

r -Алгоритми для моделювання криволінійних обводів та профілів з використанням графіків кривини

Стецюк П.І.¹, Ткаченко О.В.²
stetsyukp@gmail.com

¹Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

²Державне підприємство "Івченко-Прогрес"

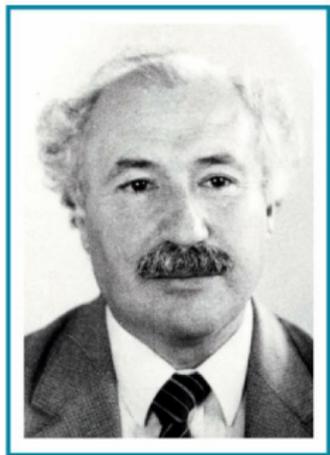
XVII Міжнародна науково-практична конференція
"Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем"
20–22 листопада 2019 року, м. Дніпро

- 1 “Київські” методи негладкої оптимізації
- 2 Плоскі криві у натуральній параметризації
- 3 r -Алгоритм для задачі (Устенко, 2010)
- 4 Сопло Франкля та S -криві
- 5 Профіль третього порядку гладкості

Зміст

- 1 “Київські” методи негладкої оптимізації
- 2 Плоскі криві у натуральній параметризації
- 3 r -Алгоритм для задачі (Устенко, 2010)
- 4 Сопло Франкля та S -криві
- 5 Профіль третього порядку гладкості

Шор Наум Зуселевич (1937–2006)



Засновник наукової школи методів негладкої оптимізації (Інститут кібернетики НАН України)

У **1962** році Н.З. Шор розробив перший субградієнтний метод

У **1969** році вперше використав оператор розтягу простору для прискорення градієнтних методів

Методи Н.З. Шора високо оцінені фахівцями, мають велике теоретичне та прикладне значення, є "ключем" до розв'язання задач великих розмірів

Найбільш відомі методи

1. r -алгоритми (стійкі до накопичення помилок обчислень);
2. методи еліпсоїдів (збіжність – геометрична прогресія);
3. субградієнтні методи з перетворенням простору (використовують феєровські кроки, кроки Поляка).

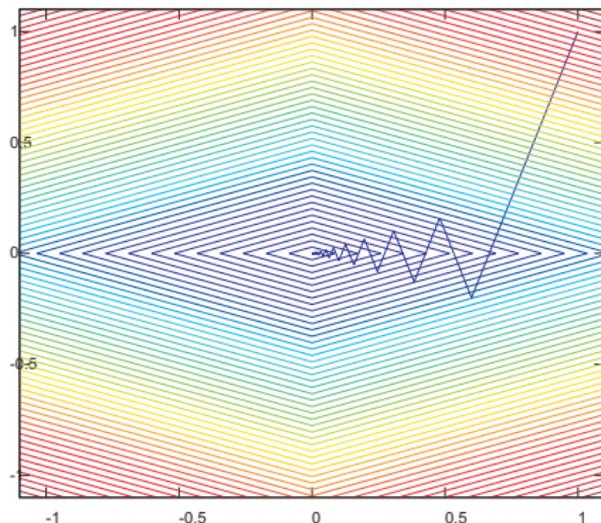
Методи мають прискорену збіжність

для яружних опуклих функцій (гладких та негладких)

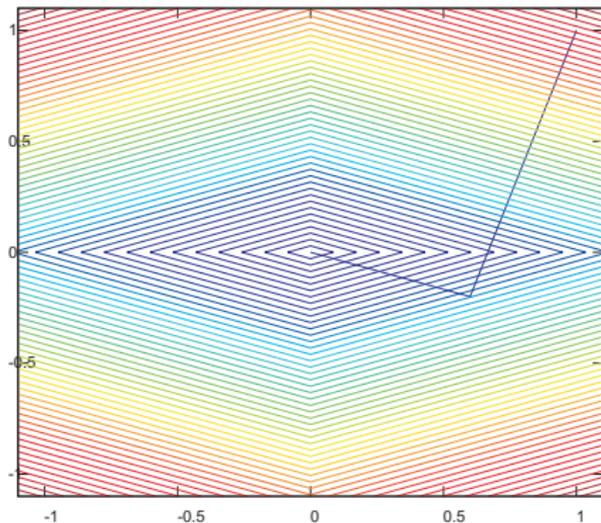
та використовуються

як оптимізаційні ядра для прикладних задач.

