В.В. ГРИЦИК
А.І. ШЕВЧЕНКО
О.М. КІСЕЛЬОВА
С.В. ЯКОВЛЕВ
П.І. БІДЮК
М.І. ГІЛЬ
Ю.В. КРАК
Т.Є. РОМАНОВА
А.І. КУЛЯС
П.І. СТЕЦЮК

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ПРОСТОРОВИХ ФОРМ ОБ'ЄКТІВ

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

1.5 Субградієнтні методи оптимізації негладких опуклих функцій в екстремальних квадратичних задачах

До мінімізації опуклих функцій з розривним градієнтом зводиться велике число проблем, що виникають при розв'язуванні складних задач математичного програмування. Методи розв'язання задач розміщення, покриття та розбиття, як описано вище, на певному етапі використовують фундаментальні результати теорії негладкої оптимізації. Володіння методами недиференційовної оптимізації дає можливість гнучко використовувати схеми декомпозиції (за змінними, обмеженнями, ресурсами тощо), які враховують специфіку задач великої розмірності, дозволяє ефективно одержувати двоїсті оцінки в задачах дискретного і неперервно-дискретного програмування та для деяких класів багатоекстремальних задач. З'являється можливість використовувати негладкі функції штрафу, що дозволяють при скінченних значеннях штрафних параметрів одержувати задачу безумовної мінімізації, еквівалентну початковій задачі опуклого програмування. Техніко-економічні характеристики об'єктів, що підлягають оптимізації, зазвичай добре апроксимуються кусково-гладкими функціями від невідомих параметрів, і це також породжує задачі оптимізації з негладкими функціями. Відсутність ефективних методів негладкої оптимізації ускладнювало розв'язування вказаних класів задач та змушувало або змінювати формулювання задачі, що погіршувало відповідність моделі реальності, або використовувати різні прийоми згладжування. Останнє не завжди приводить до успіху, тому що застосування згладжування погіршує обумовленість функції, яку мінімізують, та знижує обчислювальну стійкість навіть таких ефективних методів гладкої мінімізації, як квазіньютонівські та методи спряжених градієнтів. Таким чином, область застосувань методів негладкої оптимізації є досить широкою, і розробці обчислювальних методів негладкої оптимізації слід приділяти велику увагу.

1.5.1 Субградієнтні методи з перетворенням простору. Головним здобутком цього підрозділу є розробка нових субградієнтних методів із перетворенням простору, які побудовані на апроксимації множини екстремумів еліпсоїдами з монотонним зменшенням їх об'єму. Наведено нові сімейства субградієнтних методів з перетворенням простору для знаходження точки мінімуму опуклої функції при апріорному знанні оптимального значення функції, які мають прискорену збіжність при розв'язуванні задач з яружними особливостями. Методи базуються на використанні оператора розтягу простору та нових класів лінійних неортогональних операторів перетворення n-вимірного евклідового простору для зовнішньої апроксимації еліпсоїдами опуклих тіл, отриманих в результаті перетину кулі та напівпросторів. Методи адаптовано для знаходження допустимої точки системи опуклих нерівностей.

Операція розтягу простору змінних вперше була введена Н.З. Шором в 1969 році як евристична процедура для покращення обумовленості задачі. Для n-вимірного евклідового простору E^n вона реалізується за допомогою оператора розтягу, що у векторній формі можна записати так:

$$R_\alpha(\xi) = I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \quad \xi \in E^n, \quad \|\xi\| = 1, \quad \alpha > 1,$$

де $(\cdot)^T$ означає транспонування, I_n – одинична матриця розміру $n \times n$, α – коефіцієнт розтягу простору, ξ – напрямок розтягу. При описі алгоритмів використовується оператор $R_\beta(\xi)$, обернений до оператора розтягу простору $R_\alpha(\xi)$. Він має такий вигляд:

$$R_\beta(\xi) = R_\alpha^{-1}(\xi) = I_n + (\beta - 1)\xi\xi^T, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1,$$

і в методах з розтягом простору змінних використовується для «стискування» простору субградієнтів. Оператор $R_\alpha(\xi)$ покладено в основу двох сімейств субградієнтних методів з розтягом простору, які дозволили ефективно розв'язувати задачі мінімізації негладких функцій з яружними особливостями.

Перше сімейство – субградієнтні методи з розтягом простору в напрямку субградієнта. Світове визнання одержав частковий випадок цих методів – метод еліпсоїдів, швидкість збіжності якого залежить лише від розмірності простору змінних. Використання методу еліпсоїдів дозволило вирішити ряд важливих питань у теорії складності задач математичного програмування. Домовимось метод еліпсоїдів називати класичним методом еліпсоїдів, або методом еліпсоїдів Юдіна-Немировського-Шора. Московські математики Д.Б. Юдін та А.С. Немировський отримали цей метод у 1976 році із схеми послідовних відсічень (методи відсікаючих гіперплощин), а Н.З. Шор отримав його у 1977 році із сімейства методів із розтягом простору в напрямі субградієнта, встановивши зв'язок між величиною кроку та коефіцієнта розтягу простору.

Друге сімейство – субградієнтні методи з розтягом простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів, вони отримали назву r-алгоритмів. На поточний момент r-алгоритми є могутнім практичним засобом розв'язування задач недиференційовної оптимізації. Зусиллями Н.З. Шора та його учнів розроблено кілька модифікацій r-алгоритму для розв'язання різноманітних задач оптимізації. Незважаючи на те, що r-алгоритмам уже майже 40 років (вони запропоновані Н.З. Шором і М.Г. Журбенко у 1971 році), проблема їх обґрунтування залишається актуальною й донині. У роботі [65] побудовано приклад опуклої кусково-лінійної функції, при мінімізації якої можливе «зациклювання» $r_\mu(\alpha)$-алгоритму (один із варіантів r-алгоритмів) в неоптимальній точці. Він демонструє, що для негладких функцій точки з лінійно-залежною множиною субградієнтів можуть служити «уловлювачами» для мінімізуючої послідовності $r_\mu(\alpha)$-алгоритму, і показує, що обґрунтувати збіжність $r_\mu(\alpha)$-алгоритму для всього класу опуклих функцій неможливо.

Головна проблема полягає в тому, що r-алгоритми не мають конструктивного критерію зупинки для негладких опуклих функцій. Однак його легко забезпечити, якщо орієнтуватися на використання аналогічного критерію, що і в класичному методі еліпсоїдів. У зв'язку з цим підхід, заснований на зовнішній апроксимації множини екстремумів еліпсоїдом з монотонним зменшенням його об'єму, є перспективним та дає змогу обґрунтовувати нові субградієнтні методи. Певний спосіб побудови таких еліпсоїдів визначає конкретний алгоритм. Для методів з розтягом простору така інтерпретація є наочною і дозволяє зв'язати для них кроковий множник у напрямі руху і коефіцієнт розтягу простору з такими характеристиками опуклих функцій, як геометрія ліній рівня $f(x)$ і геометрія судиференціала в екстремумі. При цьому можна забезпечити і антияружні прийоми, які близькі до тих, що використані в r-алгоритмах. Вони пов'язані з перетворенням спеціального еліпсоїда в кулю за рахунок розтягу простору в напрямі різниці двох нормованих субградієнтів. У роботах [151, 153] запропонована та обґрунтована модифікація методу еліпсоїдів з такою ж асимптотичною швидкістю збіжності по об'єму, як і в методі еліпсоїдів Юдіна-Немировського-Шора. Вона може бути застосована і до одновимірних задач, для яких гарантує на кожній ітерації коефіцієнт зменшення об'єму, рівний $2-\sqrt{2} \approx 0.5858$. У роботі [88] дана геометрична інтерпретація процесів описаних еліпсоїдів, що включають перетин кулі та гіперплощини. Вони дозволяють реалізовувати монотонні по об'єму методи для знаходження стаціонарних точок спеціальних задач на основі оператора розтягу простору. Ці методи гарантують збіжність за скінченну кількість ітерацій, але вони мають обмежену область застосування та не можуть бути використані для всього класу опуклих функцій. Для цього підходить модифікація методу еліпсоїдів [133], яка прискорена за рахунок використання еліпсоїда мінімального об'єму для кульового шару на основі відсікаючої гіперплощини з попередньої ітерації. При мінімізації яружних функцій швидкість збіжності модифікації в десятки разів краща, ніж швидкість збіжності методу еліпсоїдів Юдіна-Немировського-Шора.

Однак антияружний прийом, що використано в [133], не дає можливості пояснити та обґрунтувати антияружний прийом, який в монотонних варіантах r-алгоритмів визначає напрямок спадання функції. Розтяг простору в напрямку різниці двох субградієнтів з достатнім коефіцієнтом розтягу перетворює тупий кут між субградієнтами на гострий, тобто відповідні образи цих антисубградієнтів у розтягнутому просторі стають напрямками спадання функції.

Розглянемо нові способи обґрунтування субградієнтних методів, що базуються на апроксимації множини екстремумів еліпсоїдами з монотонним зменшенням їх об'єму та використовують антияружні прийоми, які близькі до тих, що використані в

r-алгоритмах. Це забезпечує знайдений у роботі [67] мінімального об'єму еліпсоїд з центром в точці x_0, який містить опукле тіло в E^n, одержане внаслідок перерізу кулі $S(x_0, r) = \{x : \| x - x_0 \| \le r\}$ і двох півпросторів $P(x_0, \xi) = \{x : (x - x_0, \xi) \le 0\}$ і $P(x_0, \eta) = \{x : (x - x_0, \eta) \le 0\}$, таких, що $-1 < (\xi, \eta) < 0$, $\| \xi \| = 1$, $\| \eta \| = 1$ (рис. 1.5.1).

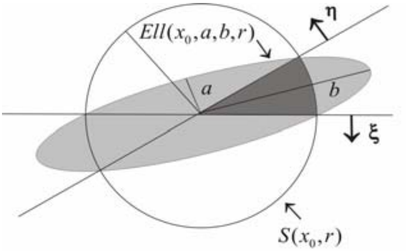

Рисунок 1.5.1 – Еліпсоїд $ell(x_0, a, b, r)$

Умовимось такий еліпсоїд називати $ell(x_0, a, b, r)$. Його об'єм менший, ніж об'єм кулі $S(x_0, r)$ в $\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}$ раз, довжина півосі в напрямку $\xi - \eta$ дорівнює $a = \dfrac{r}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}}$, в напрямку $\xi + \eta$ – $b = \dfrac{r}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}}$, а у всіх ортогональних до ξ та η напрямках довжини півосей дорівнюють r.

Перетворення еліпсоїда $ell(x_0, a, b, r)$ в кулю радіуса r реалізується за допомогою оператора

$$T_2(\xi,\eta) = R_{\alpha_1}\left(\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}\right) R_{\alpha_2}\left(\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}\right) \qquad (1.5.1)$$

та відповідає послідовному використанню двох операторів розтягу простору в ортогональних напрямах – розтяг простору в напрямі різниці векторів ξ та η з коефіцієнтом $\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}} > 1$ та стиснення простору в напрямі суми векторів ξ та η з коефіцієнтом $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}} < 1$.

Лема 1.5.1. Нехай B_k – невироджена матриця розміром $n \times n$, g_1, g_2 – n-вимірні вектори, такі, що b_i, і нехай

$$B_{k+1} = B_k R_{\beta_1}\left(\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}\right) R_{\beta_2}\left(\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}\right), \qquad (1.5.2)$$

де $\xi = \dfrac{B_k^T g_1}{\| B_k^T g_1 \|}$; $\eta = \dfrac{B_k^T g_2}{\| B_k^T g_2 \|}$; $\beta_1 = \sqrt{1-(\xi,\eta)}$; $\beta_2 = \sqrt{1+(\xi,\eta)}$.

Тоді матриця B_{k+1} – невироджена та має такі властивості:

а) $\det(B_{k+1}) = \det(B_k)\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}$, б) $(B_{k+1}^T g_1, B_{k+1}^T g_2) = 0$.

Лема 1.5.1 має наступну інтерпретацію. Властивість а) відображає зменшення об'єму еліпсоїда виду $ell(x_0, a, b, r)$ по відношенню до об'єму кулі $S(x_0, r)$ і зменшення об'єму буде тим більшим, чим тупішим буде кут між векторами ξ та η. Властивість б) означає наступне. Нехай g_1 та g_2 – субградієнти опуклої негладкої функції $f(x)$ в точці x_k. Тоді $B_k^T g_1$ та $B_k^T g_2$ є субградієнтами опуклої негладкої функції $\phi_k(y) = f(B_k y)$ в точці $y_k = A_k x_k$ перетвореного за допомогою лінійного оператора $A_k = B_k^{-1}$ просторі $Y = A_k X$. Кут між субградієнтами тупий, а значить, в перетвореному просторі змінних жоден з цих двох антисубградієнтів в точці y_k не може бути напрямом спадання функції $\phi_k(y)$. Перетворення простору $Y = A_{k+1} X$, $A_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$, де B_{k+1} обчислена згідно з (1.5.2), ортогоналізує субградієнти $B_{k+1}^T g_1$ і $B_{k+1}^T g_2$ для функції $\phi_{k+1}(y) = f(B_{k+1} y)$ у перетвореному просторі змінних $Y = A_{k+1} X$. Умова $\left(\dfrac{B_k^T p_1}{\| B_k^T p_1 \|}, \dfrac{B_k^T p_2}{\| B_k^T p_2 \|}\right) > -1$ потрібна, щоб така ортогоналізація була можливою.

Іншими словами, властивість б) гарантує антияружний прийом по типу того, що використовується в r-алгоритмах. Субградієнти з тупим кутом в поточному просторі змінних в черговому просторі змінних стають ортогональними, що дає змогу покращити поверхні рівня яружної функції. При цьому коефіцієнти розтягу простору в напрямі різниці нормованих субградієнтів та в напрямі суми нормованих субградієнтів визначаються на основі кута між субградієнтами. Чим тупішим буде кут між ними, тим більшим буде коефіцієнт розтягу простору в напрямі різниці двох нормованих субградієнтів.

