ПРО УСЕРЕДНЕННЯ ЧИСЕЛ ТА ЛІНІЙНИХ СПЛАЙНІВ

Стецюк П.І., Хом'як О.М.
stetsyukp@gmail.com

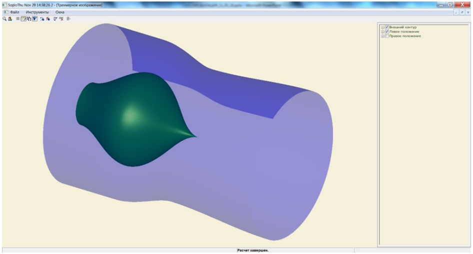
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова, Київ

Міжнародний науковий симпозіум
«ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО-XLVI)»
24-27 вересня 2019 року, м. Київ, Україна

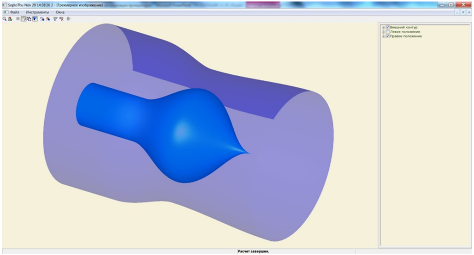
Зміст

Зміст

Сопло Лаваля з центральним тілом (ЦТ)

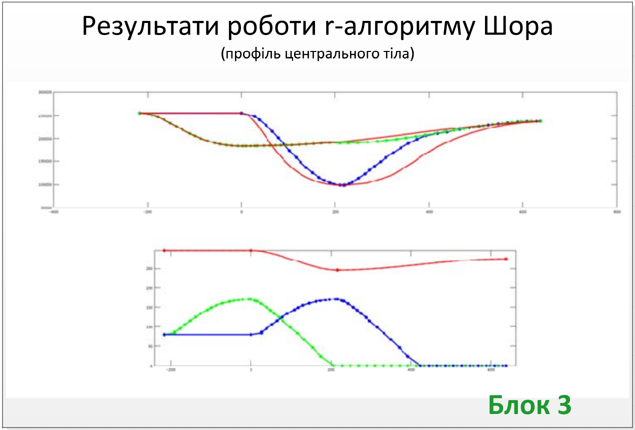


Ліве положення ЦТ

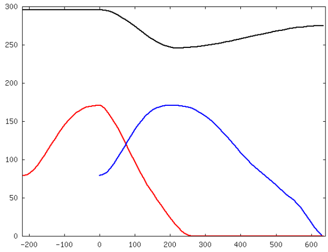


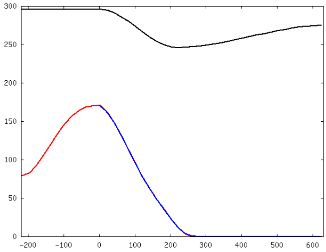
Праве положення ЦТ

Найкращий за графіками площ профіль ЦТ



Що таке „усереднення“ профілю ЦТ?





Необхідно так „усереднити“ червоний та синій профілі ЦТ, щоб усереднений профіль „найкраще“ задовільняв заданим графікам площ бокових поверхонь зрізаного конуса у крайньому лівому та крайньому правому положеннях ЦТ.

Зміст

Формулювання оптимізаційної задачі

Знайти таке число a_p^*, яке за L_p-нормою

мінімально ухиляється від заданих m чисел $a_1, \ldots, a_m$.

Формулювання задачі: знайти

$$a_p^* = \arg\min_{a\in\mathbb{R}} \left\{ f_p(a) = \left(\sum_{i=1}^{m} |a - a_i|^p \right)^{1/p} \right\}, \qquad (1)$$

де $p \in \mathbb{R}$ - скалярний параметр – такий, що $p \geq 1$.

Умова $p \geq 1$ забезпечує опуклість негладкої функції $f_p(a)$.

Про неєдиність розв'язку задачі $(p = 1)$

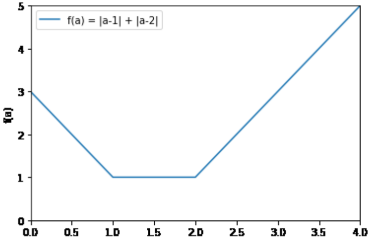


Рис. 1. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

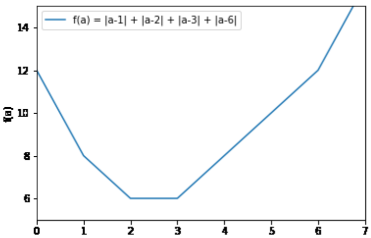


Рис. 2. $a_1{=}1$, $a_2{=}2$, $a_3{=}3$, $a_4{=}6$

Задача (1) завжди має розв'язок, але не завжди він є єдиним. Так, наприклад, $a_1^* \in [1, 2]$ (рис. 1), та $a_1^* \in [2, 3]$ (рис. 2).

Методи – МНМ, МНК та МММ

Для окремих випадків L_p-норми вектора $x \in \mathbb{R}^m$:

$p = 1$ – "манхеттенська" норма $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$;

$p = 2$ – евклідова норма $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i)^2}$;

$p = \infty$ – чебишевська норма $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} |x_i|$;

із задачі (1) отримуємо відомі методи:

МНМ – Метод Найменших Модулів ($p = 1$);
МНК – Метод Найменших Квадратів ($p = 2$);
МММ – МініМаксний (чебишевський) Метод ($p = \infty$).