Прискорена збіжність: кусочно лінійна функція



1. Траєкторія методу **ams**



2. ...прискореного методу **ams_g2**

для яружної функції $f_1(x_1, x_2) = |x_1| + 10|x_2|$, $x_0 = (1, 1)$.

Програмні реалізації методів

як оптимізаційні ядра використовують:

1. Кисельова О.М. (Дніпро, задачі розміщення);
2. Стоян Ю.Г. (Харків, задачі упаковки);
3. Соломон Д.І. (Кишинев, транспортні задачі);
4. Шарий С.П. (Новосибірськ, інтервальний аналіз);
5. Міца О.В. (Ужгород, багат шарові оптичні покриття).

Серед них

octave-функції – `ralgb5`, `amsg2p`, `emshor` та інші.

Зміст

- 1 “Київські” методи негладкої оптимізації
- 2 Плоскі криві у натуральній параметризації**
- 3 r -Алгоритм для задачі (Устенко, 2010)
- 4 Сопло Франкля та S -криві
- 5 Профіль третього порядку гладкості

Плоска крива та її кривина

Плоска крива задається з використанням рівняння

$$k = k(s), \quad (2.1)$$

де k – кривина кривої; s – довжина дуги.

Її кривина визначається залежністю

$$k(s) = d\varphi/ds, \quad (2.2)$$

де φ – кут між дотичною до кривої та віссю абсцис.

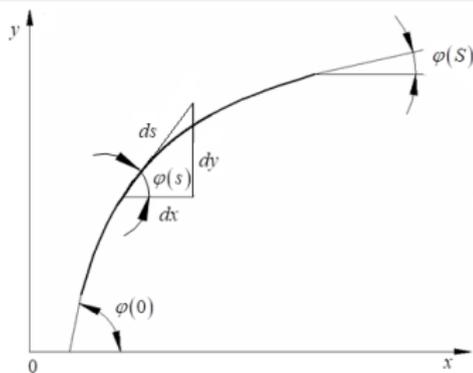
Розподіл $k(s)$ та $\varphi(s)$ на ділянці кривої

Рис. 2.1. Графік кривої

S – довжина дуги кривої;
 ds – приріст довжини дуги;
 dx і dy – прирости декартових координат;
 $\varphi(0)$ – кут нахилу дотичної в початковій точці ділянки;
 $\varphi(S)$ – кут нахилу дотичної в кінцевій точці ділянки.

У довільній точці кривої кут нахилу дотичної

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s) ds, \quad (2.3)$$

Параметричне рівняння кривої

З рис. 2.1 випливає, що

$$dx = ds \cos \varphi(s), \quad dy = ds \sin \varphi(s),$$

звідки інтегруванням отримуємо координати $x(s)$ та $y(s)$.

Рівняння кривої в натуральній параметризації мають вигляд:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds, \quad y(s) = y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds, \quad (2.4)$$

де $x(0)$, $y(0)$ – координати початкової точки кривої.

Три залежності кривини від довжини дуги

Лінійній, квадратичній, та кубічній залежностям

$$k(s) = as + b, \quad (2.5)$$

$$k(s) = as^2 + bs + c, \quad (2.6)$$

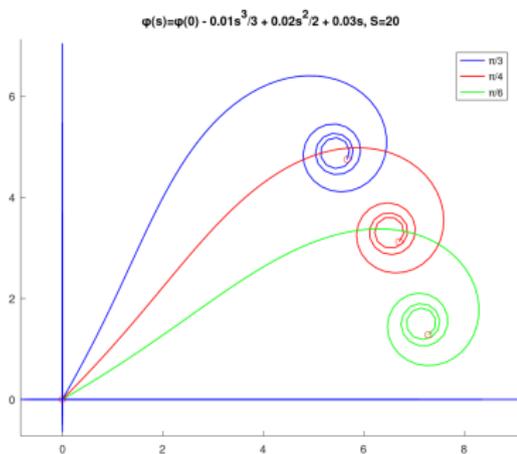
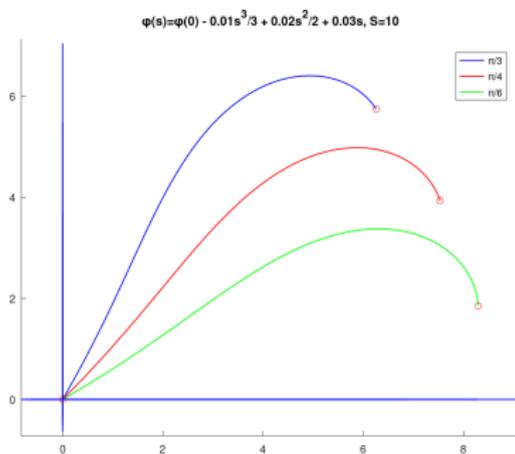
$$k(s) = as^3 + bs^2 + cs + d, \quad (2.7)$$

