О ДВОЙСТВЕННОЙ ОЦЕНКЕ ШОРА ДЛЯ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСНОЙ УПАКОВКИ КРУГОВ

Стецюк П.И.[1], Романова Т.Е.[2], Лиховид А.П[1]

[1]Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины
[2]Институт проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного

XXI Міжнародний науково-практичний семінар
"КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ"
17–18 травня 2019 р., м. Кропивницький (ЛА НАУ)

План доклада

1. Формулировка задачи и приложения
2. Математическая модель
3. Оценка ψ^* для глобального минимума
4. Вычислительный эксперимент

План доклада

1. Формулировка задачи и приложения
2. Математическая модель
3. Оценка ψ^* для глобального минимума
4. Вычислительный эксперимент

Формулировка задачи

Имеются круги S_i с радиусами r_i и весами w_i, $i = 1, \dots, m$. Полагаем, что центр тяжести круга S_i находится в его центре.

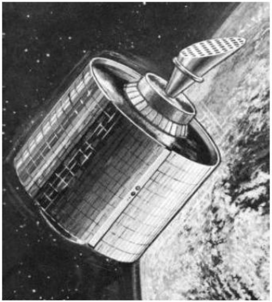
Равновесной упаковкой семейства кругов S_i, $i = 1, \dots, m$ будем называть такую их упаковку в круг S, чтобы радиус круга S был минимальным и центр тяжести семейства кругов S_i, $i = 1, \dots, m$, совпадал с центром круга S.

BCP-задача

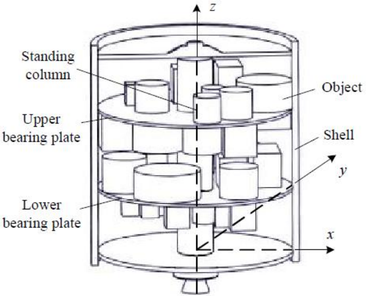
Найти равновесную упаковку семейства кругов S_i, $i = 1, \dots, m$.

Приложения BCP-задач

при моделировании спутников (космическая инженерия)



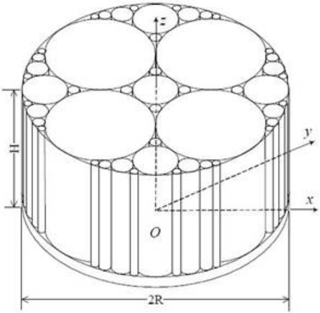
a. the international communication satellite

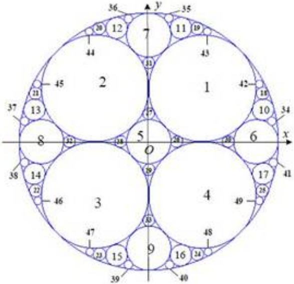


b. the simplified satellite module

Fasano G., Pinter J.D., eds., Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications. – Springer. – New York. – 2012. – 404 p.

Приложения BCP-задач





Упаковка круговых контейнеров одинаковой высоты в цилиндрический контейнер

План доклада

Математическая модель

Многоэкстремальная задача нелинейного программирования:

$$r^* = \min_{x,y \in R^m, r \geq r_{low}} r \tag{1}$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 \leq (r - r_i)^2, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad 1 \leq i < j \leq m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = 0. \tag{4}$$

Неизвестные величины: x_i, y_i – центр круга S_i, r – радиус круга S,
известные величины: $\lambda_i = w_i / \sum_{i=1}^{m} w_i$, $i = 1, \ldots, m$,
$r_{low} = \max\limits_{i=1,\ldots,m} r_i$ – нижняя граница на r – искомый радиус.

Ограничения в ВСР-задаче

Ограничения в задаче (1)–(4) означают следующее:

$$\varphi_i(x,r) = x_i^2 + y_i^2 - (r - r_i)^2 \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \qquad (2')$$

т.е. круги S_i, $i = 1, \dots, m$ содержатся внутри круга S,

$$\phi_{ij}(x) = -(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (r_i + r_j)^2 \le 0, \ \ 1 \le i < j \le m, \ (3')$$

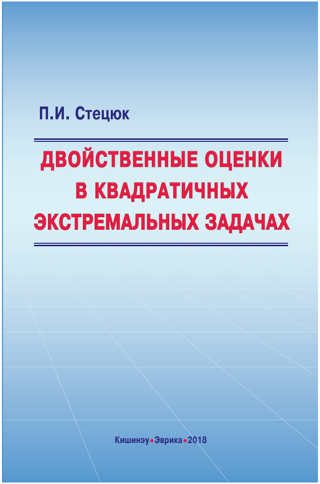
т.е. никакие два круга из S_i, $i = 1, \dots, m$ не пересекаются,

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0, \quad \Phi_2(y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = 0, \qquad (4')$$

т.е. центр тяжести кругов S_i, $i = 1, \dots, m$ находится в начале координат (центре круга S).

