УДК 519.8

ОПТИМАЛЬНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ВЕКТОРЫ КОНЕЧНОГО ПРОДУКТА И ДОБАВЛЕННОЙ СТОИМОСТИ В ПРОДУКТИВНОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Стецюк П. И.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

E-mail: stetsyukp@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача нелинейного программирования с билинейной целевой функцией, линейными ограничениями для прямой и двойственной моделей Леонтьева, двумя квадратичными равенствами, нормирующими векторы конечного продукта и добавленной стоимости. Если матрица Леонтьева (матрица коэффициентов прямых затрат) продуктивна, то оптимальное решение задачи выражается через собственные векторы, соответствующие максимальным собственным числам некоторых неотрицательных симметричных матриц. Если матрица Леонтьева продуктивна и неразложима, то задача имеет единственное решение, которое интерпретируется как оптимальные нормированные структуры конечного продукта и добавленной стоимости для экономики по Леонтьеву. Приведены расчеты для 15-отраслевого баланса Украины за 2003–2009 годы.

Ключевые слова. Матрица Леонтьева, статические модели Леонтьева, экстремальная квадратичная задача, собственные числа и собственные векторы, сингулярное число.

Введение

Леонтьевские модели "затраты-выпуск" и равновесных цен являются ключом к многим экономическим явлениям и политэкономическим величинам. Так, например, с их помощью профессор Хайнц Д. Курц (университет Граца, Австрия) исследует проблему добавленной стоимости, использование основного капитала и проблему технических изменений [1], профессор Генрих Бортис (университет Фрибурга, Швейцария) исследует связь между структурой труда и заработной платой [2]. В работе [1] подчеркивается, что хотя исследуемые в ней проблемы очень сложные, но перспективы обнадеживают и нет опасений, что аналитикам леонтьевских моделей скоро придется искать новые области исследований, потому что старые уже исчерпаны. Данная работа призвана в некоторой степени подтвердить этот тезис. В ней исследуются оптимальные соотношения между основными векторными величинами леонтьевской экономики, такими как валовой и конечный продукт, цены, нормы добавленной стоимости. Величины, характеризующие оптимальные соотношения, тесно связаны с максимальным сингулярным[1] числом неотрицательных матриц.

Матрицы Леонтьева *A* и *B*

Рассматривается экономика с n чистыми отраслями, т.е. каждая отрасль производит один вид продукта и разные отрасли выпускают разные продукты. Пусть $A \geq 0$ – неотрицательная $n \times n$–матрица

$$A = \{a_{ij}\},\ i,\ j = \overline{1,n},$$

где коэффициент $a_{ij} \geq 0$ обозначает величину затрат продукта отрасли i на изготовление единицы продукта отрасли j. Величины a_{ij} могут быть заданы в натуральном или в стоимостном выражении. Матрица A называется матрицей Леонтьева (матрицей коэффициентов прямых затрат, матрицей технологических коэффициентов). Для экономики страны (региона) матрица A несет информацию о сложившейся структуре межотраслевых связей, о существующей технологии общественного производства и т.д.

Матрицу A называют неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$A = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{Bmatrix},$$

где A_1 и A_3 – квадратные подматрицы размеров $k \times k$ и $(n-k) \times (n-k)$, соответсвенно. Неразложимость матрицы A означает, что каждая отрасль использует (хотя бы косвенно) продукты всех других отраслей.

Пусть λ_A – число Фробениуса, оно равно $\lambda_{max}(A)$ – максимальному собственному числу матрицы A. Число Фробениуса λ_A для неотрицательной матрицы $A \geq 0$ всегда положительно и не меньше, чем абсолютное значение любого другого собственного числа матрицы A (теорема Фробениуса–Перрона).