Використання оператора (1.5.1) на кожній ітерації методу вимагає в два рази більше арифметичних операцій, ніж в r-алгоритмах. Для того щоб зберегти ціну ітерації такою ж, як і в r-алгоритмах, оператору (1.5.1) у роботі [69] знайдено заміну у формі лінійного оператора з E^n в E^n. Цей оператор названо одноранговим еліпсоїдальним оператором і в матричній формі для векторів ξ та η він має вигляд

$$T_1(\xi,\eta) = I_n - \frac{1}{1-(\xi,\eta)^2}\left(\left(1-\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}\right)\eta - (\xi,\eta)\xi\right)\eta^T. \quad (1.5.3)$$

Обернений до (1.5.3) оператор $T_1^{-1}(\xi,\eta)$ (для перетворення простору субградієнтів) має вигляд

$$T_1^{-1}(\xi,\eta) = I_n + \frac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}}\left(\left(1-\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}\right)\eta - (\xi,\eta)\xi\right)\eta^T. \quad (1.5.4)$$

Лема 1.5.2. Нехай B_k – невироджена матриця розміром $n \times n$, g_1, g_2 – n-вимірні вектори, такі, що $-1 < \left(\frac{B_k^T g_1}{\| B_k^T g_1 \|}, \frac{B_k^T g_2}{\| B_k^T p_2 \|}\right) < 0$.

І нехай

$$B_{k+1} = B_k T_1^{-1}(\xi,\eta), \text{ де } \xi = \frac{B_k^T g_1}{\| B_k^T g_1 \|}, \eta = \frac{B_k^T g_2}{\| B_k^T g_2 \|}.$$

Тоді матриця B_{k+1} – невироджена та має такі властивості:

а) $\det(B_{k+1}) = \det(B_k)\sqrt{1-(\xi,\eta)^2}$, б) $(B_{k+1}^T g_1, B_{k+1}^T g_2) = 0$.

Лема 1.5.2 має точно таку ж інтерпретацію, як і лема 1.5.1. Одноранговий еліпсоїдальний оператор (1.5.3) дозволяє обґрунтовувати методи за тим же принципом, що й оператор (1.5.1), тобто використовуючи на ітерації методу зменшення в K_i об'єму еліпсоїда, який локалізує множину екстремумів. Однак для B-форми таких методів оператор (1.5.3) більш економний, так як його використання вимагає в два рази менше арифметичних операцій на кожній ітерації.

Покращити поверхні рівня яружних функцій можна за допомогою лінійного оператора з E^n в E^n, який запропоновано в роботі [70]. Цей оператор названо «доортогоналізуючий одноранговий оператор» (для перетворення простору досить однорангової корекції матриці B_k). Нехай задано набір векторів $P=\{p_1,p_2,...,p_m\}$, $p_i \in E^n, \| p_i \| = 1, i=1,\ldots,m, m \le n$, що задовольняє таким умовам:

$$(p_i,p_j)=0, i \ne j, i=1,2,\ldots,m-1,\ j=1,2,\ldots,m-1,$$

$$\| p_m - \sum_{i=1}^{m-1}(p_m,p_i)p_i \|^2 = 1-\sum_{i=1}^{m-1}(p_m,p_i)^2 > 0.$$

Доортогоналізуючий одноранговий оператор є таким:

$$T_\lambda(p_m,p)=I_n+\frac{p_m-p}{\| p_m-p \|^2}\left(\frac{1}{\lambda}p_m+p\right)^T,\quad p=\sum_{i=1}^{m-1}(p_m,p_i)p_i, \quad (1.5.5)$$

де λ – скаляр, такий, що $\lambda(\lambda+1)\ne 0$.

Його зміст є наступним. Набір m векторів в E^n, з яких перші $m-1$ векторів взаємно ортогональні, а останній не ортогональний попереднім, переводиться за допомогою оператора (1.5.5) в набір взаємно ортогональних векторів (фактично доортогоналізовується m-й вектор, чим зумовлена назва оператора). Оператор (1.5.5) забезпечує досить простий механізм роботи зі спеціальним конусом для локалізації множини екстремумів та дозволяє будувати конструктивні методи з наглядною геометричною інтерпретацією в перетвореному просторі змінних. При $\lambda=-1/2$ оператор (1.5.5) дозволяє обґрунтувувати методи по монотонному зменшенню об'єму еліпсоїда для апроксимації множини екстремумів.

Оператори $T_1(\xi,\eta)$ та $T_\lambda(p_m,p)$ дозволяють будувати прискорені по збіжності субградієнтні методи з перетворенням простору, орієнтовані на ефективну роботу з яружними функціями. Їх використання в рамках методу центрів тяжіння простих тіл (МЦТПТ) дає змогу будувати конструктивні алгоритми для задачі опуклого програмування. МЦТПТ запропонований в роботі [68] та базується на зовнішній апроксимації множини екстремумів простими опуклими тілами (еліпсоїд, паралелепіпед, симплекс) з достатнім зменшенням їх об'єму і регуляризацією цих тіл (перетворення еліпсоїда в кулю, паралелепіпеда – в куб, неправильного симплекса – в правильний) за допомогою лінійних перетворень простору. Для задач опуклого програмування МЦТПТ дозволяє обґрунтовувати алгоритми, збіжні зі швидкістю геометричної прогресії за послідовністю рекордів функції, яка мінімізується. Для МЦТПТ легко розв'язуються такі проблеми для методів опуклого програмування, як «відсів» несуттєвих відсікаючих гіперплощин; перевірка несумісності системи обмежень задачі опуклого програмування; проблема вибору крокового множника в напрямі руху для субградієнтних методів; простота розпаралелювання процесу на рівні змістовних підзадач; проблема «рестарта» для методів з лінійними перетвореннями простору та ін.

На основі операторів $T_1(\xi,\eta)$ та $T_\lambda(p_m,p)$ розроблено ряд субградієнтних методів, які призначені для знаходження ε-розв'язку за функцією в задачі

$$\min f(x), \tag{1.5.6}$$

де $f(x)$ – опукла функція векторного аргументу $x \in E^n$. Припускається, що множина екстремумів задачі (1.5.6) – X^* непуста, і відоме значення мінімуму $f(x)$: $f^* = f(x^*)$, $x^* \in X^*$. ε-розв'язком задачі (1.5.6) вважається точка x_k, для якої виконується $f(x_k) - f^* \le \varepsilon$.

Наведемо опис двох таких методів, які вимагають незначної кількості векторів для відсікаючих гіперплощин. Перший метод умовимось називати методом FEG2P1, а другий – методом FORTGN. Обидва методи базуються на використанні фейєрівського кроку в напрямі антисубградієнта в перетвореному просторі змінних. Такий крок відомий як крок Агмона-Моцкіна, або як крок Поляка (Б.Т. Поляк). Вхідними параметрами обох методів є стартова точка x_0 та параметр ε. Усі інші параметри методів визначаються автоматично на основі геометрії ліній рівня функції $f(x)$ в перетвореному просторі змінних та геометрії субдиференціала в точці мінімуму.

Для першого методу FEG2P1 перетворення простору реалізується на основі оператора $T_1(\xi,\eta)$, який використовує два послідовних субградієнти та вектор агрегатного типу (опукла комбінація обчислених на попередніх ітераціях субградієнтів). При цьому проблема поновлення агрегатного вектора розв'язується автоматично. Якщо кути між двома останніми субградієнтами та агрегатним вектором такі, що перетворення простору непотрібне, то агрегатний вектор установлюється нульовим. Формально це означає відсутність яружності поверхні рівня функції в перетвореному просторі змінних, тому перетворення простору на поточній ітерації непотрібно. Якщо в перетворенні простору не задіяно вектор агрегатного типу, то тоді перетворення простору використовує два послідовних субградієнти, кут між якими є тупим, та подібне до того, що в r-алгоритмах.

Метод FEG2P1(x_0,ε) реалізується таким алгоритмом.

Перед початком процесу маємо $x_0 \in E^n$, $\varepsilon > 0$. Якщо $f(x_0) - f^* \le \varepsilon$, то x_0 – ε-розв'язок і кінець роботи алгоритму. Інакше приймемо $h_0 = \dfrac{f(x_0)-f^*}{\|\partial f(x_0)\|}$, $\xi_0 = \dfrac{\partial f(x_0)}{\|\partial f(x_0)\|} \in E^n$, $p_0 = 0 \in E^n$, $B_0 = I_n$ – одинична матриця розміром $n \times n$.

Нехай на k-й ітерації одержано $x_k \in E^n$, h_k, $\xi_k \in E^n$, $p_k \in E^n$, B_k – матриця $n \times n$.

1. Обчислимо чергове наближення

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k .$$

2. Обчислимо $f(x_{k+1})$, $\partial f(x_{k+1})$. Якщо $f(x_{k+1}) - f^* \le \varepsilon$, то x_{k+1} – ε-розв'язок і кінець роботи алгоритму. В протилежному випадку приймемо

$$\xi_{k+1} = \frac{B_k^T \partial f(x_{k+1})}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}, \quad h_{k+1} = \frac{f(x_{k+1}) - f^*}{\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\|}.$$

3. Обчислимо

$$\lambda_1 = -\frac{(p_k,\xi_{k+1})}{\sqrt{(p_k,\xi_{k+1})^2 + (\xi_k,\xi_{k+1})^2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{(\xi_k,\xi_{k+1})}{\sqrt{(p_k,\xi_{k+1})^2 + (\xi_k,\xi_{k+1})^2}}$$

і приймемо

$$p_{k+1} = \begin{cases} \lambda_1 p_k + \lambda_2 \xi_k, & if\ \lambda_1 > 0\ and\ \lambda_2 > 0, \\ p_k, & if\ \lambda_1 > 0\ and\ \lambda_2 \le 0, \\ \xi_k, & if\ \lambda_1 \le 0\ and\ \lambda_2 > 0, \\ 0, & if\ \lambda_1 \le 0\ and\ \lambda_2 \le 0. \end{cases}$$

4. Якщо $(p_{k+1}, \xi_{k+1}) \ge 0$, або $(p_{k+1}, \xi_{k+1}) \le -1$, то приймемо $B_{k+1} = B_k$ і перейдемо до п. 5. Інакше обчислимо

$$\eta = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}} - 1 \right) \xi_{k+1} - \frac{(p_{k+1}, \xi_{k+1})}{\sqrt{1-(p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}} p_{k+1},$$

$$B_{k+1} = B_k \left(I + \eta \xi_{k+1}^T \right), \quad h_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{\sqrt{1-(p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}},$$

$$p_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{1-(p_{k+1}, \xi_{k+1})^2}} \left(p_{k+1} - (p_{k+1}, \xi_{k+1}) \xi_{k+1} \right).$$

5. Переходимо до наступної ітерації з x_{k+1}, B_{k+1}, ξ_{k+1}, h_{k+1}, p_{k+1}.

Як і для методу FEG2P1, повна визначеність в параметрах ітераційного процесу має місце і для методу FORTGN. Для нього перетворення простору змінних реалізується за допомогою оператора $T_{-1/2}(p_m, p)$, який використовує інформацію про субградієнти на попередніх ітераціях. При цьому проблема відсіву субградієнтів із попередніх ітерацій вирішується на основі того, чи потрібен цей вектор для локалізації множини мінімумів еліпсоїдом, чи непотрібен.

Метод FORTGN(x_0, ε) реалізується таким алгоритмом.

Перед початком процесу маємо $x_0 \in E^n$, $\varepsilon > 0$. Якщо $f(x_0) - f^* \le \varepsilon$, то x_0 – ε-розв'язок і кінець роботи алгоритму. Інакше приймаємо $B_0 = I_n$, $P_0 = \varnothing$. Тут P_k – множина субградієнтів на k-й ітерації методу.

Нехай на k-й ітерації одержано x_k, B_k, P_k. Обчислимо $f(x_k)$ і $\partial f(x_k)$. Якщо $f(x_k) - f^* \le \varepsilon$, то x_k – ε-розв'язок і кінець роботи методу. Інакше переходимо до $(k+1)$-ї ітерації.

1. Приймемо

$$\xi_k = \frac{B_k^T \partial f(x_k)}{\| B_k^T \partial f(x_k) \|}, \quad h_k = \frac{f(x_k) - f^*}{\| B_k^T \partial f(x_k) \|}.$$

2. Сформуємо множину

$$\tilde{P}_k = \{ p_i \in P_k : (p_i, \xi_k) < 0 \}.$$

3. Якщо $\tilde{P}_k = \varnothing$, то приймемо

$$B_{k+1} = B_k, \quad \xi_{k+1} = \xi_k, \quad h_{k+1} = h_k$$

і перейдемо до п. 4. Інакше обчислюємо вектори

$$\tilde{p}_k = \sum_{p_i \in \tilde{P}_k} (p_i, \xi_k) p_i, \; \eta_1 = \frac{\xi_k - \tilde{p}_k}{\| \xi_k - \tilde{p}_k \|^2}, \; \eta_2 = 2\xi_k - \tilde{p}_k;$$

і перераховуємо параметри

$$B_{k+1} = B_k (I - \eta_1 \eta_2^T), \; \xi_{k+1} = \frac{\xi_k - \tilde{p}_k}{\| \xi_k - \tilde{p}_k) \|}, \; h_{k+1} = \frac{h_k}{\| \xi_k - \tilde{p}_k) \|}.$$

4. Обчислимо чергове наближення

$$x_{k+1} = x_k - h_{k+1} B_{k+1} \xi_{k+1}.$$

5. Сформуємо чергову множину

$$P_{k+1} = \left\{ p_i \in \tilde{P}_k : | (p_i, \xi_{k+1}) | < \varepsilon_0 \right\} \bigcup \xi_{k+1},$$

де ε_0 – досить малий параметр, щоб уникнути помилок в процесі доортогоналізації векторів (рекомендується $\varepsilon_0 = 10^{-6}$).

6. Переходимо до наступної ітерації з x_{k+1}, B_{k+1}, P_{k+1}.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1.5.1. Послідовність $\{x_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$, що генерується методом FEG2P1(x_0, ε) або методом FORTGN(x_0, ε), задовольняє нерівності

$$\| A_{k+1}(x_{k+1} - x^*) \|^2 \le \| A_k (x_k - x^*) \|^2 - \frac{(f(x_k) - f^*)^2}{\| B_k^T \partial f(x_k) \|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тут $A_k = B_k^{-1}, A_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$.

