50 ЛЕТ ОПЕРАТОРУ РАСТЯЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

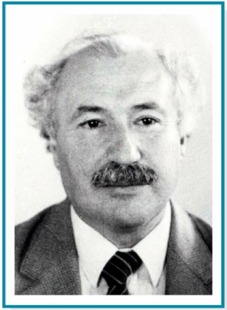
Институт кибернетики имени В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев

06 июня 2019 года, г. Киев

Content

Content

Шор Наум Зуселевич (1937 – 2006)



Основоположник научной школы методов негладкой оптимизации Института кибернетики НАНУ.

В 1962 году разработал первый субградиентный метод.

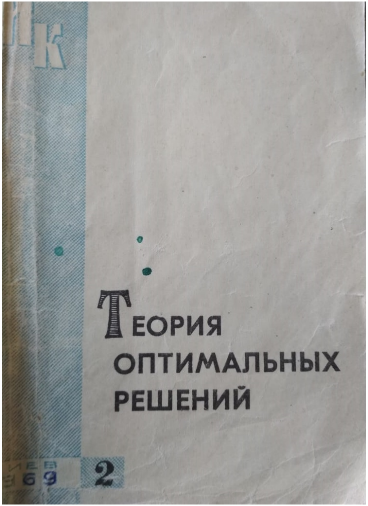
В 1969 году предложил использовать линейные неортогональные преобразования пространства для улучшения обусловленности овражных функций.

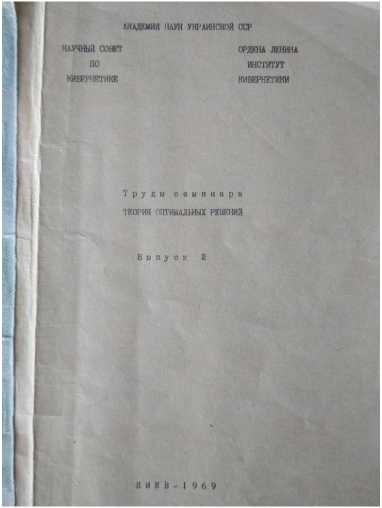
Статья Шор, Билецкий (1969)

Шор Н.З., Билецкий В.И. *Метод растяжения пространства для ускорения сходимости в задачах овражного типа* // Тр. семинара Науч. совета АН УССР по кибернетике "Теория оптимальных решений". – Киев. – 1969. – № 2. – С. 3–18.

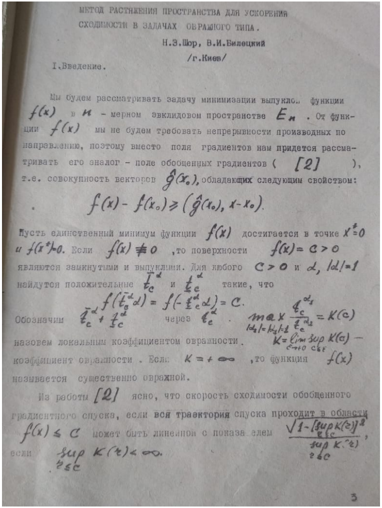
1. Доложено на семинаре 11.IV.1969,
2. Сдано в производство 6.VIII.1969,
3. Подписано к печати 11.IX.1969.

Сборник 1969 (две обложки)





Статья 1969 (первая и последняя страницы)



МЕТОД РАСТЯЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧАХ ОВРАЖНОГО ТИПА.

Н.З.Шор, В.И.Билецкий

/г.Киев/

I.Введение.