Відповідають такі залежності для кутів нахилу дотичних

$$\varphi(s) = \varphi(0) + as^2/2 + bs, \quad (2.5a)$$

$$\varphi(s) = \varphi(0) + as^3/3 + bs^2/2 + cs, \quad (2.6a)$$

$$\varphi(s) = \varphi(0) + as^4/4 + bs^3/3 + cs^2/2 + ds, \quad (2.7a)$$

Навіщо S обмежувати зверху?Рис. 2.2. Криві при $S = 20$ Рис. 2.3. Криві при $S = 10$

$$x(S)=x(0)+\int_0^S \cos \varphi(s) ds, \quad y(S)=y(0)+\int_0^S \sin \varphi(s) ds, \quad (2.8)$$

Це дозволяє ігнорувати „неправильні“ криві

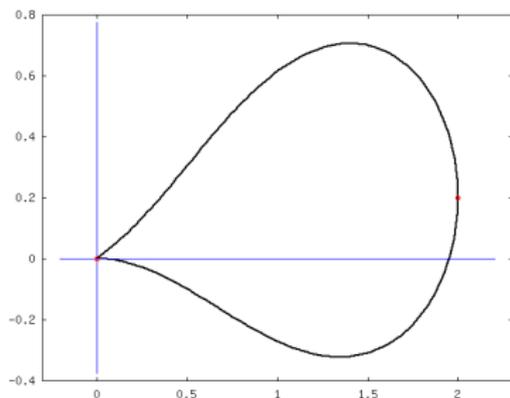


Рис. 2.4. Перша крива

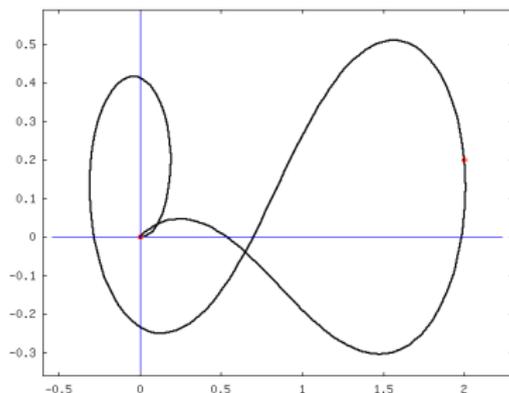


Рис. 2.5. Друга крива

Яка з цих двох замкнутих кривих є „неправильною“?

Зміст

- 1 “Київські” методи негладкої оптимізації
- 2 Плоскі криві у натуральній параметризації
- 3 r-Алгоритм для задачі (Устенко, 2010)
- 4 Сопло Франкля та S -криві
- 5 Профіль третього порядку гладкості

Приклад задачі [Устенко, 2010]

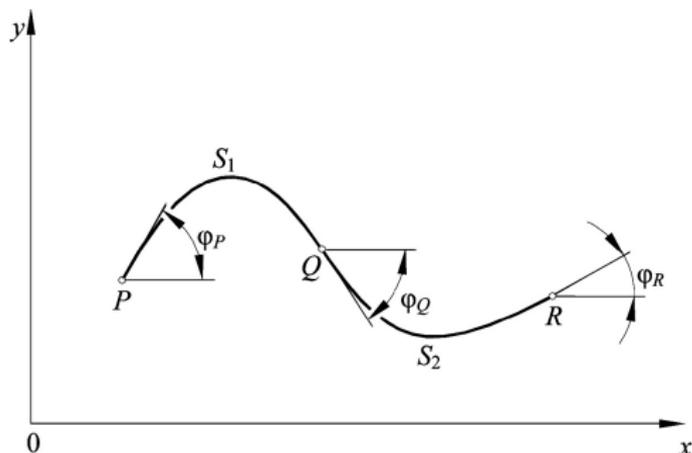


Рис. 3.1. Дві ділянки – PQ та QR

Потрібно з'єднати три точки кривими лініями, забезпечивши однаковий кут нахилу дотичної в середній точці.

Дано: $x_P, y_P, x_Q, y_Q, x_R, y_R, \varphi_P, \varphi_R$

Знайти: $a_1, b_1, S_1, a_2, b_2, S_2, \varphi_Q$

1. УСТЕНКО С.А. Побудова інтерполяційних елементів кривини при моделюванні криволінійних обводів. – Електронний Вісник НУК, № 1, 2010.