Теорема 1.5.2. Нехай на кожній ітерації методу FEG2P1(x_0, ε) (методу FORTGN(x_0, ε)) виконані умови $\| B_k \| \le c_1$, $\| \partial f(x_k) \| \le c_2$. Тоді метод FEG2P1($x_0, \varepsilon$) (метод FORTGN($x_0, \varepsilon$)) знаходить ε-розв'язок задачі (1.5.6) не більше, ніж за K ітерацій, де $K = \left] \left(\frac{c_1 c_2 \| x_0 - x^* \|}{\varepsilon} \right)^2 \right[+ 1$. Тут $]a[$ – ціла частина дійсного числа a.

Теорема 1.5.2 гарантує збіжність обох методів до ε-розв'язку задачі (1.5.6) із довільної стартової точки. Прискорену швидкість збіжності забезпечують оператори перетворення простору, направлені на вирівнювання поверхонь яружних функцій. Це показують експерименти [69], [70], які демонструють стійкість методів по відношенню до знаходження ε-розв'язків задачі (1.5.6) з високою точністю як у випадку гладких яружних функцій, так і у випадку негладких яружних функцій. Цьому є просте пояснення. Так, наприклад, для негладкої функції двох змінних $f(x_1, x_2) = | x_1 | + t | x_2 |$ обидва методи знаходять точку мінімуму не більше ніж за дві ітерації, і це не залежить від значення t. Відмітимо, що швидкість збіжності субградієнтних методів без перетворення простору змінних визначається геометричною прогресією із знаменником $\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$, який є близьким до 1 навіть при порівняно невеликих значеннях t.

У роботі [98] метод FEG2P1 адаптовано для знаходження допустимої точки нерівності $F(x) \le 0$, де $F(x)$ – опукла негладка функція векторного аргументу $x \in E^n$. До такої задачі може бути зведена проблема пошуку точки довільної системи опуклих нерівностей. Задача знаходження допустимої точки нерівності $F(x) \le 0$ еквівалентна задачі (1.5.6), де $f(x) = \max\{F(x), 0\}$ – опукла негладка функція, мінімальне значення якої f^* дорівнює нулю. Метод для нерівності $F(x) \le 0$ або знаходить допустиму точку, або дозволяє стверджувати про відсутність допустимої точки у шарі $S(x_0, r)$. Для цього як критерій зупинки використана теорема 1.5.1, із якої для кожної ітерації $K > 1$ методу FEG2P1 маємо нерівність

$$\| B_K^{-1}(x_K - x^*) \|^2 \leq \| x_0 - x^* \|^2 - \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{f(x_k) - f^*}{\| B_k \partial f(x_k) \|} \right)^2 .$$

Із останньої, використовуючи розбіжність ряду, легко прийти до протиріччя, що $\| B_{\bar{K}}^{-1}(x_{\bar{K}} - x^*) \|^2 < 0$ для деякої ітерації $\bar{K}$. Враховуючи, що $\det(B_K)$ збігається до нуля, розбіжність ряду забезпечує досить швидке вияснення несумісності нерівності $F(x) \leq 0$.

Дослідження субградієнтних методів з перетворенням простору, орієнтованих на розв'язування яружних задач, продовжувались в рамках спільного українсько-російського проекту Ф28.1/005 «Субградієнтні методи прискореної збіжності в задачах опуклої оптимізації» (2009 – 2010), який виконувався Інститутом кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та Інститутом автоматики та процесів управління Далекосхідного відділення РАН (http://elis.dvo.ru/). У роботі http://elis.dvo.ru/?q=node/27 методи для задачі (1.5.6) розширені на випадок, коли субградієнт $\partial f(x)$ задовольняє властивості

$$(x - x^*, \partial f(x)) \geq m(f(x) - f^*), \text{ де } m \geq 1 \qquad (1.5.7)$$

для $\forall x \in E^n$ и для $\forall x^* \in X^*$. Довільна опукла функція задовольняє (1.5.7) з параметром $m = 1$, але є класи опуклих функцій, для яких параметр m більше одиниці. Так, наприклад, квадратична опукла функція задовольняє (1.5.7) з параметром $m = 2$. Для таких функцій швидкість збіжності фейєрівських методів з перетворенням простору залежить від значення m.

1.5.2 Використання субградієнтних методів з перетворенням простору в складних задачах оптимізації. Головним здобутком підрозділу є математичні моделі, алгоритми та програмне забезпечення для знаходження пропускних здатностей дуг надійної орієнтованої мережі. Центральним тут є використання ефективних методів негладкої оптимізації у сполученні зі схемами декомпозиції. Розроблені методи недиференційованої оптимізації використовуються для розв'язання задач оптимального проектування структур надійних мереж. Запропоновані нові математичні моделі, алгоритми та програмне забезпечення для задач знаходження пропускних здатностей дуг надійної орієнтованої мережі з передачею потоків довільними шляхами та з передачею потоків по заданій множині допустимих шляхів. В обох випадках необхідно забезпечити повноцінне функціонування мережі при відмовах окремих компонент мереж (ребер, вузлів).

Пошкодженням мережі будемо називати такий її стан, при якому зменшується пропускна здатність однієї або кількох її дуг. За допомогою поняття «пошкодження мережі» можна описати різноманітні аварійні ситуації, які відбуваються у функціонуючих мережах будь-якого типу: автодорожних, залізничних, комунікаційних тощо.

При формулюванні математичної моделі задачі знаходження пропускної спроможності дуг надійної орієнтованої мережі з передачею потоків довільними шляхами будемо використовувати такі вхідні дані:

(i) орієнтована мережа $N(V,A)$, задана множиною вершин V та множиною дуг A. Для дуги $(i,j)\in A$ позначимо c_{ij} вартість створення одиниці пропускної здатності, а y_{ij}^0 – наявний ресурс пропускної здатності;

(ii) задано множину вимог $\min\{d_k y_k \,/\, D_k y_k = b_k - A_k x,\ y_k \geq 0\}$ щодо обсягів потоків між парами вершин з деякої підмножини $V_0 \subset V$. Кожен елемент множини D задається трьома числовими значеннями: парою (r,s) та відповідним значенням обсягу потоку d_{rs}, що слід пропустити через мережу від вершини $r\in V_0$ (джерело) до вершини $s\in V_0$ (стік). Для всіх пар (r,s) відповідні значення обсягів x^s задані в тих же одиницях, що і значення пропускної спроможності дуг;

(iii) задано множину T можливих пошкоджень мережі $N(V,A)$. Пошкодження $t\in T$ мережі характеризується набором коефіцієнтів $0\leq \mu_{ijt}\leq 1$ для всіх $(i,j)\in A$, де конкретний коефіцієнт μ_{ijt} вказує на те, що пропускна здатність дуги (i, j) у мережі при пошкодженні t зменшиться в $1/\mu_{ijt}$ раз. Для зручності опису математичних моделей індекс $t = 0$ будемо умовно вважати «нульовим» пошкодженням мережі $N(V, A)$, якому відповідає набір коефіцієнтів $\mu_{ij0} = 1$ для всіх $(i, j) \in A$. Фактично це означає, що «нульове» пошкодження мережі рівносильне функціонуванню мережі $N(V, A)$ в режимі, коли пошкоджень немає.

Зробимо таке припущення щодо вхідних даних за пунктами (i) – (iii).

Припущення 1. Для орієнтованої мережі $N(V, A)$ всі вимоги D щодо передачі обсягів потоків між парами вершин можна задовольнити при необмежених значеннях пропускних здатностей дуг цієї мережі $N(V, A)$.

Нехай x – множина невідомих значень пропускної здатності дуг $(i, j) \in A$, які потрібно додати до вже існуючих значень пропускної здатності дуг $Y^0 = \{y_{ij}{}^0, (i, j) \in A\}$ мережі, а x_{ijt}^{rs} – невідоме значення тієї частини обсягу потоку d_{rs}, $(r, s) \in D$, який при t-му пошкодженні мережі буде пропущений по дузі $(i, j) \in A$. Тоді математичну модель задачі знаходження «оптимальних за сумарною вартістю» значень Y для надійної орієнтованої мережі $N(V, A)$ можна сформулювати як наступну задачу математичного програмування: потрібно мінімізувати лінійну функцію

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij}$$

за обмежень

$$\sum_{(r,s)\in D} x_{ijt}^{rs} \le \mu_{ijt}(y_{ij}^0 + y_{ij}), \quad t \in (0 \bigcup T), (i, j) \in A,$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ijt}^{rs} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{jit}^{rs} = \begin{cases} d_{rs}, & i = r, \\ 0, & i \ne r, s, \\ -d_{rs}, & i = s, \quad t \in (0 \bigcup T), (r, s) \in D, \end{cases}$$

$$x_{ijt}^{rs} \ge 0, \quad t \in (0 \bigcup T), (i, j) \in A, (r, s) \in D,$$

$$y_{ij} \ge 0, \quad (i, j) \in A.$$

Цільова функція задачі визначає сумарні витрати з урахуванням вартості збільшення пропускної здатності дуг, які потрібно додати до існуючих з метою забезпечення надійності мережі $N(V, A)$. Обмеження задачі означають: а) обов'язкове виконання вимог D по передачі обсягів потоку в мережі $N(V, A)$ і повинні бути виконані як при відсутності пошкоджень мережі ($t = 0$), так і в кожному з випадків, коли відбудеться тільки одне (але будь-яке з множини T) пошкодження мережі, б) сумарний потік через дугу $(i, j) \in A$ не повинен перевищувати пропускної здатності цієї дуги з врахуванням можливих пошкоджень мережі. Пропускна здатність дуги $(i, j) \in A$ складається з уже наявної (y_{ij}^0) та тієї невідомої (y_{ij}) пропускної здатності, яка додається, в) невід'ємність змінних x_{ijt}^{rs} та y_{ij}.

Якщо необхідно обмежитися передачею потоків по заданій множині допустимих шляхів, до умов (i) – (iii) додається така інформація:

(iv) задано множину допустимих шляхів у мережі $P = \bigcup_{(r,s)\in D} P(r,s),$ де $P(r,s)$ – підмножина шляхів у мережі $N(V, A)$, які з'єднують джерело r зі стоками s, $(r,s) \in D$, по яких (і тільки по них) можна пересилати потік із вершини r до вершини s. Будемо припускати, що такі набори шляхів задані для всіх пар $(r,s) \in D.$ Конкретний шлях $P_k(r,s) \in P(r,s),$ тобто шлях з номером k для передачі обсягу потоку з вершини r до вершини $s,$ будемо задавати вектором a_k^{rs} довжини $|A|,$ який складається з нулів і одиниць, де тим дугам мережі $N(V, A),$ через які проходить цей шлях, відповідають одиниці, а тим дугам, що не входять у цей шлях, відповідають нулі.

Припущення 2. Множина P містить непорожні підмножини $P(r,s)$ для всіх пар $(r,s) \in D.$

Нову задачу знаходження для орієнтованої мережі $N(V, A)$ мінімальних за сумарною вартістю значень пропускних здатностей дуг $Y=\{y_{ij},(i,j)\in A\}$, які потрібно додати до вже існуючих (Y_0), щоб мережа $N(V,A)$ стала надійною, можна сформулювати таким чином: мінімізувати лінійну функцію

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij}$$

за обмежень

$$\sum_{(r,s)\in D} \sum_{k\in P(r,s)} a_k^{rs} x_{kt}^{rs} \le \mu_{ijt}(y_{ij}^0 + y_{ij}), \quad t\in(0\bigcup T),(i,j)\in A,$$

$$\sum_{k\in P(r,s)} x_{kt}^{rs} = d_{rs}, \quad t\in(0\bigcup T),(r,s)\in D,$$

$$x_{kt}^{rs} \ge 0, \quad t\in(0\bigcup T),(r,s)\in D, k\in P(r,s),$$

$$y_{ij} \ge 0, \quad (i,j)\in A,$$

де x_{kt}^{rs} – невідоме значення частини обсягу потоку d_{rs}, який буде пропущений шляхом $k\in P(r,s)$ при t-му пошкодженні мережі. Система обмежень має зміст, аналогічний тому, що й система обмежень у попередній моделі. Відмінність полягає в тому, що в мережі $N(V,A)$ вимоги D слід виконувати дещо іншим способом, при якому обсяг потоку з джерела r у стік s може бути пересланий тільки тими шляхами з r в s, які задані множиною $P(r,s)$.

Для задач знаходження мінімальних за сумарною вартістю пропускних здатностей дуг для побудови надійної орієнтованої мережі реалізовані такі програми: програма ModelA для першої оптимізаційної моделі та програма ModelC для другої моделі (мова програмування ФОРТРАН). Алгоритми розв'язування обох задач базуються на подвійному використанні двох схем декомпозиції (одна в одній):

– схема декомпозиції за змінними, якими є невідомі значення пропускних здатностей дуг орієнтованої мережі;

– схема декомпозиції за обмеженнями (для розв'язання підзадач, які виникають для кожного пошкодження при фіксованих значеннях пропускних здатностей дуг).

В результаті роботи програм ModelA та ModelC отримуємо такі параметри надійної орієнтованої мережі $N(V,A)$:

– мінімальні за сумарною вартістю пропускні здатності дуг мережі $N(V, A)$, що доповнюють вже існуючі, тобто для кожної дуги $(i, j) \in A$ знаходиться y_{ij}^{*} – ресурс пропускної здатності дуги (i, j), що доповнює вже існуюче значення пропускної здатності цієї дуги y_{ij}^{0};

– достатня умова того, що неможливо виконати всі вимоги на передачу обсягів потоків, щоб орієнтована мережа була надійною. Це може бути з двох причин: а) структура мережі $N(V, A)$ така, що задовольнити вимоги до потоків неможливо; б) структура пошкоджень у мережі $N(V, A)$ така, що задовольнити вимоги до потоків неможливо.

У роботі [170] r-алгоритми застосовувалися для апроксимації лінійних і нелінійних функцій, коли результати вимірів задані короткою вибіркою з порівняно невеликим числом помилкових вимірів. На прикладі лінійної багатовимірної моделі і на одновимірних моделях, до яких призводить метод генеральної узагальненої змінної, показано, що використання методу найменших модулів має переваги.

У роботі [260] розроблено алгоритм розв’язання задачі проекції на політоп, що базується на розв’язанні еквівалентної негладкої екстремальної задачі, для якої встановлюється величина штрафного параметра.