Мы будем рассматривать задачу минимизации выпукло.. функции $f(x)$ в n - мерном эвклидовом пространстве E_n. От функции $f(x)$ мы не будем требовать непрерывности производных по направлению, поэтому вместо поля градиентов нам придется рассматривать его аналог - поле обобщенных градиентов ([2]), т.е. совокупность векторов $\hat{g}(x_0)$, обладающих следующим свойством:

$$f(x)-f(x_0)\geq(\hat{g}(x_0),x-x_0).$$

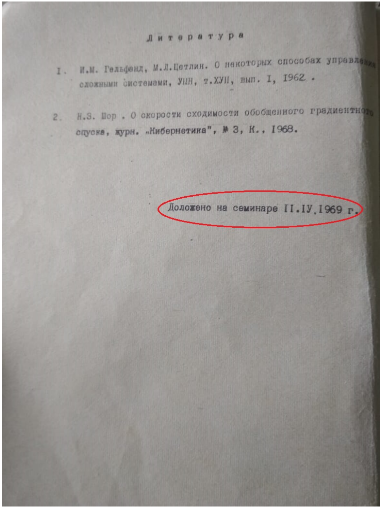
Пусть единственный минимум функции $f(x)$ достигается в точке $x^*=0$ и $f(x^*)=0$. Если $f(x)\not\equiv 0$, то поверхности $f(x)=c>0$ являются замкнутыми и выпуклыми. Для любого $c>0$ и α, $|\alpha|=1$ найдутся положительные $\bar{t}_c^{\alpha}$ и $\underline{t}_c^{\alpha}$ такие, что

$$f(\bar{t}_c^{\alpha}\alpha)=f(-\underline{t}_c^{\alpha}\alpha)=c.$$

Обозначим $\bar{t}_c^{\alpha}+\underline{t}_c^{\alpha}$ через t_c^{α}. $\max\limits_{|\alpha_1|=|\alpha_2|=1}\dfrac{t_c^{\alpha_1}}{t_c^{\alpha_2}}=K(c)$ назовем локальным коэффициентом овражности. $K=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{c\leq\varepsilon}K(c)$ - коэффициент овражности. Если $K=+\infty$, то функция $f(x)$ называется существенно овражной.

Из работы [2] ясно, что скорость сходимости обобщенного градиентного спуска, если вся траектория спуска проходит в области $f(x)\leq C$ может быть линейной с показателем $\dfrac{\sqrt{1-[\sup_{z\leq C}K(z)]^2}}{\sup_{z\leq C}K(z)}$, если $\sup\limits_{z\leq C}K(z)<\infty$.

3



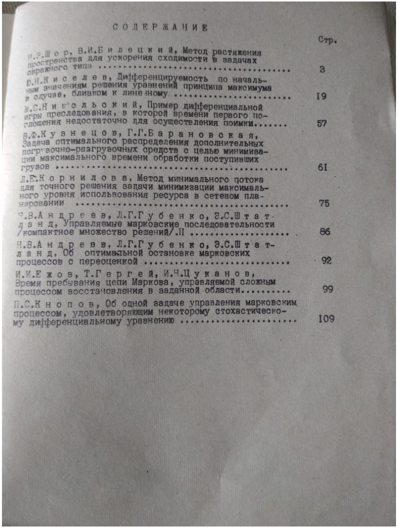
Литература

1. И.М. Гельфанд, М.Л.Цетлин. О некоторых способах управления сложными системами, УМН, т.ХУII, вып. I, 1962 .

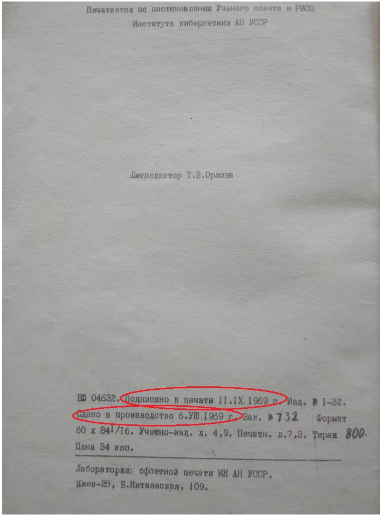
2. Н.З. Шор . О скорости сходимости обобщенного градиентного спуска, журн. „Кибернетика", № 3, К., 1968.

Доложено на семинаре II.IУ.1969 г.

Сборник 1969 (содержание и др.)



СОДЕРЖАНИЕ



Печатается по постановлению Ученого совета и РИСО Института кибернетики АН УССР

Литредактор Т.В.Орлова

БФ 04632. Подписано к печати II.IX.1969 г. Изд. № I-32. Сдано в производство 6.УШ.1969 г. Зак. № 732 Формат 60 х 84I/I6. Учетно-изд. л. 4,9. Печатн. л.7,3. Тираж 800. Цена 34 коп.