---

[1]Сингулярным числом матрицы А есть арифметическое значение квадратного корня соответствующего

Теорема 1 [3]. *Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$.*

Если матрица A является продуктивной, то неотрицательной будет матрица

$$B = (I - A)^{-1},$$

где I – единичная $n \times n$-матрица. Матрица B называется матрицей коэффициентов полных затрат (обратной матрицей Леонтьева). Для продуктивной матрицы A и соответствующей ей матрицы B числа Фробениуса связаны соотношениями

$$\lambda_B = \frac{1}{1-\lambda_A} \qquad \text{и} \qquad \lambda_A = 1 - \frac{1}{\lambda_B}.$$

Прямая и двойственная модели Леонтьева

Прямой моделью Леонтьева является модель "затраты-выпуск", описываемая равенством

$$y = (I - A)x, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор валового продукта и $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ – вектор конечного продукта, I – единичная $n \times n$ – матрица. Здесь и везде далее T – символ траспонирования. Если матрица A является продуктивной, то

$$x = By, \quad \text{где} \quad x \ge 0 \qquad \text{для любого } y \ge 0. \tag{2}$$

Двойственной моделью Леонтьева является модель равновесных цен, описываемая равенством

$$w = (I - A^T)p, \tag{3}$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$ – вектор цен (p_i – цена единицы продукта i–ой отрасли), $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ – вектор норм добавленной стоимости. Если матрица A является продуктивной, то

$$p = B^T w, \quad \text{где} \quad p \ge 0 \qquad \text{для любого } w \ge 0. \tag{4}$$

собственного числа матрицы $\mathrm{A}^T\mathrm{A}$ или, что то же самое, матрицы $\mathrm{A}\mathrm{A}^T$.

Прямую и двойственную модели Леонтьева связывает соотношение

$$p^T y = w^T x, \qquad (5)$$

которое означает, что национальный продукт совпадает с национальным доходом. Соотношение (5) следует из справедливости следующей цепочки равенств

$$p^T y = p^T (I - A)x = \left((I - A^T)p\right)^T x = w^T x.$$

Квадратичная экстремальная задача

Пусть вектор $y \geq 0$ ($\|y\| = 1$) задает нормированную структуру конечного выпуска в прямой модели Леонтьева (1), а вектор $c \geq 0$ ($\|c\| = 1$) задает нормированную структуру добавленной стоимости в двойственной модели Леонтьева (3). Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования [4]

$$f^* = (p^*)^T y^* = \max_{y \in R^n, p \in R^n} p^T y \equiv \max_{x \in R^n, w \in R^n} w^T x = (w^*)^T x^* \qquad (6)$$

при ограничениях

$$y = (I - A)x, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad (7)$$

$$w = (I - A^T)p, \qquad p \geq 0, \qquad w \geq 0, \qquad (8)$$

$$\|y\|^2 = 1, \qquad \|w\|^2 = 1, \qquad (9)$$

где матрица A – заданная матрица Леонтьева (неотрицательная $n \times n$-матрица), а неизвестными являются компоненты n–мерных векторов x, y, p, w.

Условие эквивалентности "$\equiv$" в целевой функции (6) означает использование либо целевой функции $p^T y$, либо $w^T x$. Это следует из справедливости соотношения (5), которое связывает прямую и двойственную модели Леонтьева, заданные ограничениями (7) и (8) соответственно. Следовательно, в задаче (6) – (9) требуется найти такие нормированные векторы конечного выпуска (вектор y^*) и добавленной стоимости (вектор

w^*), чтобы с точностью до некоторого постоянного множителя максимума достигал национальный продукт (он же равен национальному доходу). Оптимальным значениям векторов y^* и w^* будут соответствовать такие значения векторов x^* и p^*, которые с точностью до постоянных множителей будут определять оптимальный валовой продукт в прямой модели Леонтьева и оптимальные цены в двойственной модели Леонтьева.

В общем случае нахождение векторов y^* и w^*, x^* и p^* требует использования численных методов оптимизации для решения квадратичной экстремальной задачи (6) – (9). Здесь целевая функция (6) является билинейной функцией либо от переменных p и y, либо от переменных w и x, а ограничения (9) содержат два квадратичных равенства. Однако оказывается, что в важных для экономических приложений случаях задача (6)–(9) может быть решена аналитически в терминах собственных чисел и собственных векторов симметричных матриц.