Методи негладкої оптимізації застосовано в задачах планування структурно-технологічних змін, для яких розроблено сімейство оптимізаційних міжгалузевих моделей зі змінними коефіцієнтами прямих витрат [85], [248]. Ці задачі є багатоекстремальними і нелінійними. Цільовими функціями, що потрібно максимізувати, виступають сукупний дохід споживачів і мультиплікатор «приріст доходів – приріст споживачів». Обидві цільові функції – неопуклі і визначені з використанням операції звертання матриці, що залежить від невідомих коефіцієнтів прямих витрат. Обмеження моделей відображають умови неінфляційного зростання доходів і обмеженість ресурсів, які використовуються при проведенні структурно-технологічних перетворень, а також умови невід’ємності нових значень коефіцієнтів. Оптимізаційні моделі та алгоритми розрахунків покладені в основу модельно-орієнтованої системи підтримки прийняття рішень, реалізованої в середовищі DELPHI [248]. Система має розвинутий інтерфейс користувача; передбачені можливості поповнення бази математичних моделей і оптимізаційних алгоритмів, організації діалогу з користувачем у ході рішення задач і формування звітів у html-форматі. Сервісні можливості системи дозволяють аналізувати результати розрахунків, перевіряти допустимість змінених розв’язків і реалізовувати ряд прогнозно-аналітичних функцій.

1.5.3 Лагранжеві оцінки в багатоекстремальних квадратичних задачах. Багато задач поліноміальної та дискретної оптимізації зводяться до багатоекстремальних задач нелінійного програмування квадратичного типу. Для розв’язання цих задач можна використовувати лагранжеві оцінки в комбінації з методом гілок та границь. Лагранжеві оцінки можна покращувати, додаючи в модель так звані функціонально надлишкові квадратичні обмеження. Задачі знаходження лагранжевих оцінок можуть успішно розв’язуватися сучасними субградієнтними методами з перетворенням простору. У даному підрозділі описано цей підхід і наведено приклади його використання для задач поліноміального типу та ряду екстремальних задач на графах.

Розглянемо оптимізаційну задачу квадратичного типу: знайти

$$q^* = \inf_{x \in E^n} Q_0(x) \qquad (1.5.8)$$

при обмеженнях

$$Q_i(x) = 0, \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}. \qquad (1.5.9)$$

Тут $Q_\nu(x)$ – квадратичні функції

$$Q_\nu(x) = (K_\nu x, x) + (b_\nu, x) + c_\nu,$$

де K_ν – симетричні матриці розміру $n \times n$, $b_\nu \in E^n$, c_ν – скаляри, $\nu \in \{0 \bigcup I\}$.

У загальному випадку задача (1.5.8), (1.5.9) є багатоекстремальною й відноситься до класу NP-складних задач. Оцінки знизу для q^* можна одержати шляхом такої лагранжевої релаксації. Нехай $u=(u_1,\ldots,u_m)\in E^m$ – вектор множників Лагранжа задачі (1.5.8), (1.5.9). Розглянемо функцію Лагранжа

$$L(x,u)=Q_0(x)+\sum_{i=1}^{m}u_iQ_i(x)$$

і функцію

$$\psi(u)=\inf_{x\in E^n}L(x,u)=\inf_{x\in E^n}\,[(K(u)x,x)+(b(u),x)+c(u)],$$

де

$$K(u)=K_0+\sum_{i=1}^{m}u_iK_i,\quad b(u)=b_0+\sum_{i=1}^{m}u_ib_i,\quad c(u)=c_0+\sum_{i=1}^{m}u_ic_i.$$

Нехай $\Omega^+=\{u:\lambda_n[K(u)]>0\}$ – підмножина u, для яких матриця $K(u)$ додатньо визначена; Ω^0 – підмножина u, для яких $\lambda_n[K(u)]=0$ ($\lambda_n(K)$ – мінімальне власне число симетричної матриці K розміру $n\times n$). Ефективна множина $dom\,\psi$ функції $\psi(u)$ складається з Ω^+ та підмножини точок $u\in\Omega^0$, для яких має розв'язок система рівнянь $2K(u)x+b(u)=0.$ Для інших точок $\psi(u)=-\infty$. Якщо $dom\,\psi\neq\varnothing$, то існує нетривіальна оцінка знизу

$$\psi^*=\sup_{u\in dom\,\psi}\psi(u) \tag{1.5.10}$$

для величини q^* (умова $\psi^*=+\infty$ означає, що система (1.5.9) несумісна).

Задача (1.5.10) є задачею максимізації увігнутої функції, визначеної на параметричному сімействі невід'ємно визначених матриць $K(u)$, та може бути розв'язана за допомогою методів мінімізації опуклих недиференційованих функцій. Тому оцінку ψ^* з будь-якою заданою точністю можна знайти за поліноміальний час методом еліпсоїдів або r-алгоритмами. Метод на основі $r(\alpha)$-алгоритму з адаптивним регулюванням кроку розроблено у роботі [71] та реалізовано у фортранівській програмі *DSQTPR*. Одна ітерація у програмі *DSQTPR* потребує $O(m^2)+O(n^3)$ арифметичних операцій. З них $O(m^2)$ арифметичних операцій необхідно для реалізації однієї ітерації $r(\alpha)$-алгоритму, а $O(n^3)$

арифметичних операцій – для обчислення вектора суперградієнтного поля при фіксованому значенні множників Лагранжа (розв'язання системи лінійних рівностей з симетричною матрицею розміром $n \times n$, знаходження мінімального власного числа симетричної матриці розміром $n \times n$ та власного вектора, що відповідає цьому числу). Програма *DSQTPR* орієнтована на розріджений формат представлення інформації про квадратичну задачу (тобто зберігаються тільки ненульові коефіцієнти матриць K_i, векторів b_i и скалярів c_i для всіх $i = 0, \ldots, m$). Програму *DSQTPR* можна використовувати при роботі з квадратичними задачами, в яких число змінних n – порядку кількох сотень, а число обмежень m – порядку кількох тисяч.

У випадку, коли усі квадратичні функції у задачі (1.5.8) – (1.5.9) є однорідними (тобто не включають лінійних членів), обчислення оцінок виду ψ^* значно спрощується. В ряді випадків це зводиться до безумовних задач мінімізації негладких опуклих функцій. У роботі [240] розроблено рекомендації щодо зведення квадратичних задач загального виду до однорідних квадратичних задач та встановлення точних штрафних коефіцієнтів для негладкої функції штрафу, яка замінює умову на невід'ємну визначеність сімейства параметричних матриць.

Властивості оцінки ψ^* є такими. Якщо ψ^* досягається на $u^* \in \Omega^+$, то $\psi^* = q^*$ (тобто оцінка є точною). Інакше ψ^* досягається на границі області Ω^+, при цьому може існувати так званий «розрив двоїстості»

$$\Delta^* = q^* - \psi^* > 0.$$

Один із способів зменшення Δ^* пов'язаний з уведенням функціонально надлишкових обмежень (при цьому може збільшитися і кількість змінних). Функціонально надлишковими обмеженнями є обмеження, додавання яких залишає множину допустимих розв'язків початкової задачі незмінною. Однак при цьому змінюється функція Лагранжа, що в деяких випадках дозволяє зменшити Δ^*. Якщо додати до задачі (1.5.8), (1.5.9) квадратичні функціонально надлишкові обмеження

$$Q_{m+1}(x) = 0, \ldots, Q_{m+r}(x) = 0, r \geq 1,$$

то нова задача матиме вигляд: знайти

$$q^* = \inf_{x \in E^n} Q_0(x)$$

при обмеженнях

$$Q_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m, m+1, \ldots, m+r.$$

Їй відповідає довший вектор множників Лагранжа

$$U = \left\{ \{u\}, u_{m+1}, \ldots, u_{m+r} \right\},$$

а функція Лагранжа для неї буде мати такий вигляд:

$$L_1(x,U) = Q_0(x) + \sum_{i=1}^{m+r} u_i Q_i(x) = L(x,u) + \sum_{i=m+1}^{m+r} u_i Q_i(x).$$

Оскільки $L(x,u) = L_1(x,(\{u\},0,\ldots,0)),\ \psi_1(\{u\},0,\ldots,0) = \psi(u)$, то

$$\psi_1^* = \sup_{U \in dom\,\psi_1} \psi_1(U) \geq \sup_{u \in dom\,\psi} \psi(u) = \psi^*,$$

тобто функціонально надлишкові обмеження можуть покращити лагранжеві оцінки. Додавання функціонально надлишкових обмежень, що є нетривіальними наслідками умов задачі, у ряді випадків приводить до того, що нижня оцінка ψ_1^* навіть може стати точною для q^*. Це дало можливість встановити ряд нових результатів для задач поліноміальної оптимізації та ряду екстремальних задач на графах.

У роботах [71], [99] функціонально надлишкові обмеження використано при знаходженні глобального мінімуму поліноміальної функції $P(x)$ від однієї або декількох змінних. Ця задача спеціальним образом зводиться до квадратичних багатоекстремальних задач (на мінімум) з заданим набором функціонально надлишкових квадратичних обмежень. Лагранжева двоїста оцінка для таких квадратичних задач збігається зі значенням p^* (значення полінома $P(x)$ в точці глобального мінімуму) тоді й тільки тоді, коли поліном $\overline{P}(x) = P(x) - p^*$ може бути представлений як сума квадратів інших поліномів. Ці результати мають відношення до класичних робіт Д. Гільберта з розкладу невід'ємних поліноміальних форм у суму квадратів. Розроблений метод дає можливість не тільки довести існування такої декомпозиції (якщо вона існує), але і знайти одне з можливих представлень полінома $\overline{P}(x)$ у вигляді суми квадратів інших поліномів. При цьому одержуємо також значення глобального мінімуму полінома $P(x)$.

Лагранжеві оцінки та їх покращення за допомогою функціонально надлишкових обмежень знайшли застосування для ряду екстремальних задач на графах, які можна описати за допомогою квадратичних моделей. Умова булевості змінної $x \in \{0,1\}$ представляється квадратичною рівністю $x^2 - x = 0$. А умова бінарності $x \in \{-1,1\}$ – квадратичною рівністю $x^2 - 1 = 0$. У роботі [134] наведено результати по точності лагранжевих оцінок для багатьох класів NP-складних комбінаторних булевих задач. Це такі екстремальні задачі на графах, як задача знаходження максимальної зваженої незалежної множини вершин графа, задача знаходження максимального розрізу графа, оптимальна бісекція графа, мінімальне розбиття графа на k частин з фіксованим числом вершин у кожній частині. Для екстремальних задач на графах (максимальна стійка множина вершин графа, максимальний розріз графа тощо) досліджені різні сімейства функціонально надлишкових квадратичних обмежень, що враховують специфічні особливості кожної конкретної задачі для того або іншого сімейства графів.

Наведемо лагранжеві оцінки для задачі про зважену максимальну незалежну множину вершин графа. Нехай $G = (V, E)$ – зважений неорієнтований граф з множиною вершин V і множиною ребер E, вага кожної вершини $i \in V$ задається додатнім числом w_i. Підмножина вершин $S \subseteq V$ називається стійкою (або незалежною) множиною графа G, якщо для будь-яких $i, j \in S$ ребро (i, j) не належить E. Зважене число стійкості графа G визначається як $\alpha(G, w) = \max \sum_{i \in S} w_i$, де $S \subseteq V$ – стійка множина. Множина S^*, на якій досягається $\alpha(G, w)$, називається максимальною зваженою стійкою (або незалежною) множиною. Задача знаходження $\alpha(G, w)$ є NP-складною навіть в окремому випадку, коли усі ваги ребер дорівнюють одиниці.

Обчислення верхніх оцінок, що досить добре апроксимують зверху $\alpha(G,w)$, має як практичний, так і теоретичний інтерес. Запропоновано три верхніх оцінки для $\alpha(G,w)$.

Першу оцінку умовимося позначати $\psi_1^*(G,w)$. Вона пов'язана з формулюванням задачі про максимальну зважену стійку множину графа у вигляді такої квадратичної булевої задачі: знайти

$$\alpha(G,w) = \max \sum_{i \in V} w_i x_i \tag{1.5.11}$$

при обмеженнях

$$x_i x_j = 0 \quad \forall (i,j) \in E, \tag{1.5.12}$$

$$x_i^2 - x_i = 0 \quad \forall i \in V. \tag{1.5.13}$$

Тут булева змінна $x_i \in \{0,1\}$ дорівнює одиниці, якщо вершина $i \in V$ включається в стійку множину, і нулеві – у протилежному випадку. Булеві змінні для усіх вершин описані квадратичними обмеженнями-рівностями (1.5.13). Квадратичні обмеження (1.5.12) означають, що якщо дві вершини зв'язані ребром у графі G, то вони обидві не можуть одночасно належати стійкій множині.

Друга оцінка (умовимося позначати її $\psi_2^*(G,w)$) відповідає квадратичній задачі, у якій до обмежень (1.5.12) – (1.5.13) додано таке сімейство функціонально надлишкових обмежень

$$x_i x_j \geq 0 \quad \forall (i,j) \notin E. \tag{1.5.14}$$

Вони є наслідками нерівностей $x_i = x_i^2 \geq 0$ для усіх $i \in V$.

Найбільш цікавою виявилася третя оцінка Шора (умовимося позначати її $\psi_3^*(G,w)$). Вона пов'язана з квадратичною задачею, у якій до обмежень (1.12) – (1.14) додано таке сімейство функціонально надлишкових обмежень

$$x_i x_k + x_j x_k \leq x_k, \forall (i,j) \in E, k \neq i,j. \tag{1.5.15}$$

Наявність обмежень (1.15) додає оцінці $\psi_3^*(G,w)$ ряд чудових властивостей, що пов'язані зі спеціальними сімействами графів.

При дослідженні квадратичних моделей екстремальних задач на графах важливу роль відіграли три загальні схеми побудови сімейств функціонально надлишкових обмежень, що є наслідками булевості або бінарності змінних. Перша схема запропонована для бінарних змінних у роботі [171] та включає такі сімейства квадратичних рівностей: для довільної двійки змінних вводяться додаткові змінні $x_{ij} = x_i x_j$, $x_{ij}^2 = 1$; для довільної двійки змінних має місце $x_{ij} x_i - x_j = 0$, $x_{ij} x_j - x_i = 0$; для всіх можливих трійок змінних – $x_{ij} x_k - x_{ik} x_j = 0$, $x_{ij} x_k - x_{jk} x_i = 0$, $x_{ij} x_{jk} - x_{ij} = 0$, $x_{ij} x_{jk} - x_{ik} = 0$, $x_{ij} x_{ik} - x_{jk} = 0$; для всіх можливих четвірок змінних $x_{ij} x_{kl} - x_{ik} x_{jl} = 0$, $x_{ij} x_{kl} - x_{il} x_{jk} = 0$.