Система нелінійних рівнянь [Устенко, 2010]

$$x_Q = x_P + \int_0^{S_1} \cos \left(\varphi_P + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s \right) ds, \quad (3.1)$$

$$y_Q = y_P + \int_0^{S_1} \sin \left(\varphi_P + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s \right) ds, \quad (3.2)$$

$$x_R = x_Q + \int_0^{S_2} \cos \left(\varphi_Q + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s \right) ds, \quad (3.3)$$

$$y_R = y_Q + \int_0^{S_2} \sin \left(\varphi_Q + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s \right) ds, \quad (3.4)$$

$$\varphi_Q = \varphi_P + \frac{a_1 S_1^2}{2} + b_1 S_1, \quad (3.5)$$

$$\varphi_R = \varphi_Q + \frac{a_2 S_2^2}{2} + b_2 S_2, \quad (3.6)$$

$$b_2 = a_1 S_1 + b_1. \quad (3.7)$$

Функції нев'язок для системи (3.1)–(3.7)

$$f_1(a_1, b_1, S_1) = x_Q - \int_0^{S_1} \cos \left(\varphi_P + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s \right) ds - x_P, \quad (3.1a)$$

$$f_2(a_1, b_1, S_1) = y_Q - \int_0^{S_1} \sin \left(\varphi_P + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s \right) ds - y_P, \quad (3.2a)$$

$$f_3(a_2, b_2, S_2, \varphi_Q) = x_R - \int_0^{S_2} \cos \left(\varphi_Q + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s \right) ds - x_Q, \quad (3.3a)$$

$$f_4(a_2, b_2, S_2, \varphi_Q) = y_R - \int_0^{S_2} \sin \left(\varphi_Q + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s \right) ds - y_Q, \quad (3.4a)$$

$$f_5(a_1, b_1, S_1, \varphi_Q) = \varphi_Q - \varphi_P - \frac{a_1 S_1^2}{2} - b_1 S_1, \quad (3.5a)$$

$$f_6(a_2, b_2, S_2, \varphi_Q) = \varphi_R - \varphi_Q - \frac{a_2 S_2^2}{2} - b_2 S_2, \quad (3.6a)$$

$$f_7(a_1, b_1, S_1, b_2) = b_2 - a_1 S_1 - b_1, \quad (3.7a)$$

Оптимізаційна задача для (3.1a)–(3.7a)

Знайти

$$f^* = f(a_{1,2}^*, b_{1,2}^*, S_{1,2}^*, \varphi_Q^*) = \min \left\{ f(\cdot) = \sum_{i=1}^7 |f_i(\cdot)| \right\} \quad (3.8)$$

при обмеженнях

$$S_1 \geq \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}, \quad (3.9)$$

$$S_2 \geq \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2}, \quad (3.10)$$

Якщо $f^* := 0$, то отримуємо розв'язок системи (3.1)–(3.7).

Алгоритм розв'язання задачі (3.8)–(3.10)

реалізований мовою Octave та використовує

1. octave-функцію `ralgb5a`;
2. аналітичне обчислення узагальнених градієнтів;
3. метод трапецій для обчислення інтегралів.

Зміст

- 1 “Київські” методи негладкої оптимізації
- 2 Плоскі криві у натуральній параметризації
- 3 r -Алгоритм для задачі (Устенко, 2010)
- 4 Сопло Франкля та S -криві**
- 5 Профіль третього порядку гладкості

Моделювання S-кривих: $k(s) = as^2 + bs + c$

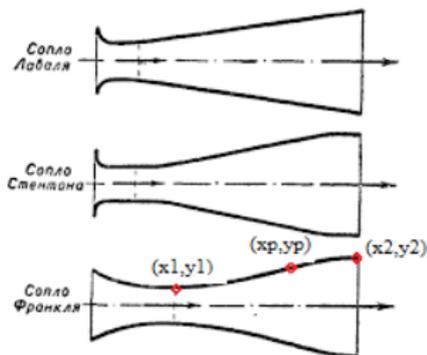


Рис. 4.1. Три типи сопел

Дано:

$x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2,$

$x_p \in [x_1, x_2], \varphi_p;$

Тут φ_p – кут в $x_p, y_p;$

Знайти:

$a, b, c,$

$S, s_1;$

2. БОРИСЕНКО В.Д., УСТЕНКО С.А., УСТЕНКО І.В.
 Геометричне моделювання S-подібних скелетних ліній профілів лопаток осевих компресорів. – Вестник двигателестроения. – 2018. – № 1. – С. 45–52.