Лаборатория офсетной печати ИК АН УССР. Киев-28, Б.Китаевская, 109.

О трех идеях Шора (январь, 2012)

75-летию со дня рождения Н.З. Шора посвящена статья

Сергиенко И.В., Стецюк П.И.

О трех научных идеях Н.З. Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2012, № 1. – С. 4–22.

В статье описаны три центральные идеи Н.З. Шора:

- обобщенный градиентный спуск (1962),
- использование линейных преобразований пространства для улучшения обусловленности овражных функций (1969),
- двойственный подход к получению и уточнению оценок целевой функции в невыпуклых квадратичных моделях (1985).

Приведены методы и алгоритмы, разработанные на их основе в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

Content

Статья в газете „Сегодня“, 28 декабря 2002 года

ПОЕХАЛ В ГРЕЦИЮ, а чемодан остался в Венгрии...

Академик НАН Украины профессор Наум Шор, родившийся 1 января 1937 года, имеет железную логику и ясный ум. Он 44 года без перерыва работает в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова. Сегодня занимает там должность заведующего отделом методов решения сложных задач оптимизации.

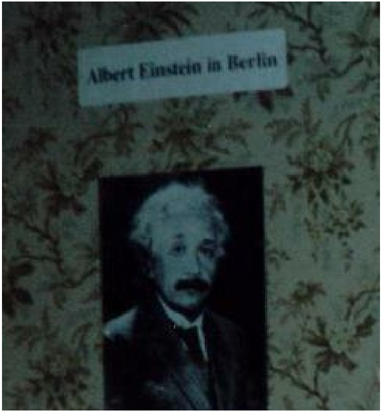
Коллеги из Швейцарии пригласили ученого в музей Эйнштейна в Берне, чтобы сделать это фото и подчеркнуть их сходство

— Что обо мне писать? — засмущался Наум Зуселевич. — Я живу: с работы домой и обратно. Все мои 66 лет забрала математика. Мне повезло, дипломной работой по диффе-

комился 40 лет назад, 1 января 1963 года. Звезды расположились так, что и она Козерог, родилась 9 января. А вот дети — сын и дочь — оба Раки. Гороскоп кошки Алисы не проверяли, достаточно того, что

Фотография (Ж.Ф. Эмменеггер, Берн, 1997)

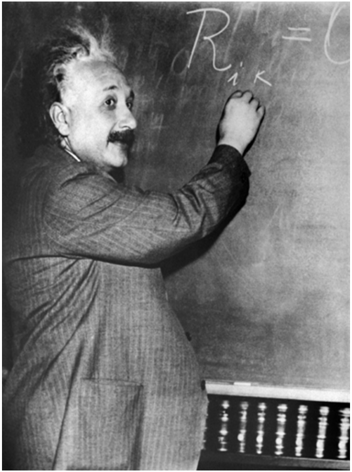
И еще о внешней схожести, но уже помоложе ...

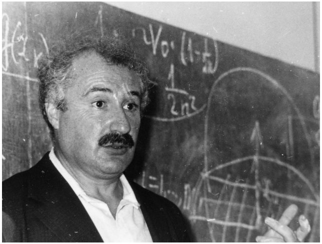


Альберт Ейнштейн в Берлине.

Наум Шор в Киеве.

Эйнштейн пишет послание Шору …





„… чтобы символом $R_\alpha(\xi)$ он обозначил свой оператор растяжения пространства“

Content

О сходстве идей ... или что общего?

между

оператором Шора для растяжения пространства

$$R_\alpha(\xi) = I + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \qquad \text{где} \qquad \alpha > 1, \tag{1}$$

(I – единичная $n{\times}n$-матрица, вектор $\xi \in E^n$ такой, что $\|\xi\|{=}1$)

и

формулой Ейнштейна для энергии в релятивистской динамике

$$E = mc^2, \qquad \text{где} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2}$$

Шар S_n и эллипсоид $\mathcal{E}_n$ в пространстве E^n

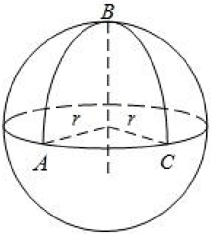
В преобразованном (т.е. в растянутом в направлении ξ с коэффициентом $\alpha = 1/\beta > 1$) пространстве $y = R_\alpha(\xi)x$ образом шара $S_n = \{x \in E^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ с радиусом r является эллипсоид $\mathcal{E}_n = \{y \in E^n : \|R_\beta(\xi)(y - y_0)\| \leq r\}$.