Алгоритм для продуктивной матрицы A

Если матрица A продуктивна и матрица $B = (I - A)^{-1}$, то задача (6) – (9) может быть решена в два этапа:

Этап 1. Находим векторы y^* и w^* путем решения квадратичной задачи

$$f^* = (w^*)^T By^* = \max_{y\geq 0,\, w\geq 0} w^T By \tag{10}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1.$$

Этап 2. Вычисляем $x^* = By^*$ и $p^* = B^T w^*$.

Теорема 2 [5]. *Если матрица A – продуктивна, то решение задачи* (6) – (9) *имеет вид*

$$y^* = \xi, \quad x^* = By^*, \quad w^* = \eta, \quad p^* = B^T w^*,$$

где ξ и η – неотрицательные нормированные собственные векторы матриц $B^T B$ и BB^T, отвечающие их максимальным собственным числам $\lambda_{max}(B^T B)$ и $\lambda_{max}(BB^T)$. Оптимальное значение целевой функции (6) равно

$$f^* = \sqrt{\lambda_{max}(B^T B)} = \sqrt{\lambda_{max}(BB^T)} = \sigma_B, \tag{12}$$

где σ_B – максимальное сингулярное число матрицы B.

Для продуктивной матрицы A векторы y^* и w^* не обязательно определяются единственным образом. Для их единственности достаточно чтобы продуктивная матрица A была еще и неразложимой.

Теорема 3 [6]. *Если матрица Леонтьева A – продуктивна и неразложима, ей соответствует матрица $B = (I - A)^{-1}$, то задача* (6) – (9) *имеет единственное решение, все компоненты которого положительны. Это решение имеет вид*

$$y^* = \xi, \quad x^* = By^*, \quad w^* = \eta, \quad p^* = B^T w^*,$$

где ξ и η – положительные нормированные собственные векторы матриц $B^T B$ и BB^T, соответствующие их максимальным собственным числам $\lambda_{max}(B^T B)$ и $\lambda_{max}(BB^T)$.

Дадим эквивалентную формулировку теоремы 3, которая проясняет содержательный смысл собственных векторов и максимального сингулярного числа.

Теорема 4. *Если матрица A – продуктивна и неразложима, σ_B – максимальное сингулярное число матрицы $B = (I - A)^{-1}$, тогда задача* (6) – (9) *имеет единственное решение*

$$f^* = \sigma_B, \quad y^* = \xi, \quad x^* = \sigma_B \bullet \eta, \quad w^* = \eta, \quad p^* = \sigma_B \bullet \xi,$$

где ξ and η – положительные нормированные собственные векторы матриц $B^T B$ и BB^T, соответствующие их максимальным собственным числам.

Для продуктивной и неразложимой матрицы Леонтьева A теорема 4 определяет оптимальную нормированную структуру конечного продукта (вектор y^*) и оптимальную нормированную структуру добавленной стоимости (вектор w^*). Первой соответсвуют компоненты собственного вектора ξ, а второй – компоненты собственного вектора η.

Векторы y^* и w^* для Украины (15 отраслей)

Межотраслевой баланс экономики Украины с 2000 года ведется по 38 отраслям (кодам видов экономической деятельности). Он публикуется в ежегодных статистических сборниках Госкомстата Украины, которые можно найти на сайте http://www.ukrstat.gov.ua. Широко используется агрегированный 15-отраслевой баланс, который построен в результате объединения нескольких отраслей из 38-отраслевого баланса в одну агрегированную: так, например, добыча угля и торфа, добыча углеводородов и добыча неэнергетических материалов группируются в сектор добывающей промышленности. Названия всех 15 агрегированных отраслей приведены на рис. 1 для фрагмента матрицы Леонтьева за 2009 год.

В табл. 1 даны оптимальные нормированные структуры конечного продукта (векторы y^*) и оптимальные нормированные структуры добавленной стоимости (векторы w^*) для 15-отраслевых матриц Леонтьева [7]. Эти матрицы построены на основе таблиц "затраты-выпуск" в ценах потребителей за 2003 – 2009 годы [8]. Использовался следующий способ их построения. Для каждой отрасли j из таблиц были взяты ее валовый выпуск V_j и объем продукции $\tilde{a}_{ij}$ отрасли i, израсходованный отраслью j в процессе производства. Коэффициенты матрицы Леонтьева a_{ij} получены в результате деления этих чисел: $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}/V_j$.

