sum_{p \in P_k} z_{kpt} = d_k, \forall k \in K, \forall t \in T, \quad (4p)$$

$$z_{kpt} \geq 0, \forall k \in K, \forall p \in P, \forall t \in T, \quad (5p)$$

$$y_a^{low} \leq y_a \leq y_a^{up}, \forall a \in A_m. \quad (6p)$$

де $\delta_{kpa} = \begin{cases} 1, & \text{коли шлях } p \in P_k \text{ включає дугу } a; \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$

Зміст обмежень у ЛП-задачі Р

(2р), (3р) означають, що потоки по дугах не повинні перевищувати пропускних здатностей дуг при довільній одній полемці зі сценарію відмов;

(4р) гарантують виконання умов по трафіку;

(5р) відповідають за невід'ємність потоків;

(6р) – двобічні обмеження на пропускні здатності дуг $a \in A_m$.

Велика розмірність ЛП-задачі P

Кількість змінних

$$N_P = |A_m| + |K| * |P| * |T|$$

і кількість обмежень

$$M_P = |K| * |T| + |A_m| * |T| + |A \setminus A_m| * |T| + 2 * |A_m|.$$

Якщо $|A| \approx 50$, $|A_m| \approx 50$, $|T| \approx 50$, $|P| \approx 2000$,
 $|K| \approx 1000$, тоді

$$N_P \approx 100.000.000, \quad M_P \approx 50.000.$$

Булеві задачі А та Р

отримаємо, якщо

цільові функції (1a) та (1p) замінити на цільові функції

$$F_A^* = \min_{x,y,u} \sum_{a \in A_m} C_a u_a + \sum_{a \in A_m} c_a y_a,$$

$$F_P^* = \min_{z,y,u} \sum_{a \in A_m} C_a u_a + \sum_{a \in A_m} c_a y_a,$$

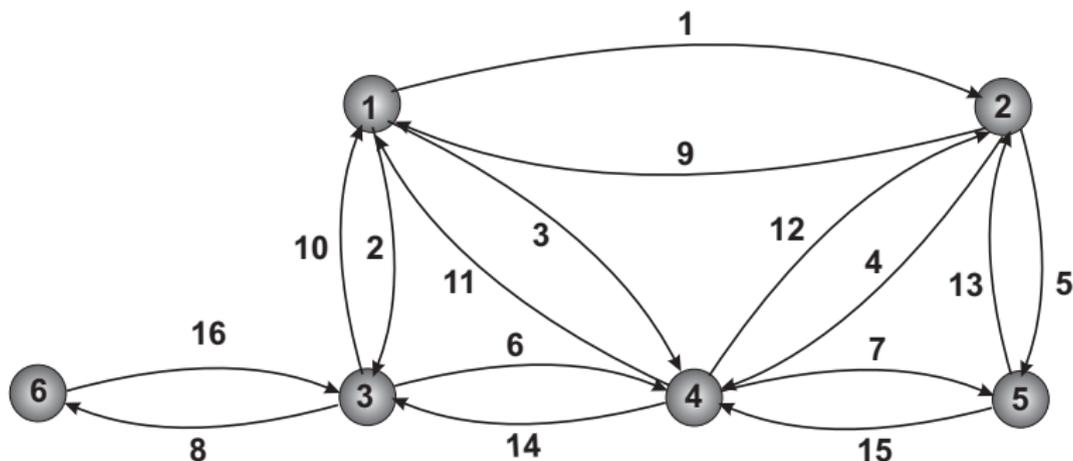
а обмеження (6a) та (6p) замінити на обмеження

$$y_a^{low} u_a \leq y_a \leq y_a^{up} u_a, \quad \forall a \in A_m,$$

де булеві змінні $u_a = 0 \vee 1$ (одиниця, якщо дуга $a \in A_m$ додається до мережі, і нуль – в протилежному випадку).