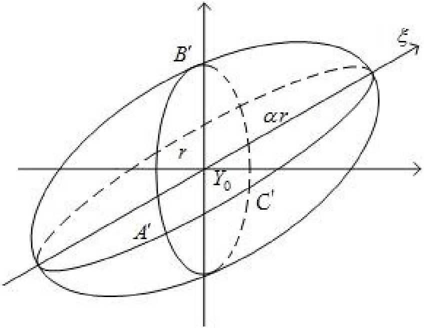
Объемы шара S_n и эллипсоида $\mathcal{E}_n$ равны

$$\mathrm{vol}(S_n) = v_0 r^n \qquad \text{и} \qquad \mathrm{vol}(\mathcal{E}_n) = \frac{v_0 r^n}{\det R_\beta(\xi)},$$

где v_0 – объем единичного n-мерного шара.

Пример: шар S_3 и эллипсоид $\mathcal{E}_3$





После растяжения пространства в направлении $\xi \in E^3$ шар (слева) является эллипсоидом (справа)

Соотношение объемов шара S_n и эллипсоида $\mathcal{E}_n$

Отношение объемов $\mathcal{E}_n$ и S_n вычисляется по формуле

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{\frac{v_0 r^n}{\det R_\beta(\xi)}}{v_0 r^n} = \frac{1}{\det R_\beta(\xi)} = \frac{1}{\beta} = \alpha > 1,$$

где v_0 – объем единичного n-мерного шара.

Его можно переписать так

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n) = \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\beta} = \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\sqrt{1-(1-\beta^2)}} \qquad (3)$$

Связь обьемов с формулой Эйнштейна

Из (3) следует

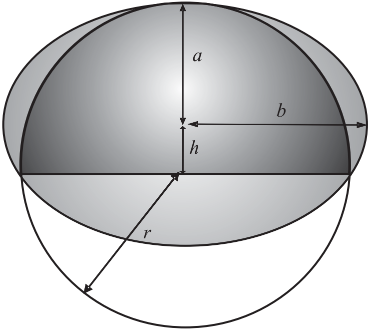
$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n) = \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\sqrt{1-(1-\beta^2)}} \;.\!=\!.\; \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad \text{(Shor)}$$

Чем не m? в формуле Эйнштейна (2) ...

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \text{(Einstein)}$$

Content

Оптимальный 1d-эллипсоид (Шор, 1977)



Эллипсоид $\mathcal{E}_n$, содержащий полушар в E^n, имеет минимальный обьем, если

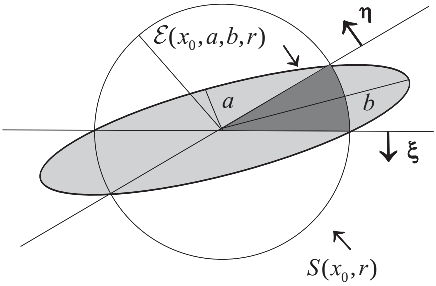
$$a = \frac{n}{n+1}r, \;\; b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}r, \;\; h = \frac{1}{n+1}r.$$

Чтобы преобразовать $\mathcal{E}_n$ в шар нужно растянуть пространство с коэффициентом $\alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$.