матрица Леонтьева

№	Название отрасли \ № отрасли	1	2	3	4	5
1	Сельское хозяйство, охотничье и лесное хозяйство	0,25644	0,07763	0,00214	0,03313	0,00017
2	Рыбное хозяйство	0,00017	0,07457	0,00001	0,00049	0,00001
3	Добывающая промышленность	0,01008	0,00367	0,06446	0,11893	0,33387
4	Перерабатывающая промышленность	0,18065	0,18032	0,15941	0,29734	0,11449
5	Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0,01163	0,02934	0,08042	0,02750	0,07150
6	Строительство	0,00019	0,00000	0,00107	0,00025	0,00176
7	Торговля, ремонт автомобилей, бытовых изделий и предметов личного пользования	0,12371	0,21394	0,06930	0,20672	0,00137
8	Деятельность гостиниц и ресторанов	0,00025	0,00122	0,00194	0,00116	0,00254
9	Деятельность транспорта и связи	0,04232	0,08924	0,12953	0,04982	0,01114
10	Финансовая деятельность	0,00225	0,00428	0,00749	0,00809	0,01582
11	Операции с недвижимым имуществом, аренда, инжиниринг и предоставление услуг	0,00860	0,01284	0,01234	0,01477	0,01549
12	Государственное управление	0,00032	0,00122	0,00207	0,00242	0,00726
13	Образование	0,00006	0,00000	0,00042	0,00011	0,00052
14	Здравоохранение и предоставление соц. помощи	0,00032	0,00244	0,00134	0,00045	0,00093
15	Предоставление коммунальных и индивидуальных услуг, деятельность в сфере культуры и спорта	0,00018	0,00061	0,00151	0,00083	0,00222

Рис. 1. Фрагмент 15-отраслевой матрицы Леонтьева A за 2009 год

Таблица 1.

Оптимальные векторы y* и w* (Украина, 15 отраслей)

	2003		**2004**		**2005**		**2006**		**2007**		**2008**		**2009**	
λ_B	2.418		2.408		2.476		2.409		2.338		2.305		2.323	
σ_B	2,914		2,937		3,107		2,980		2,865		2,884		2,866	
	y*	**w***	**y***	**w***	**y***	**w***	**y***	**w***	**y***	**w***	**y***	**w***	**y***	**w***
1	0,26	0,24	0,26	0,21	0,27	0,20	0,28	0,20	0,28	0,20	0,28	0,18	0,28	0,19
2	0,28	0,10	0,26	0,09	0,30	0,10	0,29	0,10	0,27	0,10	0,28	0,11	0,26	0,10
3	0,33	0,35	0,32	0,33	0,30	0,29	0,28	0,28	0,25	0,25	0,24	0,27	0,28	0,30
4	0,55	0,76	0,57	0,78	0,55	0,81	0,55	0,80	0,56	0,78	0,56	0,79	0,54	0,76
5	0,26	0,20	0,24	0,17	0,22	0,16	0,22	0,16	0,23	0,16	0,23	0,16	0,25	0,18
6	0,30	0,11	0,33	0,12	0,33	0,12	0,35	0,12	0,35	0,14	0,38	0,14	0,37	0,14
7	0,19	0,27	0,17	0,26	0,23	0,29	0,24	0,30	0,23	0,32	0,22	0,30	0,23	0,32
8	0,27	0,10	0,26	0,10	0,28	0,09	0,24	0,09	0,23	0,09	0,22	0,09	0,25	0,10
9	0,21	0,22	0,21	0,24	0,23	0,22	0,24	0,23	0,26	0,24	0,26	0,25	0,25	0,26
10	0,12	0,11	0,11	0,14	0,09	0,09	0,07	0,07	0,08	0,09	0,07	0,08	0,06	0,07
11	0,17	0,15	0,17	0,16	0,16	0,14	0,19	0,16	0,21	0,20	0,19	0,18	0,21	0,22
12	0,15	0,06	0,16	0,07	0,11	0,05	0,10	0,04	0,11	0,05	0,12	0,05	0,09	0,04
13	0,10	0,04	0,09	0,03	0,10	0,03	0,10	0,04	0,09	0,03	0,10	0,04	0,11	0,04
14	0,18	0,07	0,18	0,07	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17	0,06	0,17	0,06
15	0,16	0,07	0,16	0,07	0,15	0,06	0,15	0,07	0,15	0,08	0,13	0,07	0,14	0,08