Друга схема для булевих змінних запропонована у роботі [199] та включає такі сімейства функціонально надлишкових обмежень у формі квадратичних рівностей: для довільної двійки змінних вводяться додаткові змінні $x_{ij} = x_i x_j$, $x_{ij}^2 = x_{ij}$; для довільної двійки змінних має місце $x_{ij} x_i - x_{ij} = 0$, $x_{ij} x_j - x_{ij} = 0$; для всіх можливих трійок змінних – $x_{ij} x_k - x_{ik} x_j = 0$, $x_{ij} x_k - x_{jk} x_i = 0$, $x_{ij} x_{jk} - x_{ij} x_k = 0$, $x_{ij} x_{jk} - x_{ik} x_j = 0$, $x_{ij} x_{ik} - x_{jk} x_i = 0$; для всіх можливих четвірок змінних $x_{ij} x_{kl} - x_{ik} x_{jl} = 0$, $x_{ij} x_{kl} - x_{il} x_{jk} = 0$.

Третя схема запропонована у роботі [197] та генерує функціонально надлишкові обмеження у формі квадратичних нерівностей, які можна використовувати як у бінарних, так і в булевих квадратичних задачах. В її основу покладено просту ідею «непарного» числа бінарних змінних: для довільної непарної кількості бінарних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$ завжди справедлива нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{2k+1} l_i x_i \right)^2 = (l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_{2k+1} x_{2k+1})^2 \geq 1,$$

де $l_1, l_2, \ldots, l_{2k+1}$ – довільна послідовність бінарних чисел ± 1.

Для фіксованого k максимально можлива кількість таких послідовностей дорівнює $2^{2k+1} = 2 \times 4^k$. Однак послідовність $l_1, l_2, \ldots, l_{2k+1}$ і послідовність $-l_1, -l_2, \ldots, -l_{2k+1}$ (отримана з першої множенням на -1) дають одну й ту ж саму нерівність. Отже, для фіксованого k повне сімейство таких функціонально надлишкових обмежень буде включати 4^k квадратичних нерівностей.

Завдяки цим трьом схемам для задачі знаходження максимальної зваженої незалежної множини вершин графа та задачі знаходження максимального розрізу графа вдалося значно покращити існуючі верхні оцінки, а для деяких класів графів отримати точні двоїсті оцінки.

На основі першої схеми у роботі [198] для задачі знаходження максимальної незалежної множини вершин графа отримано дві нові верхні лагранжеві двоїсті оцінки $\psi_b^*(G)$ і $\psi_c^*(G)$. Доведено, що обидві оцінки є не менш точними для зваженого числа стійкості довільного графа, ніж запропонована Н.З. Шором найбільш точна верхня оцінка $\psi_3^*(G)$. Показано, що для графа у формі ікосаедра та комплементарного до нього графа вони є більш точними, ніж відомі оцінки Шора та оцінки, отримані за допомогою альтернативної техніки Copositive Programming. Так, наприклад, оцінка $\psi_b^*(G)$ поліпшує оцінку $\psi_3^*(G)$, як для графа у формі ікосаедра I_{12} (12 вершин і 30 ребер), так і для комплементарного до ікосаедра графа $\overline{I}_{12}$ (12 вершин і 36 ребер). Для обох графів ця оцінка виявляється однаковою $\psi_b^*(I_{12}) = \psi_b^*(\overline{I}_{12}) = 3.185116$. Вона є більш точною, ніж оцінка $\psi_3^*(I_{12}) = \psi_3^*(\overline{I}_{12}) = 1 + \sqrt{5} \approx 3,236068$. Оцінка $\psi_c^*(G)$ є точною для обох графів, тобто $\psi_c^*(I_{12}) = \alpha(I_{12}) = 3$, $\psi_c^*(\overline{I}_{12}) = \alpha(\overline{I}_{12}) = 3$.

На основі першої та третьої схем у роботі [197] отримано нові верхні лагранжеві двоїсті оцінки для задачі про максимальний зважений розріз неорієнтованого графа. Їм відповідають нові моделі квадратичного типу, які отримані удосконаленням запропонованої Н.З. Шором моделі квадратичного типу. Встановлено, що із запропонованих моделей випливає відома верхня оцінка Майджуба та Барахони, що базується на моделі лінійного програмування. Показано, що модель на основі третьої схеми дає «рецепт» для побудови моделей лінійного програмування, за допомогою яких можна одержати більш точні верхні оцінки, ніж оцінка Майджуба та Барахони.

На основі третьої схеми із використанням тільки обмежень для всіх трійок булевих змінних у роботах [210], [261] знайдено дві нові верхні оцінки для зваженого числа стійкості графу. Вони є оптимальними значеннями цільової функції у відповідних задачах лінійного програмування з числом обмежень $O(|V|^3)$, де $|V|$ – кількість вершин в графі. Доведено, що отримані верхні оцінки є точними, якщо граф належить сімейству *t*-перфектних графів.

Виявлено нові властивості для оцінки $\psi_3^*(G,w)$. Вони пов'язані з тим, що з квадратичних обмежень (1.5.12), (1.5.13) і (1.5.15) випливають правильні лінійні нерівності для p-колеса в графі (відома підструктура в графі, англійський термін для якої – p-wheel). Це дає можливість розширити сімейство графів, для яких задача знаходження $\alpha(G,w)$ не є NP-складною, а може бути вирішена за поліноміальний час. Як окремий випадок сюди потрапляє і відоме сімейство W-перфектних графів, для якого цей факт доведено на основі методу еліпсоїдів. Найбільш повно сімейства лінійних нерівностей, які випливають із квадратичних обмежень (1.5.12), (1.5.13) і (1.5.15), наведено у роботі [239]. Ними є сімейства лінійних нерівностей для ряду підструктур у графі, що отримані комбінацією клік та непарних циклів. Зокрема, ці сімейства містять такі відомі сімейства нерівностей: clique constraints, odd-cycle і odd-antihole constraints, wheel і p-wheel constraints, odd-web і odd-antiweb constraints.

У роботі [241] розроблено ітераційний алгоритм для знаходження ЛП-орієнтованих верхніх оцінок для зваженого числа стійкості графа. Такі оцінки базуються на апроксимації багатогранника стійких множин за допомогою скінченного числа лінійних нерівностей для ребер, непарних циклів і р-коліс у графі та розв'язуванні задачі лінійного програмування за допомогою сучасних ЛП-програм. Вони є точними, якщо граф належить до сімейства t-перфектних графів. Алгоритм реалізовано у формі програми LPWSTAB, де використана відома ЛП-програма SoPlex-1.4.1. Це дозволило значно зменшити час знаходження ефективних оцінок (по типу оцінок Ловаса та Шора) для ряду графів з DIMACS-бібліотеки і графів, зв'язаних зі знаходженням перешкодостійких кодів (потужність графів досягала двох-трьох тисяч вершин). За допомогою програми LPWSTAB знайдено відомі верхні оцінки для максимальної кліки в графах keller6 та keller7. Ці графи досліджувались П. Шором (Peter Shor, AT&T Bell Labs) та пов’язані зі спробами доведення так званої гіпотези Келлера (Keller’s conjecture). Потужність графів: keller6 – 3361 вершин та 4,619,898 ребер; keller7 – 14190 вершин та 87,091,347 ребер. Чисельні експерименти проводились на 64-розрядних комп’ютерах Інституту автоматики та процесів управління Далекосхідного відділення Російської Академії наук з об’ємом оперативної пам’яті 32 Гб та 36 Гб. Для графа keller7 на комп’ютері з 36 Гб оперативної пам’яті програма LPWSTAB витратила приблизно 13 годин (виконала 8 ітерацій, кожна з яких була пов’язана з розв’язком ЛП-задач розмірністю 14190 змінних та максимально 13,593,798 обмежень).

Техніку лагранжевих оцінок можна вважати альтернативою використанню методів внутрішніх точок для розв’язання задач напіввизначеного програмування (semidefinite programming). Дійсно, багато задач напіввизначеного програмування доцільно розглядати як окремий випадок задач недиференційовної оптимізації та застосовувати для розв’язання ефективні методи мінімізації негладких опуклих функцій. Адже умова невід’ємної визначеності деякої симетричної $(n \times n)$-матриці X еквівалентна тому, що мінімальне власне число цієї матриці $\lambda_n(X) \geq 0$. Але $\lambda_n(X)$ – увігнута недиференційовна функція елементів матриці, тобто якщо елементи матриці $X(u) = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ є лінійними функціями від вектора невідомих параметрів $u \in R^m$, то умова $X(u) \,||\, 0$ еквівалентна опуклому негладкому обмеженню $\phi(u) = -\lambda_n(X(u)) \leq 0$.

Головним здобутком наведених результатів є нові алгоритми негладкої оптимізації для знаходження лагранжевих двоїстих оцінок для цільової функції в квадратичних неопуклих задачах. Для покращення точності цих оцінок запропоновано та обґрунтовано нові схеми функціонально надлишкових обмежень. На їх основі побудовано нові оптимізаційні моделі для задачі мінімізації поліноміальних функцій, задачі про максимальний розріз графа та задачі про максимально незалежну множину вершин графу. Обґрунтовано нові властивості оцінок Шора для зваженого числа внутрішньої стійкості графа. Це дозволило побудувати нові сімейства графів, для яких зважене число стійкості графа (в загальному випадку NP-складна задача) може бути знайдено за поліноміальний час. Результати використано для розробки алгоритму та його програмної реалізації для знаходження ЛП-орієнтованих верхніх оцінок зваженого числа стійкості неорієнтованих графів з тисячами вершин.

Програмне забезпечення для субградієнтних методів з перетворенням простору використано доктором фізико-математичних наук С.П. Шарим (Інститут обчислювальних технологій СВ РАН, Новосибірськ) для дослідження розв'язності інтервальної лінійної задачі про допуски. Реалізовані ним процедури TOLSOLVTY(A,b) розміщено на сайті «Интервальный анализ и его приложения» (http://www.sbras.ru/interval) в розділі «Программное обеспечение»: INTLAB-функція доступна при посиланні (http://www.sbras.ru/interval/Programming/MCodes/tolsolvty.m), а Int4Sci-функція доступна при посиланні (http://www.sbras.ru/interval/Programming/SciCodes/tolsol vty.sci). Розроблена С.П. Шарим Octave-функція для обчислення значення та суперградієнта увігнутої функції для розпізнавального функціонала доступна при посиланні http://elis.dvo.ru/sites/default/files/OptimiZone/software/tests/Shary/Octave/ та може бути використана для тестування довільних чисельних методів оптимізації негладких функцій.

МОНОГРАФІЇ

1. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – Киев : Наукова думка, 1976. – 247 с.
2. Грицык В.В. Распараллеливание алгоритмов обработки информации в системах реального времени / Грицык В.В. – Киев : Наукова думка, 1981. – 217 с.
3. Грицык В.В. Параллельная обработка информации : в 5 томах / Грицык В.В. и др. – Киев : Наукова думка, 1985. – Т. 1. Распараллеливание алгоритмов обработки информации / под ред. А.Н. Свенсона. – 279 с.
4. Грицык В.В. Параллельная обработка информации : в 5 томах / Грицык В.В. и др. – Киев : Наукова думка, 1985. – Т. 2. Параллельные методы и средства распознавания образов / под ред. В.В. Грицыка, А.Н. Свенсона. – 275 с.
5. Грицык В.В. Параллельная обработка информации : в 5 томах / Грицык В.В. и др. – Киев : Наукова думка, 1986. – Т. 3. Вычислительные системы, структуры и среды для решения задач большой размерности / под ред. В.В. Грицыка. – 288 с.
6. Грицык В.В. Параллельная обработка информации : в 5 томах / Грицык В.В. и др. – Киев : Наукова думка, 1988. – Т. 4. Высокопроизводительные системы параллельной обработки информации / под ред. В.В. Грицыка. – 272 с.
7. Грицык В.В. Параллельная обработка информации : в 5 томах / Грицык В.В. и др. – Киев : Наукова думка, 1990. – Т. 5. Проблемно-ориентированые и специализированные средства обработки информации / под ред. Б.Н. Малиновского, В.В. Грицыка. – 504 с.
8. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – Киев : Наукова думка, 1986. – 268 с.
9. Кириченко М.Ф. Оптимізація маніпуляційних роботів / Кириченко М.Ф., Крак Ю.В., Сорока Р.О. – Київ : Либідь, 1990. – 144 с.
10. Korbicz J. State and Parameter Estimation / J. Korbicz, P.I. Bidyuk. – Zielona Gora : Technical University of Zielona Gora, 1993. – 303 p.
11. Элементы теории геометрического проектирования / [Гиль Н.И., Романова Т.Е., Яковлев С.В. и др.]. – Киев : Наукова думка, 1995. – 241 с.
12. Згуровский М.З. Анализ и управление большими космическими конструкциями / М.З. Згуровский, П.И. Бидюк. – Киев : Техніка, 1997. – 450 с.
13. Васильев В.И. Формирование и распознавание образов / В.И. Васильев, А.И. Шевченко. – Донецк : ДонДІШІ, 2000. – 360 с.
14. Довгий С.В. Моделирование и прогнозирование процессов приватизации и инвестирования / Довгий С.В., Савенков А.И., Бидюк П.И. – Киев : Атака, 2001. – 235 с.

