ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА: ІСТОРІЯ ТА СЬОГОДЕННЯ

Стецюк П.І., Парасюк І.І.
stetsyukp@gmail.com, i.parasiuk@gmail.com

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова, Київ

XVI Міжнародна науково-практична конференція
"Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем"
21–23 листопада 2018 року, м. Дніпро

Зміст

Зміст

Задача Монжа (1781)

Транспортна задача веде свою історію від класичної роботи Г. Монжа (1781), в якій задачу сформульовано так: є купа піску і яма однакових об'ємів. Як засипати піском яму, витративши найменші зусилля на перевезення?

Monge G. Mémoire sur la théorie des dédlais et de remblais. Histoire de l'Académic Royale des science, 1781.

Стаття Канторовича (1942)

Вперше задача Монжа розв'язана Л.В. Канторовичем в трьохсторінковій статті "О перемещении масс" (ДАН СРСР, 1942), де запропонований і обгрунтований метод потенціалів з критерієм на мінімальне переміщення мас.

В ній наводяться дві прикладні задачі – скінченновимірна задача про залізничні перевезення та нескінченновимірна задача про вирівнювання площі аеродрому.

Купманс про статтю Канторовича (1956)

"Дорогой профессор Канторович. Недавно мне представился случай ознакомиться с экземпляром Вашей статьи "О перемещении масс" в Докладах Академии Наук СССР за 1942 г. Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, которое началось в период с 1941 г. и продолжается по настоящее время. Я прилагаю к письму краткий перечень наиболее важных статей, появившихся в американской литературе . . . В то же время я хотел бы отметить, что Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах".

Канторович Л. В. Математико-экономические работы. – Новосибирск: Наука, 2011. – 760 с. – (Избранные труды).

Зміст

Субградієнтний метод (Шор, 1962)

Саме транспортні задачі зумовили перший субградієнтний метод, запропонований в статті Н.З. Шора "Применение градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи" 1962 року. Він фактично є методом потенціалів, де потенціал – це "сфера влияния пункта производства".

"С математической точки зрения вычислительный процесс является разновидностью градиентного метода в пространстве потенциалов. В заключение показывается, что процесс решения обладает интересной эргодической закономерностью, что позволяет подбирать параметры процесса для получения решения с заданной точностью." (Шор, 2012, 11с.).

Шор Н.З. Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации: Сб. избр. тр. – Кишинэу: Эврика, 2012.

Виробничо-транспортні задачі

мають ряд властивостей, близьких до скінченновимірної транспортної задачі, що дозволяє розробляти спеціальні методи їх розв'язання, які зазвичай більш ефективні, ніж загальні методи лінійного програмування. ... Зокрема, ці властивості використовуються при побудові схем декомпозиції, які в поєднанні з **методами негладкої оптимізації** дозволяють отримати **максимальний обчислювальний ефект**.

Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. – М.: Наука, 1986.

Нескінченновимірні транспортні задачі

Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы. – Киев: Наукова думка, 2015.

... У монографії розглядаються різні класи неперервних задач оптимального розбиття множин та споріднених до них за постановкою неперервних задач оптимального кульового покриття. Показується, яким чином в кожному випадку задача нескінченновимірної оптимізації може бути зведена до задачі оптимізації негладкої функції скінченного числа змінних. Велика увага приділяється практичним застосуванням теорії оптимального розбиття множин і r-алгоритмів Шора.