Из табл. 1 видим достаточно высокую устойчивость компонент для ряда отраслей в парах векторов (y^*, w^*) для разных лет. Кроме того, максимальные сингулярные числа σ_B на 20-25% больше, чем числа Фробениуса λ_B. Это означает, что по критерию максимизации национального дохода оптимальные нормированные структуры конечного выпуска и добавленной стоимости лучше, чем их нормированные аналоги, найденные с помощью векторов Фробениуса.

Похожая ситуация имеет место для 22-отраслевых матриц Леонтьева (табл. 1) из системы таблиц "затраты-выпуск" России за 2001 – 2003 годы. Оптимальные векторы y^* и w^* для этих матриц даны в работе [9].

Заключение

Модель (6) – (9), объединяющая прямую и двойственную статические модели Леонтьева, позволяет использовать для анализа экономической системы сингулярные числа и собственные векторы некоторых симметричных матриц. С их помощью можно исследовать связи между затратами на производство продукции и ценами при распределении продукции в экономической системе. Это пополняет арсенал средств для анализа качественных свойств леонтьевских моделей, который можно осуществить с помощью чисел и векторов Фробениуса. Усовершенствование модели (6) – (9) позволит оценить долю косвенных затрат в процессе производства как системы в целом, так и ее отдельных отраслей. Это дает возможность обнаружить такие коэффициенты в матрице Леонтьева, изменения которых необходимо отслеживать в первую очередь.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке SNSF (Швейцария), проект №127962 "Analysis of Institutional and Technological Changes in Market and Transition Economies on the Background of the Present Financial Crisis". Автор благодарен доктору Жан-Франсуа Эмменеггеру и профессору Генриху Бортису (университет Фрибурга, Швейцария) за внимание к этой работе, активное ее обсуждение и полезные замечания.

Список литературы

[1] Kurz H.D. Who is going to kiss sleeping beauty? on the 'classical' analytical origins and perspectives of input-output analysis // Review of Political Economy, 2011. – Vol. 23(1). – 25 – 47.

[2] Bortis H. Keynes and the Classics: Notes on the Monetary Theory of Production, in: Modern Theories of Money. The Nature and Role of Money in Capitalist Economies, Rochon L.-P. and Sergio Rossi (eds), 2003. – Edward Elgar: UK, USA. – Pp. 411 – 474.

[3] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.

[4] Стецюк П.И., Кошлай Л.Б., Пилиповский А.В. О задаче оптимального соотношения между спросом и добавленной стоимостью в моделях Леонтьева // Теорія оптимальних рішень. – 2010. – № 9. – С. 136 – 143.

[5] Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Оптимальная нормированная структура спроса и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – №5. – С. 51 – 59.

[6] Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Об одной экстремальной задаче для связи прямой и двойственной моделей Леонтьева // Спектральные и эволюционные задачи. – 2011. – Т. 2. – №2. – С. 164 – 169.

[7] Стецюк П.И., Бондаренко А.В. О спектральных свойствах модели Леонтьева // Теорія оптимальних рішень. – 2011. – №10. – С. 84 – 90.

[8] Статистическая информация [Электронный ресурс]: Таблица «Затраты-выпуск» (в ценах потребителей) / Госкомстат Украины. – http://www.ukrstat.gov.ua. – Режим доступа: свободный.

[9] Стецюк П. И. О спектральных свойствах матриц Леонтьева // Сборник трудов Всероссийской научно-практической конференции «Статистика, моделирование, оптимизация» (28 ноября – 2 декабря 2011 г., г. Челябинск, Южно-Уральский государственный университет).