15. Шевченко А.И. Актуальные проблемы теории искусственного интеллекта / Шевченко А.И. – Київ : ІПШІ «Наука і освіта», 2003. – 228 с.
16. Бідюк П.І. Моделювання та прогнозування нелінійних динамічних процесів / Бідюк П.І., Баклан І.В., Литвиненко В.І. – Київ : ЕКМО, 2004. – 121 с.
17. Системи підтримки прийняття рішень – проектування та реалізація / [Бідюк П.І., Щербань Ю.Ю., Щербань В.Ю., Демківський Є.О.]. – Київ : КНУТД, 2004. – 112 с.
18. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – Киев : Наукова думка, 2005. – 564 с.
19. Задачі оптимального проектування надійних мереж / [Шор Н.З., Сергієнко І.В., Шило В.П., Стецюк П.І. та ін.]. – Київ : Наукова думка, 2005. – 230 с.
20. Грицик В.В. Моделювання та синтез складних зображень симетричної структури / Грицик В.В., Березька К.М., Березький О.М. – Львів : ДНДІ ІІ, 2005. – 140 с.
21. Кривонос Ю.Г. Моделювання, аналіз і синтез маніпуляційних систем / Кривонос Ю.Г., Крак Ю.В., Кириченко М.Ф. – Київ : Наукова думка, 2006. – 207 с.
22. Сучасні методи та інформаційні технології математичного моделювання, аналізу і оптимізації складних систем / [Гаращенко Ф.Г., Кириченко М.Ф., Крак Ю.В. та ін.]. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2006. – 200 с.
23. Белозерский Л.А. Анализ и обработка априорной информации в конструировании систем автоматического распознавания / Л.А. Белозерский, А.И. Шевченко. – Донецк : ІПШІ «Наука і освіта», 2007. – 180 с.
24. Шевченко А.І. Розумова діяльність людини / А.І. Шевченко, В.Д. Полехін. – Донецьк : ІПШІ «Наука і освіта», 2007. – 280 с.
25. Бідюк П.І. Методи прогнозування / Бідюк П.І., Меняйленко О.С., Половцев О.В. – Луганськ : Альма-матер, 2008. – 600 с.
26. Грицик В.В. Розпаралелювання обробки даних для реалізації інформаційно-аналітичних систем / В.В. Грицик. – Львів : ДНДІ ІІ, 2009. – 130 с.
27. Аналіз і синтез ситуацій в системах прийняття рішень / [Кривонос Ю.Г., Кириченко М.Ф., Крак Ю.В., Донченко В.С., Куляс А.І.]. – Київ : Наукова думка, 2009. – 365 с.
28. Васильев В.И. Принцип редукции в задачах обнаружения закономерностей / Васильев В.И., Шевченко А.И., Эш С.Н. – Донецк : ІПШІ «Наука і освіта», 2009. – 340 с.
29. Розвиток методів і технологій моделювання та оптимізації складних систем / [Гаращенко Ф.Г., Кириченко М.Ф., Крак Ю.В. та ін.]. – Київ : Сталь, 2009. – 668 с.

НАУКОВІ СТАТТІ

1. Стоян Ю.Г. Функция плотного размещения и ее особенности / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1973. – № 4. – С. 350-353.
2. Винцюк Т.К. Задача подстройки под диктора при распознавании речи / Т.К. Винцюк, А.И. Куляс // Обработка и распознавание сигналов. Сборник научных трудов ИК АН УССР. –К., 1975. – С. 102-121.
3. Грицык В.В. К вопросу о распознавании одного класса изображений / В.В. Грицык, А.Ю. Луцык // Обработка и передача информации. – 1978. – № 54. – С. 11-17.
4. Грицык В.В. Об одной задаче классификации образов на специализированных ЦВМ / В.В. Грицык, Э.Р. Златогурский, В.Н. Михайловский // Обработка и передача информации. – 1978. – № 54 – С. 17-22.
5. Грицык В.В. О распознавании выпуклых изображений / В.В. Грицык, Г.Т. Черчык // Обработка и передача информации. – 1979. – № 57. – С. 37-41.
6. Грицык В.В. Об одном подходе к автоматической обработке стереофотограмметрической информации с помощью ЭВМ / Грицык В.В., Чернышов Ю.А. // Обработка и передача информации. – 1979. – № 57. – С. 47-54.
7. Стоян Ю.Г. Пакет программ Размещение / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль, В.Г. Ещенко // Управляющие системы и машины. – 1980. – № 4. – С. 131-134.
8. Яковлев С.В. Стохастические алгоритмы оптимизации для решения одного класса многоэкстремальных задач / С.В. Яковлев // Теория оптимальных решений. – 1981. – № 7. – С. 49-58.
9. Стоян Ю.Г. Метод уравновешивания вращающихся дискретно распределённых масс / Ю.Г. Стоян, В.З., Соколовский, С.В. Яковлев // Энергомашиностроение. – 1982. – № 3. – С. 3-14.
10. Винцюк Т.К. Экспериментальная система пофонемного распознавания речи / Т.К. Винцюк, О.М. Гаврилюк, А.И. Куляс и др. // Управляющие системы и машины. – 1982. – № 5. – С. 17-23.
11. Крак Ю.В. О планировании траекторий движения манипулятора / Ю.В. Крак // Вестник Киевского ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 80-82.
12. Киселева Е.М. Алгоритм решения многопродуктовой задачи оптимального разбиения с ограничениями / Е.М. Киселева, Н.З. Шор // Кибернетика. – 1985. – № 1. – С. 76-81.
13. Сорока Р.А. Построение математической модели манипуляцион-

ного робота манипулятора / Р.А. Сорока, Ю.В. Крак // Вестник Киевского ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем. К., 1985. – В.4. – С.44-49.
14. Гірко В.Л. Адаптивний підхід до керування рухом маніпулятора / В.Л. Гірко, Ю.В. Крак // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 12. – С. 66-68.
15. Yakovlev S.V. (0,1)-модель одного класса задач размещения и покрытия / S.V. Yakovlev // Program designers. – 1986. – № 2. – P. 153-156.
16. Яковлев С.В. Об одном классе геометрических задач о покрытии / С.В. Яковлев // Проблемы бионики. – 1986. – Вып. 37. – С. 84-87.
17. Yakovlev S.V. Sequential approach for optimization problem / S.V. Yakovlev // Newsletter. – 1986. – Vol. 4. – P. 16-19.
18. Кириченко Н.Ф. Моделирование, оптимизация и адаптация манипуляционных роботов / Н.Ф. Кириченко, Ю.В. Крак, Р.А. Сорока // Кибернетика и вычислительная техника. – 1987. – Вып. 73. – С. 90-93.
19. Куляс А.И. Пути создания многодикторных и кооперативных систем распознавания речи / А.И. Куляс // Распознавание и синтез звуковых сигналов. Сборник научных трудов ИК АН УССР. – К., 1987. – С. 16-24.
20. Yakovlev S.V. О вероятностных методах оптимизации на дискретных множествах / S.V. Yakovlev // Acta Cybernetica. – 1987. – Vol. 8. – № 2. – P. 219-226.
21. Кириченко Н.Ф. Математическое моделирование механики и процессов управления манипуляционных роботов / Кириченко Н.Ф., Крак Ю.В., Сорока Р.А. // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 147-155.
22. Яковлев С.В. Формализация и решение задач компоновки, размещения трассировки и покрытия / С.В. Яковлев, М.А. Кухарёнок, В.М. Струков // Проблемы машиностроения. – 1987. – № 11. – С. 31-44.
23. Стоян Ю.Г. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев // Доклады АН УССР. – 1988. – № 3. – С. 69-72.
24. Стоян Ю.Г. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев // Доклады АН УССР. – 1988. – №5. – С. 68-70.
25. Korbicz J.S. Analiza stabilnosci dyskretnego filtru Kalmana z wykorzystaniam macierzy tranzycijnej / J.S. Korbicz, P.I. Bidyuk // Archiwum automatyky i telemechaniky. – 1988. – № 3. – P. 21-29.
26. Кириченко Н.Ф. Диалоговая система моделирования на ЭВМ механики манипуляционных роботов / Н.Ф. Кириченко, Ю.В. Крак,

Р.А. Сорока // Кибернетика и вычислительная техника. – 1988. – Вып. 77. – С. 103-105.
27. Стоян Ю.Г. Оптимизация покрытий трансляциями ограниченных множеств / Стоян Ю.Г, Яковлев С.В. // Доклады АН УССР. – 1988. – № 7. – С. 20-23.
28. Крак Ю.В. К формированию уравнений динамики манипуляционных роботов применительно к задачам управления движением / Ю.В. Крак // Автоматика – 1988. – № 4. – С. 89-93.
29. Крак Ю.В. Оптимізація обчислень при побудові рівнянь руху маніпуляційних роботів / Ю.В. Крак // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 72-76.
30. Яковлев С.В. (0,1)- модель одного класса задач размещения и покрытия / С.В. Яковлев // Проблемы бионики. – 1988. – № 42. – С. 34-56.
31. Яковлев С.В. О классе задач решетчатого покрытия ограниченной области / С.В. Яковлев, С.Б. Шеховцов // Вестник Харьковского ун-та. Управляемые системы. – 1988. – № 315. – С. 103-105.
32. Бидюк П.И. Быстродействующий алгоритм субоптимального управления многомерными объектами / П.И. Бидюк, А.А. Жолнарский // Вестник НТУУ «КПИ». Техническая кибернетика. – 1989. – Вып. 13. – С. 18-26.
33. Киселева Е.М. Решение одной задачи оптимального разбиения с размещением центров тяжести подмножеств / Е.М. Киселева // Журнал вычисл. матем. и мат. физ. – 1989. – Т. 29, № 5. – С. 709-722.
34. Куляс А.И. Распознавание и синтез речевых сигналов при общении с ЭВМ / А.И. Куляс // Средства интеллектуализации кибернетических систем. Сборник научных трудов ИК АН УССР. – К., 1989. – С. 15-21.
35. Yakovlev S.V. On a class of problems on covering of a bounded set / S.V. Yakovlev // Acta Mathematica. – 1989. – Vol. 53, № 3-4. – P. 253-262.
36. Яковлев С.В. Оценки минимума выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах / С.В. Яковлев // Кибернетика. – 1989. – № 3. – С. 89-97.
37. Стоян Ю.Г. Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в R^n / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.В. Паршин // Доклады АН УССР. – 1989. – № 5. – С. 72-76.
38. Яковлев С.В. Формализация и решение одного класса задач покрытия при синтезе систем управления и контроля / С.В. Яковлев, С.Б. Шеховцов // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 5. – С. 160-168.
39. Шевченко А.И. Функционально значимые информационные элементы как отделимые структуры речевых волн / Шевченко А.И., Мышко С.В. // Кибернетика. – 1989. – № 6. – С. 124-125.

40. Сорока Р.А. Построение программных движений манипуляционных роботов в виде сплайнов четвертого порядка / Р.А. Сорока, Ю.В. Крак // Вычислительная и прикладная математика. – 1989. – Вып. 68. – С. 114-120.
41. Свиридов В.В. Отображение параметрической геометрической информации в задачах предупреждения и контроля / В.В. Свиридов, Е.Ю. Стоян, С.В. Яковлев // Доклады АН УССР. – 1989. – № 11. – С. 67-70.
42. Яковлев С.В. Приближенные методы оптимизации на вершинах перестановочного многогранника / С.В. Яковлев // Вестник Харьковского ун-та. Управляемые системы. – 1989. – № 368. – С. 25-30.
43. Крак Ю.В. Исследование математических моделей и информационных процессов в системах управления манипуляционными роботами / Ю.В. Крак // Вестник Киевского ун-та. Моделирование и системы обработки информации. – 1989. – Вып. 8. – С. 58-63.
44. Korbicz J.S. An asymptotic analysis of optimal discrete time controller / J.S. Korbicz, P.I. Bidyuk, V.M. Podladchikov // Journal of System Science. – 1990. – Vol. 16, № 1. – P. 35-42.
45. Згуровский М.З. Управление механическими системами распределенного характера / М.З. Згуровский, П.И. Бидюк // Адаптивные САУ. – 1990. – Вып. 18. – С. 18-26.
46. Яковлев С.В. Экстремальные свойства квадратичных функций с булевыми переменными / Яковлев С.В., Гребенник И.В. // Управляющие системы. – 1990. – № 30. – С. 25-37.
47. Бублик Б.М. До формуванню рівнянь руху маніпулятора в чисельно-аналітичному вигляді / Б.М. Бублик, Ю.В. Крак, Ю.В. Семенюк // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 11. – С. 58-61.
48. Крак Ю.В. Об одном подходе к аналитическому построению уравнений движения манипуляционных роботов / Ю.В. Крак // Вычислительная и прикладная математика. – 1990. – Вып. 72. – С. 82-88.
49. Стоян Ю.Г. Квадратичная оптимизация на комбинаторных множествах в R^n / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.Г. Паршин // Кибернетика и системный анализ. – 1991. – № 4. – С. 97-104.
50. Киселева Е.М. Решение непрерывной задачи оптимального разбиения в условиях неполной информации об исходных данных / Е.М. Киселева, Н.З. Шор // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. – 1991. – Т. 31, № 6. – С. 792-809.
51. Винцюк Т.К. Экспериментальные исследования системы распознавания слов в потоке слитной речи / Т.К. Винцюк, С.А. Биднюк, А.И. Куляс, В.В. Пилипенко // Методы и средства информатики речи. Сборник научных трудов ИК АН Украины. – К., 1991. – С. 15-24.

52. Korbicz J.S. Suboptimal control algorithm for discrete time systems / J.S. Korbicz, P.I. Bidyuk, V.M. Podladchikov // Problems of Control and Information Theory. – 1991. – Vol. 20, № 4. – P. 42-51.
53. Романова Т.Е. Представление знаний в системе решения задач геометрического проектирования / Т.Е. Романова // Кибернетика. – 1991. – № 5. – С. 36-42.
54. Яковлев С.В. О некоторых классах задач оптимизации на комбинаторных множествах размещений / С.В. Яковлев, И.В. Гребенник // Изв. вузов. Сер. Мат. – 1991. – № 11. – С. 47-56.
55. Киселева Е.М. Решение обобщенной задачи Неймана-Пирсона с использованием методов оптимального разбиения / Е.М. Киселева // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. – 1992. – Т. 31. – № 1. – С. 167-173.
56. Яковлев С.В. Локализация решения некоторых задач нелинейной целочисленной оптимизации / С.В. Яковлев, И.В. Гребенник // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – №5. – С. 116-124.
57. Bidyuk P.I. Asymptotic analysis of Kalman filter for dynamic systems / P.I. Bidyuk, V.M. Podladchikov // Applied Mathematics and Computer Science. – 1993. – Vol. 3, № 1. – P. 18-26.
58. Bidyuk P.I. Analytical study of filtering errors for a case of correlated measurement noise / P.I. Bidyuk, V.M. Podladchikov, S.V. Peshkov // Ukrainian Engineering News (New York). – 1993. – № 4. – P. 29-33.
59. Крак Ю.В. Метод построения уравнений динамики манипуляционных роботов в численно-аналитическом виде / Ю.В. Крак // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – № 1. – С. 137-141.
60. Hrytsyk V.V. Information tecnologies and systems: The State of the art and Prospects / V.V. Hrytsyk // Pattern recognition and Image Analysis. – USA. – 1994. – Vol. 4. – № 3. – P. 209-228.
61. Korbicz J.S. Integration of multisensor measurements using modified Kalman filter / J.S. Korbicz, P.I. Bidyuk, V.M. Podladchikov // Applied Mathematics and Computer Science. – 1994. – Vol. 4. – № 1. – P. 39-51.
62. Киселева Е.М. Исследование алгоритмов решения одного класса непрерывных задач разбиения / Е.М. Киселева, Н.З. Шор // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 1. – С. 84-96.
63. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклого многогранника / С.В. Яковлев // Журнал выч. мат. и мат. физ. – 1994. – № 7. – С. 123-132.
64. Крак Ю.В. Координационный подход к построению движений манипуляционных роботов / Ю.В. Крак // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 4. – С. 120-128.