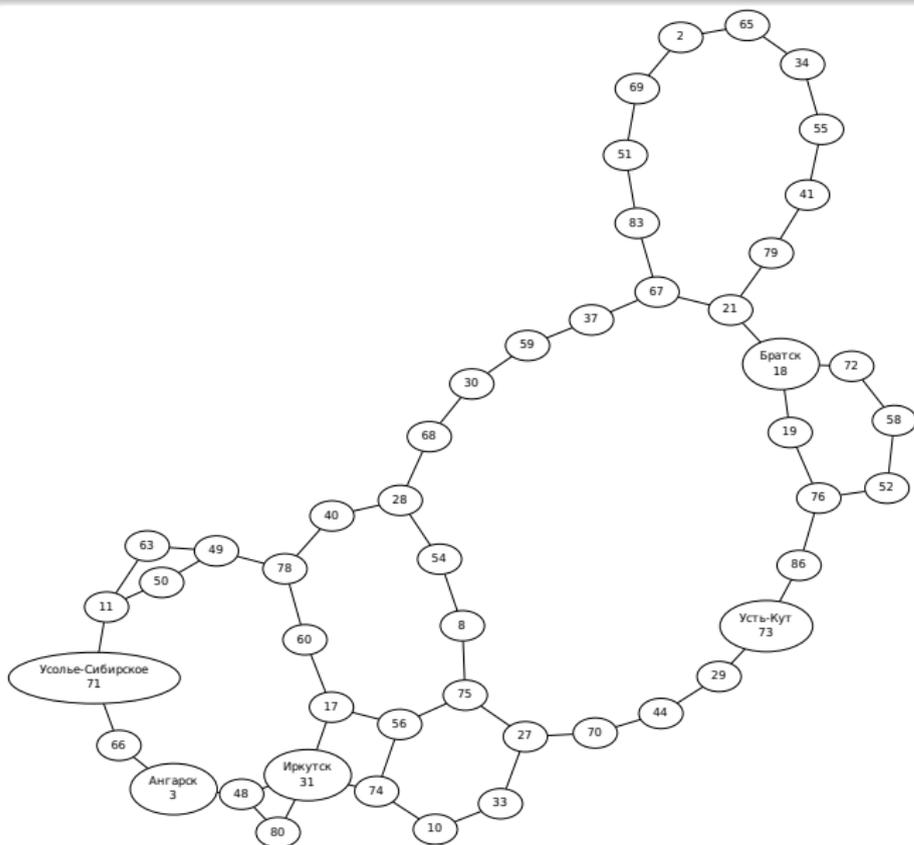
Зміст

- 1 Вступ (про відмовостійкі мережі)
- 2 Пошкодження (поломка) мережі
- 3 Модернізація відмовостійкої мережі
- 4 Лінійні та булеві задачі A і P
- 5 GuRoBi: обчислювальні експерименти**

GuRoBi: задачі A для мережі $Net(6, 16)$ [1]

Задача A	Змінні	Обмеж.	Ненул. коеф.	Час (сек.)
Лінійна	7754	3318	23444	0.037935
Булева	7768	3332	23472	0.115134

Транспортна мережа (Нурмінський Є.О.)



GuRoBi: ЛП-задача А для мережі Нурмінського

Задача А	Поломки	Змінні	Обмеж.	Ненул. коэф.
net-48-56	0	252.784	108.400	758.128
net-48-56-1	1	500.944	216.798	1.502.718
net-48-56-2	2	749.104	325.196	2.247.308
net-48-56-3	3	997.264	433.594	2.991.898

Задача А	Ітерації	Час (сек)
net-48-56	47.099	1.74
net-48-56-1	175.646	264.31
net-48-56-2	267.152	935.75
net-48-56-3	382.015	498.68

Висновки

Описано математичні моделі двох задач модернізації пропускних здатностей дуг відмовостійкої мережі.

У першій задачі (**задача А**) для передачі потоків задіяні всі можливі шляхи в мережі.

У другій задачі (**задача Р**) для передачі потоків задіяні тільки шляхи із наперед заданої множини шляхів.

Математичні моделі представлені задачами лінійного програмування та лінійного булевого програмування (з мережевою структурою матриці обмежень).

Запитання?

Дякую за увагу!

e-mail: stetsyukp@gmail.com