Задача: система нелінійних рівнянь (3 + 2)

$$x_2 = x_1 + \int_0^S \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (4.1)$$

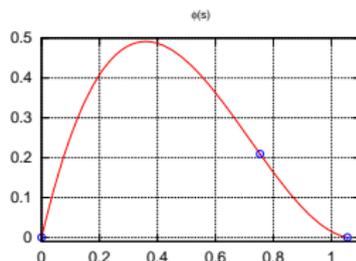
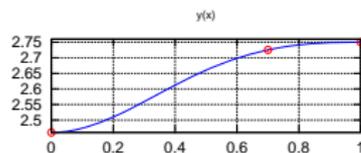
$$y_2 = y_1 + \int_0^S \sin \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (4.2)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS, \quad (4.3)$$

$$x_p = x_1 + \int_0^{s_1} \cos \left(\varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (4.4)$$

$$\varphi_p = \varphi_1 + \frac{as_1^3}{3} + \frac{bs_1^2}{3} + cs_1. \quad (4.5)$$

Перший тест (для зменшених розмірів)



$$x_1=0, y_1=2.46, \varphi_1=0,$$

$$x_2=1, y_2=2.75, \varphi_2=0,$$

$$x_p = 0.7, \varphi_p = 12^\circ,$$

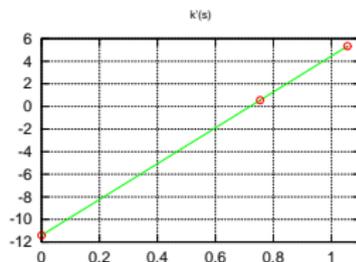
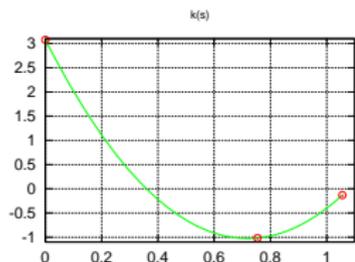
$$a = 7.92935$$

$$b = -11.4079$$

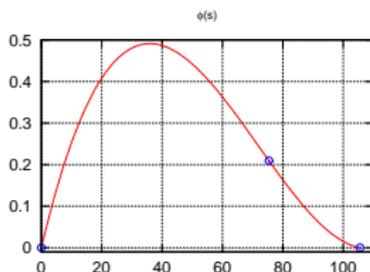
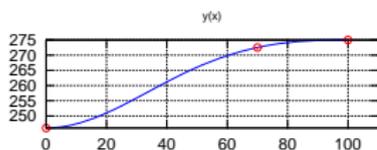
$$c = 3.07591$$

$$S = 1.05563$$

$$s_1 = 0.75400$$



Другий тест (для реальних розмірів)



$$x_1=0, y_1=246, \varphi_1=0,$$

$$x_2=100, y_2=275, \varphi_2=0,$$

$$x_p = 70, \varphi_p = 12^\circ,$$

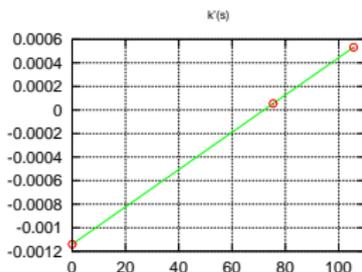
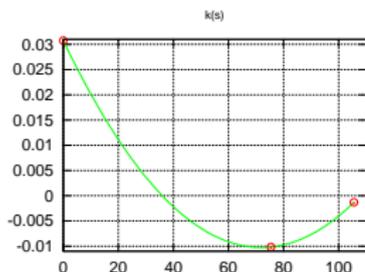
$$a = 7.92785 \times 10^{-6}$$

$$b = -1.14060 \times 10^{-3}$$

$$c = 3.07546 \times 10^{-2}$$

$$S = 105.562$$

$$s_1 = 75.3989$$



Зміст

- 1 “Київські” методи негладкої оптимізації
- 2 Плоскі криві у натуральній параметризації
- 3 r -Алгоритм для задачі (Устенко, 2010)
- 4 Сопло Франкля та S -криві
- 5 Профіль третього порядку гладкості