65. Стецюк П.И. К вопросу сходимости r-алгоритмов / П.И. Стецюк // Кибернетика и системний. анализ. – 1995. – № 6. – С. 173-177.
66. Капустян В.Е. Решение некоторых задач стартового управления методом оптимального разбиения множеств / В.Е. Капустян, Е.М. Киселева, Л.С. Кроха // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 5. – С. 80-88.
67. Стецюк П.И. r-алгоритмы и эллипсоиды / П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113-134.
68. Стецюк П.И. Метод центров тяжести простых тел / П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 5. – С. 117-138.
69. Грицык В.В. Информационные технологии и системы: состояние и перспективы / В.В. Грицык // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 2. – С. 5-22.
70. Стецюк П.И. Ортогонализующие линейные операторы в выпуклом программировании (Часть I) / П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 3. – С. 97-119.
71. Стецюк П.И. Ортогонализующие линейные операторы в выпуклом программировании (Часть 2) / П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 5. – С. 111-124.
72. Шор Н.З. Использование модификации r-алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций / Н.З. Шор, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28-49.
73. Киселева Е.М. О решении непрерывной стохастической задачи оптимального разбиения множеств с восстановлением целевого функционала / Е.М. Киселева, К.А. Кузнецов // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 6. – С. 81-88.
74. Романова Т.Е. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных / Т.Е. Романова, Л.Г. Евсеева, Ю.Г. Стоян // Доклады НАН Украины. – 1997. – № 7. – С. 56-60.
75. Стоян Ю.Г. Account of errors in optimization placement problem / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова // Проблемы машиностроения. – 1998. – Т.1. – № 2. – С. 31-41.
76. Hrytsyk V.V. The neural and neural-like networks: synthesis, realization, application and future / V.V. Hrytsyk, N.N. Aizenberg, R.A. Bun, V.A. Valkovskii // Informational technologies and systems. – 1998. – Vol. 1. – № 1/2. – P. 15-55.
77. Крак Ю.В. Динамика манипуляционных роботов: численно-аналитический метод построения и исследование вычислитель-

ной сложности / Ю.В. Крак // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 142-151.

78. Бидюк П.И. Анализ и моделирование экономических процессов переходного периода / П.И. Бидюк, О.В. Половцев // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 5. – С. 138-146.
79. Bidyuk P.I. A stochastic criterion for the optimal investment process / P.I. Bidyuk, J.V. Bondarenko // International Journal of Mathematics and Computer Science. – 1998. – Vol. 8. – № 3. – P. 505-510.
80. Киселева Е.М. О применении метода потенциальных функций для решения стохастической задачи оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, К.А. Кузнецов // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 123-128.
81. Стоян Ю.Г. Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.А. Валуйская [и др.] // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 2. – С. 25-36.
82. Kirichenko N.F. The optimization problems in investigation of geometric-topological parameters of a manipulator / N.F. Kirichenko, Yu.V. Krak // Cybernetics and computing technology. Discrete control systems. – 1998. – № 109. – P. 82-95.
83. Стоян Ю.Г. Математическая модель оптимизационной задачи размещения правильных многоугольников с учетом погрешностей исходных данных / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, Ю.А. Сысоева // Доклады НАН Украины. – 1998. – № 5. – С. 104-111.
84. Krak Yu.V. On the construction of coordinated motions for a manipulator / Yu.V. Krak // Cybernetics and computing technology. Complex control systems. – 1998. – № 107. – P. 43-50.
85. Стоян Ю.Г. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, Ю.А. Сысоева // Доклады НАН Украины. – 1998. – № 9. – С. 114-120.
86. Сергиенко И.В. Межотраслевая модель планирования структурно-технологических изменений / И.В. Сергиенко, М.В. Михалевич, П.И. Стецюк // Кибернетика и системній анализ. – 1998. – № 3. – С. 3-17.
87. Hrytsyk V.V. Estimation process using artificial neural network / V.V. Hrytsyk, T. Kwater, Z. Kedzior [etc.] // Інформаційні технології і системи. – 1999. – Т. 2. – № 1. – С. 114-121.
88. Шор Н.З. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования / Н.З. Шор, Т.А. Бар-

дадым, Н.Г. Журбенко [и др.] // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 5. – С. 33-47.
89. Стецюк П.И. К методам эллипсоидов / П.И. Стецюк // Теория оптимальных решений. – Киев : Ин-т кибернетики им В.М. Глушкова НАН Украины, 1999. – С. 27-33.
90. Кисельова Є.М. Умови оптимальності Куна-Такера для неперервної задачі оптимального розбиття множини / Є.М. Кисельова, Н.К. Васильєва // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 1999. – № 1. – С. 145-151.
91. Киселева Е.М. Оценка разрыва двойственности для задач оптимального разбиения / Е.М. Киселева, Н.К. Васильева // Динамические системы. – 2000. – № 16. – С. 198- 204.
92. Киселева Е.М. Об условиях экстремума для непрерывной задачи оптимального разбиения множества с недифференцируемым целевым функционалом / Е.М. Киселева, Н.К. Васильева // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 78- 89.
93. Киселева Е.М. Об одной непрерывной задаче оптимального разбиения с недифференцируемым функционалом / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 4. – С. 115-125.
94. Романова Т.Е. Интервальное пространство $\mathbf{I_s^n R}$ / Т.Е. Романова // Доклады НАН Украины. – 2000. – № 9. – С. 36-41.
95. Стоян Ю.Г. Интервальное касание выпуклых интервальных многоугольников / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова // Доклады НАН Украины. – 2000. – № 7. – С. 21-26.
96. Машталир В.П. Точечно-множественные отображения в задачах распараллеливания обработки изображений / В.П. Машталир, С.В. Яковлев // Вісник Інженерної академії України. – 2000. – № 1. – С. 88-97.
97. Машталир В.П. Свойства многозначных отображений в задачах распознавания / В.П. Машталир, С.В. Яковлев, В.В. Шляхов // Доповіді НАН України. – 2000. – № 12. – С. 72-76.
98. Стецюк П.И. Об одном методе для нахождения допустимой точки выпуклого неравенства / П.И. Стецюк // Теория оптимальных решений. – Киев : Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2000. – С. 3-10.
99. Шор Н.З. Нахождение глобальных минимумов полиномиальных функций с использованием двойственных квадратичных оценок / Н.З. Шор, П.И. Стецюк, С.В. Крылов // Вестник Международного Соломонова университета. – 2000. – № 4. – С. 217-233.

100. Kirichenko N.F. Structural representation for problems of mechanical systems modeling and synthesis / N.F. Kirichenko, Yu.V. Krak, V.V. Lasorik // Robot Control (SYROCO 2000). – Elsevier Science Ltd : Kidlington, Oxford. – 2001. – P. 739-743.
101. Романова Т.Е. Интервальное касание точек интервального пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ / Т.Е. Романова, Д.С. Рудой // Радиоэлектроника и информатика. – 2000. – № 2. – С. 53-57.
102. Крак Ю.В. Оптимізаційні постановки та методи в задачах дослідження маніпуляційних систем / Ю.В. Крак // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2000. – № 2. – С. 56-62.
103. Bidyuk P.I. Solving parabolic equations using the method of fast convergent iterations / P.I. Bidyuk, V. Bondarenko, J. Bernatska // International Journal of Mathematics and Computer Science. – 2000. – Vol. 10. – № 3. – P. 333-344.
104. Шевченко А.И. Программное обеспечение интеллектуально-механических мобильных роботов / А.И. Шевченко // Программные продукты и системы. – 2000. – № 1. – С. 46-47.
105. Шевченко А.И. Отдельные вопросы теории систем искусственного интеллекта / А.И. Шевченко, А.С. Звенигородский, И.С. Сальников // Искусственный интеллект. – 2001. – № 1. – С. 130-142.
106. Шевченко А.І. Сучасні методи досліджень в багатофункціональному роботі з елементами штучного інтелекту / А.І. Шевченко // Искусственный интеллект. – 2001. – № 3. – С. 4-11.
107. Шевченко А.И. Выявление и моделирование сходства, равенства и порядка / А.И. Шевченко, В.И. Васильев, Т.И. Ланге // Искусственный интеллект. – 2001. – № 3. – С. 26-39.
108. Крак Ю.В. Програмний комплекс для моделювання маніпуляційних систем / Ю.В. Крак // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2001. – № 1. – С. 234-240.
109. Бидюк П.И. Прогнозирование состояний динамических систем с помощью адаптивного фильтра Калмана / П.И. Бидюк, А.С. Гасанов, В.Н. Подладчиков // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 4. – С. 21-32.
110. Яковлев С.В. Оптимизация линейных функций на вершинах перестановочного многогранника с дополнительными линейными ограничениями / С.В. Яковлев, О.А. Валуйская // Украинский математический журнал. – 2001. – № 9. – С. 45-53.
111. Стоян Ю.Г. Интервальное произведение в пространстве $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова // Доклады НАН Украины. – 2001. – № 1. – С. 23-27.

112. Яковлев С.В. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения / С.В. Яковлев, О.А. Валуйская, О.С. Пичугина // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 2 (15). – С. 121-129.
113. Машталир В.П. Точечно-множественные методы кластеризации эталонной информации / В.П. Машталир, С.В. Яковлев // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – 3. – С. 3-18.
114. Шляхов В.В. Об изоморфизме мультиалгебраических систем / В.В. Шляхов, С.В. Яковлев // Доклады НАН Украины. – 2001. – № 10. – С. 21-26.
115. Крак Ю.В. Планування рухів маніпуляційних систем на основі нейромережі Хеммінга / Ю.В. Крак, О.В. Бармак // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2001. – № 2. – С. 244-250.
116. Грицик В.В. Використання нейромережевих технологій для передачі інформації з покращеною завадостійкістю / В.В. Грицик, О.М. Томашевский // Інформаційні технології і системи. – 2002. – Т. 5. – № 1-2. – С. 5-12.
117. Бидюк П.И. Эволюционная оптимизация распределения финансов между альтернативными проектами / П.И. Бидюк, Т.З. Кордзадзе, В.И. Литвиненко // Искусственный интеллект. – 2002. – № 3. – С. 574-580.
118. Kirichenko M.F. Problems of associative memory design for neural network of robot trajectory planning / M.F. Kirichenko, Yu.V. Krak, O.V. Barmak // Advances in Electrical and Computer Engineering. – 2002. – № 1. – P. 51-57.
119. Бідюк П.І. Прогностичні моделі і проблема короткострокового прогнозу / П.І. Бідюк, Р.П. Циток // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2002. – № 3. – С. 42-48.
120. Бидюк П.И. Системный подход к построению регрессионной модели по временным рядам / П.И. Бидюк, И.В. Баклан, В.Н. Рифа // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2002. – № 3. – С. 114-131.
121. Крак Ю.В. До організації планування рухів маніпуляційних роботів у середовищі з обмеженнями на основі нейромережі Хеммінга / Ю.В. Крак, О.В. Бармак // Штучний інтелект. – 2002. – № 1. – С. 84-92.
122. Бидюк П.И. Параллельные генетические алгоритмы / П.И. Бидюк, В.И. Литвиненко, А.А. Токарь // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2002. – № 4. – С. 7-16.