План доклада

О книге – Эврика: Кишинэу, 2018. – 503 с.



Книга посвящена развитию методов Н.З. Шора для нахождения и уточнения двойственных оценок целевой функции в квадратичных экстремальных задачах. В ней значительное внимание уделено новым семействам функционально избыточных ограничений для улучшения точности оценок в булевых квадратичных задачах, к которым сводится ряд известных NP-сложных комбинаторных задач и экстремальных задач на графах.

Квадратичная задача

$$f^* = (r^*)^2 = \min_{r,x,y} r^2 \tag{1''}$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 - r^2 + 2r_i r - r_i^2 \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2''}$$

$$-x_i^2 + 2x_i x_j - x_j^2 - y_i^2 + 2y_i y_j - y_j^2 + (r_i + r_j)^2 \le 0, \; 1 \le i < j \le m, \tag{3''}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j x_i x_j = 0, \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j y_i y_j = 0, \tag{4''}$$

$$r^2 - (r_{low} + r_{up}) r + r_{low} r_{up} \le 0. \tag{5''}$$

Свойства оценки ψ^*

1) $\psi^* \le f^* = (r^*)^2$ (Шор),

2) $r^* \ge \sqrt{\psi^*} \ge r_{low}$ (из модели).

$$(r_{low})^2 = \min_r r^2$$

$$r^2 - (r_{low} + r_{up})r + r_{low}r_{up} \le 0$$

$$(r_{low})^2 = \min_r r^2$$

$$(r - r_{low})(r - r_{up}) \le 0$$

План доклада

Тестовый пример Т.Е. Романовой

ВСР-задача для пяти неравных кругов:

- $m = 5$

Круги имеют различные радиусы и массы:

- $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$, $r_3 = 0.3$, $r_4 = 0.5$, $r_5 = 0.8$
- $m_1 = 0.0785$, $m_2 = 0.314$, $m_3 = 0.7065$, $m_4 = 1.9625$, $m_5 = 5.024$

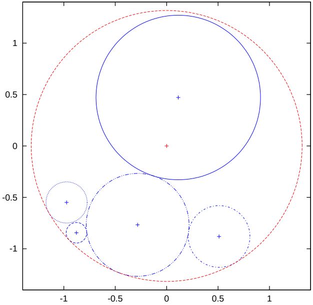
Точность для компонент центра тяжести

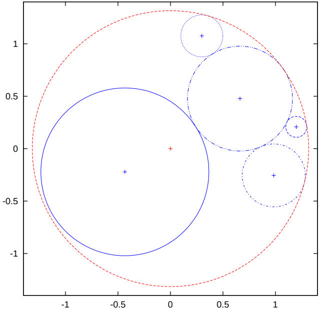
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0001$

т.е.

$$\varepsilon_1 \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \le \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i \le \varepsilon_2, \tag{4a}$$

Два близких локальных минимума





$$f^* = 1.3175$$

$$f^{**} = 1.3161$$

Вопрос: есть ли второй локальный минимум глобальным?

Доказательство глобальности

Если

$$r_{low} = 0.8, r_{up} = 1.35 > 1.3161$$

то

$$\psi^* = 1.7309$$

и получаем

$$r^* \geq \sqrt{\psi^*} \geq 1.3156$$

.

Литература (по теме доклада)

1. Стецюк П.И., Романова Т.Е., Шайтхауэр Г. О глобальном минимуме целевой функции в задаче равновесной упаковки кругов // Доповіді НАН України. – 2014. – № 6. – С. 53–57.
2. Stetsyuk P., Romanova T., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem // Optimization Letters. – 2016. – № 10. – P. 1347–1360.

Литература (по теме доклада)

3. Shor N.Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Boston/Dordrecht/London, Kluwer Academic Publishers, 1998. – 412 p.
4. Shor N.Z., Stetsyuk P.I. Dual Solution of Quadratic-Type Problems by r-algorithm (subroutine DSQTPr) // Abstracts of Second International Workshop „Recent Advances in Non-Differentiable Optimization“ (October 1–4, 2001, Kyiv, Ukraine). – P. 36.
5. Стецюк П.И. Двойственные оценки в квадратичных экстремальных задачах. – Эврика: Кишинэу, 2018.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!