Задача: кривини – квадратичні

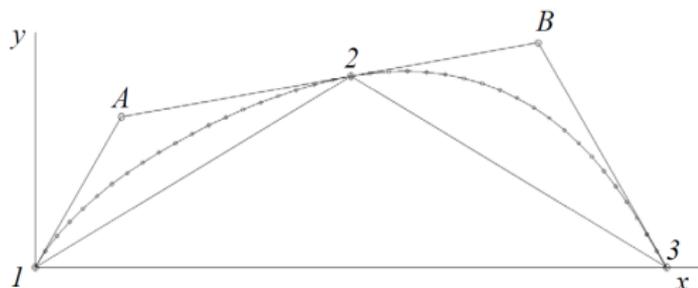


Рис. 5.1. Дві суміжні ділянки:

$$(1,2) \quad k_1(s) = a_1 s^2 + b_1 s + c_1,$$

$$(2,3) \quad k_2(s) = a_2 s^2 + b_2 s + c_2$$

Дано:

$$x_1, y_1, \varphi_1,$$

$$x_2, y_2, \varphi_2,$$

$$x_3, y_3, \varphi_3$$

Знайти:

$$a_1, b_1, c_1, S_1,$$

$$a_2, b_2, c_2, S_2$$

3. Ткач М.Р. АГАРКОВ О.Ю. *Моделювання плавних кривих стосовно профілів лопаток осьових турбін.* – Збірник наукових праць НУК. – 2014. – № 3. – С. 58–62.

Система нелінійних рівнянь (3 + 3 + 2)

$$x_2 = x_1 + \int_0^{S_1} \cos \left(\varphi_1 + \frac{a_1 s^3}{3} + \frac{b_1 s^2}{2} + c_1 s \right) ds, \quad (5.1)$$

$$y_2 = y_1 + \int_0^{S_1} \sin \left(\varphi_1 + \frac{a_1 s^3}{3} + \frac{b_1 s^2}{2} + c_1 s \right) ds, \quad (5.2)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{aS_1^3}{3} + \frac{bS_1^2}{2} + cS_1, \quad (5.3)$$

Рівняння (5.1) та (5.2) зв'язують точки 1 та 2.

Рівняння (5.3) забезпечує потрібний кут в точці 2.

Система нелінійних рівнянь (3 + 3 + 2)

$$x_3 = x_2 + \int_0^{S_2} \cos \left(\varphi_2 + \frac{a_2 s^3}{3} + \frac{b_2 s^2}{2} + c_2 s \right) ds, \quad (5.4)$$

$$y_3 = y_2 + \int_0^{S_2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{a_2 s^3}{3} + \frac{b_2 s^2}{2} + c_2 s \right) ds, \quad (5.5)$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{a S_2^3}{3} + \frac{b S_2^2}{2} + c S_2, \quad (5.6)$$

Рівняння (5.4) та (5.5) зв'язують точки 2 та 3.

Рівняння (5.6) забезпечує потрібний кут в точці 3.

Система нелінійних рівнянь (3 + 3 + 2)

$$a_1 S_1^2 + b_1 S_1 + c_1 = c_2, \quad (5.7)$$

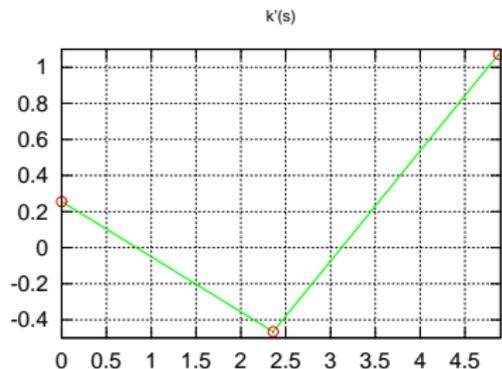
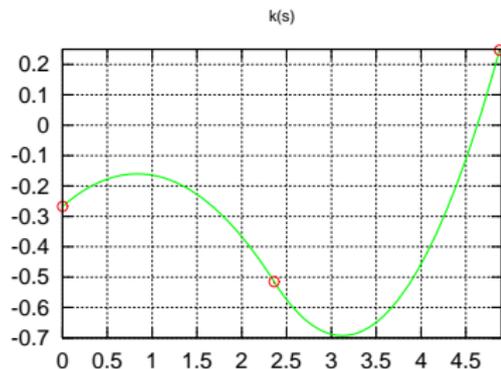
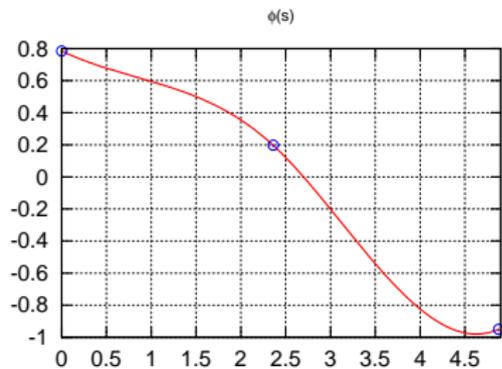
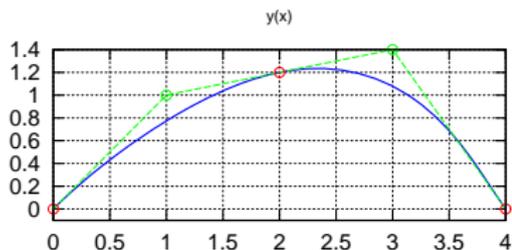
$$2a_1 S_1 + b_1 = b_2, \quad (5.8)$$