На каждой итерации МЭ объем эллипсоида уменьшается в

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{a}{r}\left(\frac{b}{r}\right)^{n-1} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n \leq 1-\frac{1}{2n},$$

Оптимальный 2d-эллипсоид (Стецюк, 1996)



Преобразование в шар требует растяжения

в направлении $\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}$

с коэф. $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}} > 1$

и последующего сжатия

в направлении $\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}$

с коэф. $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}} < 1.$

$$q = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}(x_0,a,b,r))}{\mathrm{vol}(S(x_0,r))} = \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right) = \sqrt{1-(\xi,\eta)^2}.$$

Content

В отделе 120 Института кибернетики

Разработаны:

1. **новые модификации r-алгоритмов** (устойчивые к накоплению ошибок вычислений);
2. **модификации метода эллипсоидов** (скорость сходимости оценивается геометрической прогрессией);
3. **субградиентные методы с преобразованием пространства** (используют фейеровские шаги).

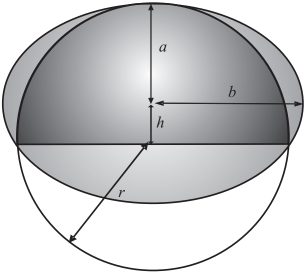
Методы имеют

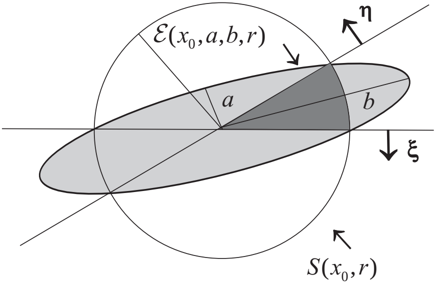
ускоренную сходимость для овражных выпуклых функций

и используются

как оптимизационные ядра для прикладных задач.

Где можно найти об этих методах?





1. Стецюк П.И. *Методы эллипсоидов и r-алгоритмы.* – Кишинэу, Эврика, 2014. – 488 с.

2. Стецюк П.И. *Двойственные оценки в квадратичных экстремальных задачах.* – Кишинэу, Эврика, 2018. – 503 с.

Субградиентные методы с преобразованием пространства

предназначены для решения задачи

$$f^* = f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x),$$

где $f(x)$ – выпуклая функция (гладкая, негладкая)

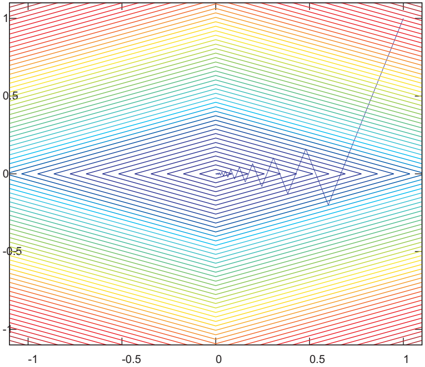
Заданы: x_0 – стартовая точка, B_0 – $n \times n$-матрица,

Итерации $k=1,2,\ldots,$ имеют вид

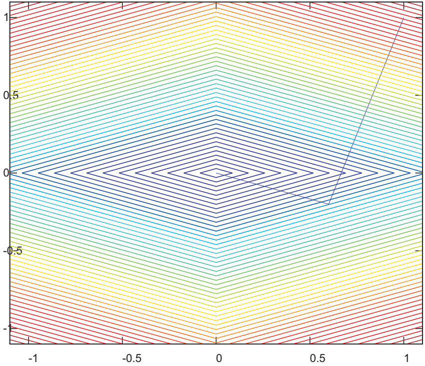
$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad B_{k+1} = B_k T_k, \qquad \text{(Shor69)}$$

где h_k – шаг, $g_f(x_k)$ – произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k, T_k – $n \times n$-матрица.

Ускорение сходимости: кусочно линейная функция



1. Траектория метода **ams**



2. …ускоренного метода **amsg2**

для овражной функции $f_1(x_1, x_2) = |x_1| + 10|x_2|,\ x_0 = (1, 1)$.

Заключение: **Как оптимизационные ядра**

программные реализации методов используют:

1. **Киселева Е.М.** (Днепр, задачи размещения);
2. **Стоян Ю.Г.** (Харьков, задачи упаковки);
3. **Соломон Д.И.** (Кишинэу, транспортные задачи);
4. **Шарый С.П.** (Новосибирск, интервальный анализ);
5. **Мица А.В.** (Ужгород, оптические покрытия).

Среди них

octave-функции – **ralgb5**, **amsg2p**, **emshor** и др.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!