Зміст

Спрощена задача (1) для $1 \leq p \leq 2$

відповідає задачі мінімізації опуклої функції:

знайти

$$a_p^* = \arg\min_{a\in\mathbb{R}} \left\{ F_p(a) = \sum_{i=1}^{m} |a - a_i|^p \right\}, \qquad (2)$$

де $p \in \mathbb{R}$ – скалярный параметр, такий що $1 \leq p \leq 2$.

Тут:

$F_p(x)$ – опукла функція (негладка, якщо $p = 1$),
при $p = 1$ маємо МНМ (зводиться до розв'язання ЛП-задачі),
при $p = 2$ маємо МНК (мінімізація квадратичної функції).

Корисні посилання на МНМ та МНК

1. Мудров В.И., Кушко В.Л. Метод наименьших модулей. – М.:, Знание, 1971. – 64 с.

... Брошюра посвящена описанию одного из методов обработки экспериментальных данных – метода наименьших модулей, использование которого полезно в тех случаях, когда распределение ошибок измерений подчинено закону Лапласа.

2. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства,альтернативные подходы,приложения. – Новосибирск: Наука, 1995. – 220 с.

3. Стецюк П.И., Колесник Ю.С., Лейбович М.М. К робастности метода наименьших модулей // Компьютерная математика. – 2002. Выпуск 2. – С. 114–151.

Властивості задачі (2)

Знайти:

$$a_p^* = \arg\min_{a\in\mathbb{R}} \left\{ F_p(a) = \sum_{i=1}^{m} |a - a_i|^p \right\}. \qquad (2)$$

Властивості задачі (2) при $1 < p \le 2$:

1. має єдиний розв'язок;
2. $a_2^* = (a_1 + \ldots + a_m)/m$ ($p = 2$ – середнє арифметичне);
3. $F_p(a_p^*) = \left(f_p(a_p^*)\right)^p$.

Примітка:

$F_p(a)$ – опукла функція (є негладкою при $p = 1$).

Зміст

Негладка задача $(p \geq 1)$

Маємо m лінійних сплайнів $y^1, \ldots, y^m$,

які визначені значеннями $y_1^i, \ldots, y_n^i$, $i = 1, \ldots, m$ в одних і тих же базових точках $x_1 < \ldots < x_n$ інтервалу $[x_1, x_2]$.

Необхідно знайти:

$$y_p^* = \arg\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_p(y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |y_j - y_j^i|^p \right)^{1/p} \right\}, \qquad (3)$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n)$

– невідомі значення лінійного сплайна в точках $x_1 < \ldots < x_n$.

Гладка задача $(1 < p \le 2)$

Знайти:

$$y_p^* = \arg\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ F_p(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |y_j - y_j^i|^p \right\}. \qquad (4)$$

Властивості задачі (4) при $1 < p \le 2$:

1. єдиний розв'язок; 2. $y_2^* = (y^1 + \ldots + y^m)/m$.

Примітка:

$F_p(y)$ – сепарабельна опукла функція (є негладкою при $p = 1$);
$F_p(y_p^*)$ та $f_p(y_p^*)$ зв'язані співвідношенням $F_p(y_p^*) = \left(f_p(y_p^*)\right)^p$.

Задача для неспадно-незростаючого сплайна

Знайти $(p \geq 1)$:

$$y_p^* = \arg\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_p(y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |y_j - y_j^i|^p \right)^{1/p} \right\} \qquad (3.1)$$

при обмеженнях:

$$y_j \leq y_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, n_1 - 1, \qquad (3.2)$$

$$y_j \geq y_{j+1}, \quad j = n_1, \ldots, n - 1. \qquad (3.3)$$

Лінійний сплайн є неспадним на ділянці $x_1 < \ldots < x_{n_1}$ та незростаючим на ділянці $x_{n_1} < \ldots < x_n$.

Задача для увігнуто-опуклого сплайна

Знайти $(1 \le p \le 2)$:

$$y_p^* = \operatorname{arg}\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ F_p(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |y_j - y_j^i|^p \right\} \qquad (4.1)$$

при обмеженнях:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \ge \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{x_{j+2} - x_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, n_1 - 2, \qquad (4.2)$$

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \le \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{x_{j+2} - x_{j+1}}, \quad j = n_1, \dots, n - 2. \qquad (4.3)$$

Лінійний сплайн є увігнутим на ділянці $x_1 < \ldots < x_{n_1}$ та опуклим на ділянці $x_{n_1} < \ldots < x_n$.

Публікації 2019 (за темою доповіді)

1. Стецюк П.І., Хом'як О.М. Про усереднення чисел та лінійних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – Випуск 19. – С. 161–167.

2. Стецюк П.І., Хом'як О.М. Мінімальні за L_p-нормою лінійні сплайни // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2019. – № 18. – С. 28–33.

Подяки

Робота виконана за підтримки

НАН України, проект № 0118U005227,

ДП „Івченко-Прогрес“, договір № 1790/17,

та Volkswagen Foundation, грант No 90 306.

Питання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!