У точці 2

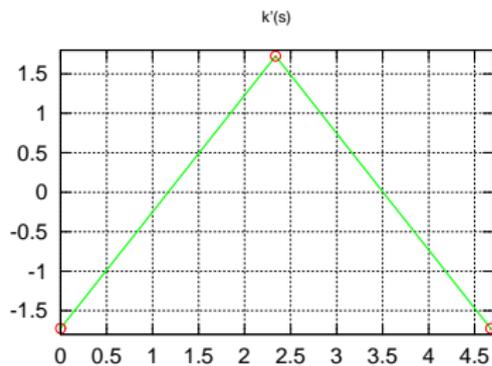
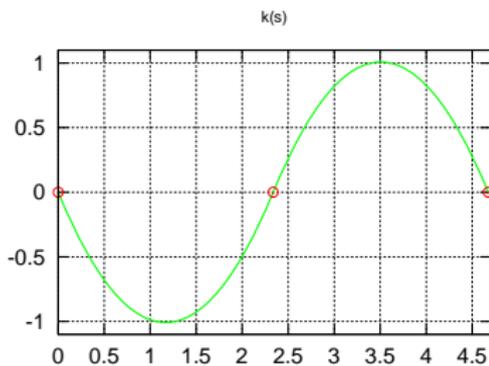
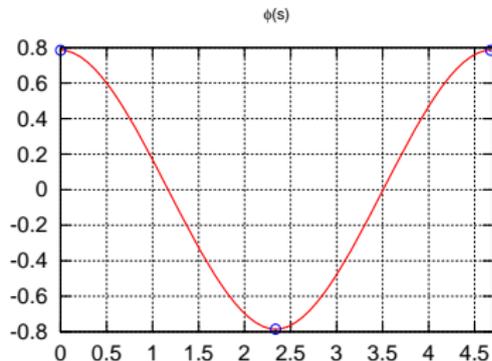
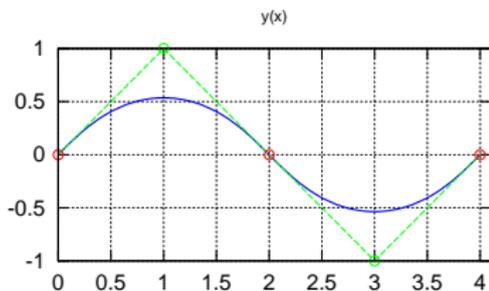
рівняння (5.7) забезпечує неперервність кривини, а
рівняння (5.8) – неперервність похідної від кривини.

Це гарантує третій порядок гладкості кривої.