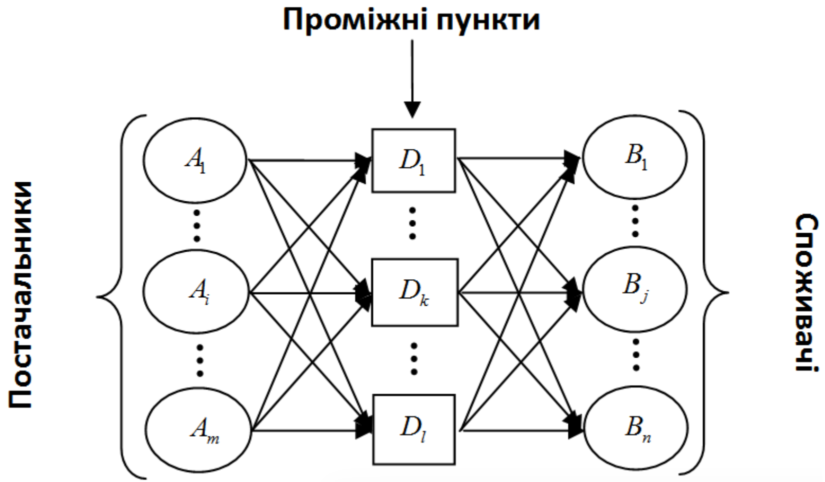
Двоетапна транспортна задача та її модифікації

Субградієнтні методи дозволяють створювати спеціалізовані алгоритми розв'язання модифікацій двоетапної транспортної задачі, які можуть бути використані агропідприємствами при розподілі та доставці вирощеної продукції для продажу або переробки на власних потужностях; для пошуку раціонального розташування складів з урахуванням визначеного положення постачальників та отримувачів матеріально-технічних засобів; для оптимального планування різноманітних процесів транспортування та зберігання будь-яких вантажів.

Стецюк П.І., Ляшко В.І., Мазютинець Г.В. Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2018. – Т. 1.

Зміст

Система зв'язків «A -> D –> B»



Постановка задачі

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \dots, A_m$ є $a_1, \dots, a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1, \dots, B_n$, задовольнивши їх потреби $b_1, \dots, b_n$.
Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів $D_1, \dots, D_l$.

Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} - витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} - витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j.

Невідомі у задачі

Нехай

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k;
y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j;

Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x\geq 0, y\geq 0} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = 1,\dots,m, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j, \quad j = 1,\dots,n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} y_{kj}, \quad k = 1,\dots,l. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) є задачею лінійного програмування, містить $(m+n)\times l$ змінних та $m+n+l$ обмежень.

Цільова функція та обмеження

Цільова функція (1) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти.

Обмеження (2) означають необхідність транспортування усієї продукції $a_1, \ldots, a_m$ із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) - що споживачам потрібно доставити необхідну продукцію $b_1, \ldots, b_n$ з проміжних пунктів.

Обмеження (4) задають умови на те, щоб вся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

ДТЗ з обмеженнями на пропускні спроможності

$$f^* = \min_{x\geq 0, y\geq 0} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \quad (1)$$

за обмежень (2)–(4) та додаткових обмежень

$$d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leq d_k^{up}, \quad k = 1, \dots, l, \quad (5)$$

Тут $d_1^{low}, \dots, d_l^{low}$ – мінімальні, а $d_1^{up}, \dots, d_l^{up}$ – максимальні пропускні спроможності проміжних пунктів $D_1, \dots, D_l$.

Задача (1)–(5) є задачею лінійного програмування, містить $(m+n)\times l$ змінних та $m+n+3l$ обмежень.

Додаткові обмеження

Обмеження (5) задають нижні та верхні межі на пропускні спроможності проміжних пунктів.

Їх також можна записати в такому вигляді

$$d_k^{low} \le \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \le d_k^{up}, \quad k = 1, \dots, l. \qquad (5a)$$

Умови сумісності

Лема 1

Обмеження (2)–(4) є сумісними, якщо виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{6}$$

Лема 2

Обмеження (2)–(5) є сумісними, якщо виконуються умови:

$$\sum_{k=1}^{l} d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{k=1}^{l} d_k^{up}. \tag{7}$$

Висновок

Про методи Шора для логістики (supply chain)

можно знайти в книгах:

- Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. – М.: Наука, 1986.
- Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы. – Киев: Наукова думка, 2015.
- Стецюк П.И. Двойственные оценки в квадратичных экстремальных задачах. – Кишинэу: Эврика, 2018.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!