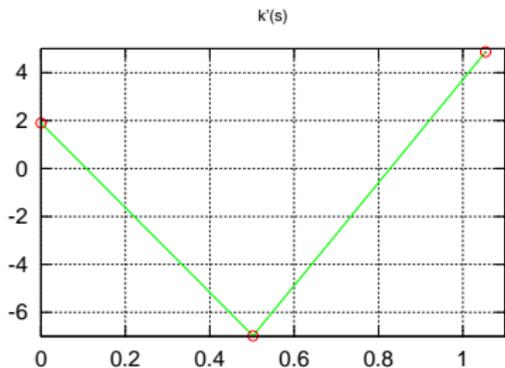
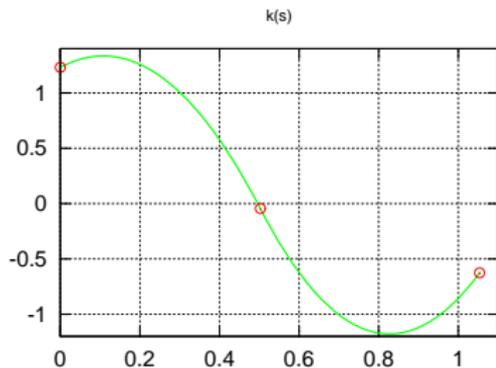
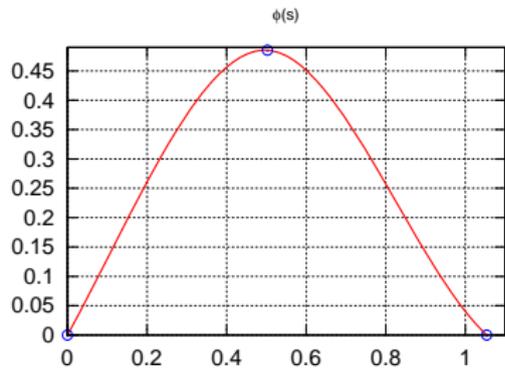
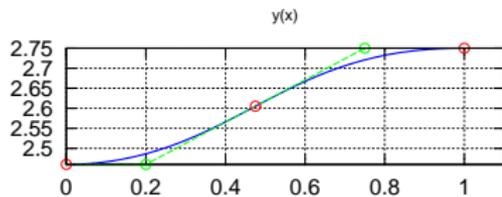
Тест 1: Опуклий багатогранник



Тест 2: Неопуклий багатогранник



Тест 3: Сопла „Франкля-Стентона“



ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

Ваккуп Slides: Метод Безье

Проектирование аэродинамических профилей с использованием метода Безье

P_k - координаты вершин характеристического многогранника.

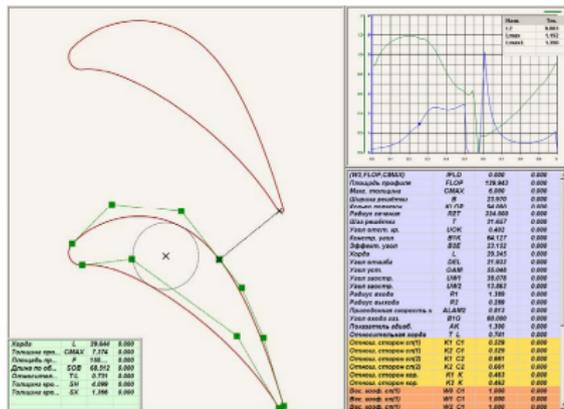
Кривая Безье — параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k b_{k,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

где P_k — функция компонент векторов опорных вершин, а $b_{k,n}(t)$ — базисные функции кривой Безье, называемые также полиномами Бернштейна.

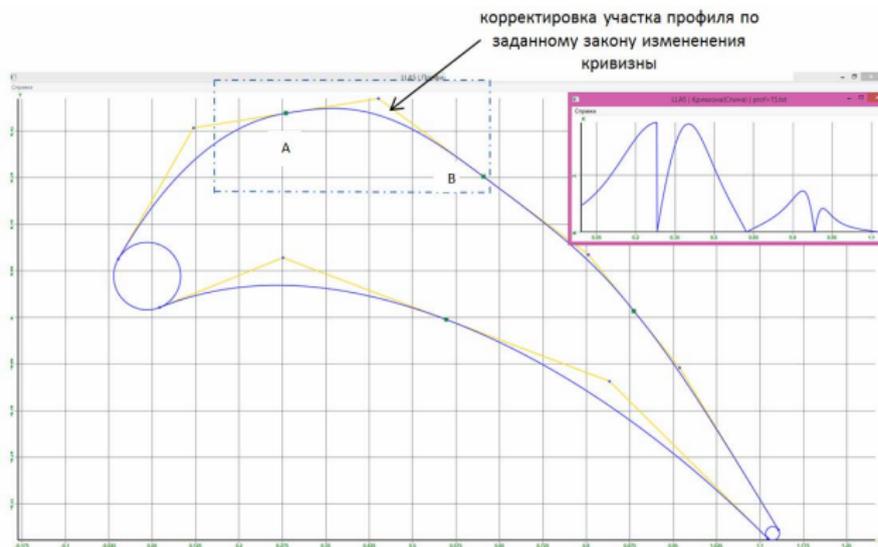
$$b_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k , где n — степень полинома, k — порядковый номер опорной вершины.



Backup Slides: LL-апроксимація

Проектирование аэродинамических профилей с помощью LL-аппроксимации и заданного закона изменения кривизны



20