123. Крак Ю.В. Анімація віртуальних образів людського обличчя при синтезі мовлення / Ю.В. Крак, О.В. Бармак // Штучний інтелект. – 2002. – № 4. – С. 458-462.
124. Шевченко А.И. Микророботы против подводных лодок / А.И. Шевченко, В.А. Ященко // Математичні машини і системи. – 2002. – № 2. – С. 193-204.
125. Шевченко А.И. Десять лет по пути создания систем искусственного интеллекта / А.И. Шевченко // Искусственный интеллект. – 2002. – № 3. – С. 5-24.
126. Шевченко А.И. Комбинированный алгоритм оптимальной сложности / А.И. Шевченко, В.И. Васильев // Искусственный интеллект. – 2002. – № 3. – С. 504-509.
127. Шевченко А.И. Мобильный робот «Интеллект-12» / А.И. Шевченко, С.В. Мащенко // Искусственный интеллект. – 2002. – № 4. – С. 380-387.
128. Киселева Е.М. Поиск глобального минимума недифференцируемой функции с помощью метода оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Т.Ф. Степанчук // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 2. – С. 45-60.
129. Киселева Е.М. О выборе оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов квадратурных формул для функциональных классов, заданных квазиметриками / Е.М. Киселева, Т.Ф. Степанчук // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С. 138-153.
130. Крак Ю.В. До побудови рівнянь динаміки маніпуляційних роботів в чисельно-аналітичному вигляді / Ю.В. Крак // Вісник Київського університету. Кібернетика. – 2002. – № 3. – С. 49-52.
131. Киселева Е.М. Условия оптимальности и метод решения для одного класса многокритериальных непрерывных задач разбиения множеств / Е.М. Киселева, Н.К. Васильева // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 6. – С. 118-128.
132. Ф-функции параллелепипедов и цилиндров / Ю.Г. Стоян, Д.И. Придатко, Т.Е. Романова [и др.] // Доклады НАН Украины. – 2002. – № 10. – С. 68-72.
133. Стецюк П.И. К ускорению метода эллипсоидов с помощью использования шарового слоя / П.И. Стецюк, Д.М. Буханцов // Теория оптимальных решений. – Киев : Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 2002. – С. 63-70.
134. Shor N.Z. Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete optimization problems / N.Z. Shor, P.I. Stetsyuk // Journal of Global Optimization. – 2002.– Vol. 23. – P. 1-41.
135. Антошкин А.А. Математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных

данных / А.А. Антошкин, Т.Е. Романова // Проблемы машиностроения. – 2002. – Т. 5, № 1. – С. 56-60.
136. Φ-function for 2-D primary objects / Y. Stoyan, N. Gil, J. Terno [et al.] // Studia Informatica, Paris. – 2002. – Vol. 2, № 1. – P. 1-32.
137. Construction of a Φ-function for two convex polytopes / Y. Stoyan, M. Gil, J. Terno [et al.] // Applicationes Mathematicae. – 2002. – Vol. 2, № 29. – P. 199-218.
138. Придатко Д.И. Математическая модель задачи размещения параллелепипедов в цилиндре с учетом минимально допустимых расстояний / Д.И. Придатко, Т.Е. Романова, М.А. Уварова // Искусственный интеллект. – 2002. – № 4. – С. 49-56.
139. Романова Т.Е. Математическая модель оптимизационной задачи размещения параллелепипедов с учетом погрешностей исходных данных / Т.Е. Романова // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 2. – С. 42-45.
140. Грицик В.В. Методи та високопродуктивні паралельні системи для обробки та розпізнавання зображень у реальному часі / В.В. Грицик, О.М. Березький // Computing Journal. – 2003. – Vol. 2, №. 1. – P. 23-29.
141. Теоретичні і прикладні проблеми застосування штучних імунних систем об'єктів / В.В. Грицик, В.І. Литвиненко, І.Г. Цмоць [та ін.] // Інформаційні технології і системи. – 2003. – Т. 6, № 1 – 2. – С. 7-45.
142. Kiseleva E.M. On the Efficiency of a Global Non-differentiable Optimization Algorithm Based on the Method of Optimal Set Partitioning / E.M. Kiseleva, T. Stepanchuk // Journal of Global Optimization. – 2003. – V. 25. – P. 209-235.
143. Бидюк П.И. Системный подход к анализу адекватности нелинейных моделей временных рядов / П.И. Бидюк, И.В. Баклан, А.С. Гасанов // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 147-158.
144. Бидюк П.И. Системный подход к моделированию и прогнозированию процессов на основе временных рядов / П.И. Бидюк, А.Б. Демковский, Т.И. Демковская // Электронное моделирование. – 2003. – № 4. – С. 27-37.
145. Бідюк П.І. Автоматична діагностика систем керування на основі модельного підходу / П.І. Бідюк, І.В. Баклан, С.В. Яремко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2003. – № 6. – С. 46-54.
146. Бідюк П.І. Моделювання і прогнозування гетероскедастичних процесів / П.І. Бідюк, В.І. Литвиненко, І.В. Баклан // Автоматика, автоматизация, электротехнические комплексы и системы. – 2003. – № 2. – С. 11-19.

147. Бідюк П.І. Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів / П.І. Бідюк, І.В. Баклан // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – № 3. – С. 88-110.
148. Бидюк П.И. Структурный анализ методик построения регрессионных моделей по временным рядам / П.И. Бидюк, Т.А. Зворыгина // Управляющие системы и машины. – 2003. – № 2. – С. 93-99.
149. Бидюк П.И. Применение радиальных базисных функций в нейронных сетях для прогнозирования экономических показателей / П.И. Бидюк, О.А. Дудник // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 2. – С. 126-133.
150. Бидюк П.И. Решение задачи распределения ресурсов на основе нечеткого логического вывода / П.И. Бидюк, Л.А. Коршевнюк // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – № 2. – С. 33-42.
151. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов / П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 141-146.
152. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения / Н.З. Шор, Н.Г. Журбенко, А.П. Лиховид [и др.] // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 4. – С. 80-94.
153. Стецюк П.И. Об одном эллипсоиде для внешней аппроксимации n-мерного полушара / П.И. Стецюк // Компьютерная математика. – Киев : Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 2003. – Выпуск 2. – С. 144-151.
154. Шевченко А.И. Образный компьютер: задачи и возможности современных компьютерных технологий / А.И. Шевченко, С.А. Поливцев // Связь. – 2003. – № 5 (7). – С. 32-43.
155. Шевченко А.И. Новые концепции и технологии актуализации проблем искусственного интеллекта / А.И. Шевченко, И.С. Сальников // Искусственный интеллект. – 2003. – № 4. – С. 297-316.
156. Грицик В.В. Реалізація бульових та багатозначних логічних функцій на нейронних елементах / В.В. Грицик, Ф.Е. Гече // Доповіді НАН України. – 2004. – № 1. – С. 65-68.
157. Hrytsyk V.V. Modeling and synthesis of complex symmetrical images / V.V. Hrytsyk, K.M. Berezska, O.M. Berezsky // Int. J. Pattern Recognit. Artif. Intell. – 2004. – Vol. 18, № 2. – P. 175-195.
158. Φ-функции объектов, имеющих пространственную форму, границы, конус, цилиндр или параллелепипед / Ю.Г. Стоян, Д.І. Придатко, Т.Е. Романова [и др.] // Доклады НАН Украины. – 2004. – № 4. – С. 27-31.
159. Кириченко М.Ф. Псевдообратные и проекционные матрицы в задачах синтеза функциональных преобразователей / М.Ф. Кириченко-

ко, Ю.В. Крак, О.А. Полищук // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 3. – С. 116-130.
160. Ф -function for complex 2-D objects / Y. Stoyan, M. Gil, J. Terno [et al.] // 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – Vol. 2, № 1. – P. 69-84.
161. Стоян Ю.Г. Ф-функции объектов с конической и сферической границами / Ю.Г. Стоян, Д.И. Придатко, Т.Е. Романова // Доклады НАН Украины. – 2004. – № 3. – С. 25-29.
162. Крак Ю.В. Один з підходів до розробки системи автоматичного озвучення текстів українською мовою / Ю.В. Крак, В.В. Горбань // Штучний інтелект. – 2004. – № 1. – С. 196-204.
163. Шевченко А.И. Коллективные решения в задачах идентификации / А.И. Шевченко, В.И. Васильев // Искусственный интеллект. – 2004. – № 3. – С. 417-427.
164. Шевченко А.И. Развитие представлений и взглядов на природу естественного и искусственного сознания как основы интеллектуальности человека и машин / А.И. Шевченко, И.С. Сальников // Искусственный интеллект. – 2004. – № 3. – С. 16-36.
165. Кривонос Ю.Г. Проблема загального розв'язку задач аналізу й синтезу в лінійних системах керування / Ю.Г. Кривонос, М.Ф. Кириченко, Ю.В. Крак // Проблеми інформатизації та управління. – 2004. – Вип. 11. – С. 264-267.
166. Алгоритм идентификации стохастических нелинейных систем по измерительным данным / П.И. Бидюк, А.С. Гасанов, А.В. Шеффер [и др.] // Управляющие системы и машины. – 2004. – № 1. – С. 12-18.
167. Бідюк П.І. Обернене відображення Кастельжо в нечітких нейронних моделях / П.І. Бідюк, Митник О.Ю. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 2. – С. 24-34.
168. Бидюк П.И. Проектирование систем обнаружения и локализации местонахождения отказов на основе модельного подхода / П.И. Бидюк, И.В. Баклан, А.С. Гасанов // Математические машины и системы. – 2004. – № 3. – С. 79-91.
169. Алгоритм клонального отбора для прогнозирования нестационарных динамических систем / П.И. Бидюк, В.И. Литвиненко, И.В. Баклан [и др.] // Искусственный интеллект. – 2004. – № 4. – С. 89-99.
170. Об одном подходе к использованию метода наименьших модулей при построении линейных моделей / О.В. Бабак, А.С. Гасанов, М.М. Лейбович [и др.] // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 3. – С. 109-115.

171. Стецюк П.И. О функционально избыточных ограничениях для булевых оптимизационных задач квадратичного типа / П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №.6. – С. 168-172.
172. Грицик В.В. Технічні та програмні засоби розпізнавання та аналізу зображень складних біологічних об’єктів / В.В. Грицик, М.А. Влах // Інформаційні технології і системи. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 17-28.
173. Киселева Е.М. Обобщённый алгоритм распознавания предфрактального графа / Е.М. Киселева, Е.В. Болбылева // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 2. – С. 82-89.
174. Кривонос Ю.Г. Анализ структуры задачи создания систем озвучивания текстовой информации / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, Н.Н. Шатковский // Компьютерная математика. – 2005. – № 3. – С. 87-95.
175. Гребенник И.В. Моделирование взаимодействий n-мерных шаров в интервальных пространствах / И.В. Гребенник, Л.Г. Евсеева, Т.Е. Романова // Радиотехника. – 2005. – № 140. – С. 167-171.
176. Гиль Н. И. Решение задачи упаковки n-мерных параллелепипедов для оптимизации выполнения работ на машиностроительных предприятиях / Н.И. Гиль, М.С. Софронова // Проблемы машиностроения. – 2005. – Т. 8. – № 4. – С. 55-66.
177. Стоян Ю.Г. Φ -функция n-мерных параллелепипедов / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль, М.С. Муравьева // Доклады НАН Украины. – 2005. – № 3. – С. 22-27.
178. Стоян Ю.Г. Ф-функции усеченных конусов / Ю.Г. Стоян, Л.Г. Евсеева, Т.Е. Романова // Доклады НАН Украины. – 2005. – № 7. – С. 30-35.
179. Стоян Ю.Г. Математическое моделирование взаимодействий базовых геометрических 3-D объектов / Ю.Г. Стоян, Г. Шайтхауэр, Т.Е. Романова // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 19-31.
180. Bidyuk P.I. A novel approach to remote sensing of vegetation / P.I. Bidyuk, V.I. Litvinenko, C.O. Ponomarenko // System Research and Information Technologies. – 2005. – № 1. – P. 119-126.
181. Бидюк П.И. Построение и методы обучения байесовских сетей / П.И. Бидюк, А.Н. Терентьев, А.С. Гасанов // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 133-147.
182. Бидюк П.И. Моделирование и прогнозирование гетероскедастических процессов / П.И. Бидюк, А.С. Гасанов // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – № 146. – С. 61-80.
183. Longitudinal neurocognitive assessments of Ukrainians exposed to ionizing radiation after the Chornobyl nuclear accident / P.I. Bidyuk, G.L. Gamache, D.M. Levinson [et al.] // Archives of Clinical and Neuropsychology. – 2005. – Vol. 20. – P. 81-93.

184. Бідюк П.І. Аналіз і методи розв'язання задачі оцінювання екстремальних значень / П.І. Бідюк, А.В. Кроптя // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2005. – № 4. – С. 34-47.
185. Крак Ю.В. Математична модель подання текстової інформації для конкатенативного сегментивного синтезу / Ю.В. Крак, М.М. Шатковський // Штучний інтелект. – 2006. – № 1. – С. 158-165.
186. Крак Ю.В. Комп'ютерна габітоскопія / Ю.В. Крак, О.В. Бармак // Штучний інтелект. – 2006. – № 1. – С. 39-46.
187. Кривонос Ю.Г. Структура, свойства, характеристики объектов и элементов синтеза речи / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, Н.Н. Шатковский // Компьютерная математика. – 2006. – № 1. – С. 61-69.
188. Стоян Ю.Г. Математическое моделирование взаимодействия геометрических объектов, имеющих пространственную форму тора и шара / Ю.Г. Стоян, Л.Г. Евсеева, Д.И. Придатко, Т.Е. Романова // Доклады НАН Украины. – 2006. – № 4. – С. 27-32.
189. Романова Т.Е. Полный класс Ф-функций для круговых сегментов и базовых объектов / Т.Е. Романова, Е.А. Ступак // Штучний інтелект. – 2006. – № 4. – С. 232-242.
190. Бидюк П.И. Эвристический метод построения байесовских сетей / П.И. Бидюк, А.Н. Терентьев // Математические машины и системы. – 2006. – № 3. – С. 12-23.
191. Бідюк П.І. Метод адаптації байєсової нейромережі на основі алгоритму К2 / П.І. Бідюк, С.О. Катеринич // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2006. – № 4. – С. 98-106.
192. Згуровський М.З. Проблеми керування великими космічними конструкціями / М.З. Згуровський, П.І. Бідюк // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2006. – № 6. – С.37-49.
193. Бидюк П.И. Параметрическая оптимизация процесса управления вращательным движением космического аппарата с минимально-избыточным числом электромаховичных двигателей в режиме стабилизации / П.И. Бидюк, А.Н. Клименко, А.С. Гасанов // Кибернетика и вычислительная техника. – 2006. – № 151. – С. 38-48.
194. Крак Ю.В. Математические модели процессов фаззификации качественных сигналов в системах нечеткого логического вывода / Ю.В. Крак, В.Ю. Кондратенко // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 96- 103.
195. Кривонос Ю.Г. До організації створення системи розпізнавання мовно-голосового сигналу з використанням великого словника та обмеженої навчальної вибірки / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, С.М. Тимку // Штучний інтелект. – 2006. – № 3. – С.196-204.

196. Крак Ю.В. Ідентифікація портретних зображень облич людей з великих баз даних / Ю.В. Крак, О.В. Бармак // Вісник Київського університету. Кібернетика. – 2006. – № 7. – С. 34-37.
197. Стецюк П.И. Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа / П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 1. – С. 63-75.
198. Стецюк П.И. О новых лагранжевых двойственных оценках для числа устойчивости графа / П.И. Стецюк, П.М. Пардалос, Д.Л. Прошко // Компьютерная математика. – 2006. – № 3. – С. 149-158.
199. Стецюк П.И. Об уточнении лагранжевых двойственных оценок в бинарных и булевых квадратичных задачах / П.И. Стецюк, П.М. Пардалос // Теория оптимальных решений. – К., 2006. – С. 145-153.
200. Грицик В.В. Застосування штучних нейронних мереж при проектуванні комп'ютерного зору / В.В. Грицик // Автоматика, автоматизация, электротехнические комплексы и системы. – 2007. – № 2 (20). – С. 18-26.
201. Романова Т.Е. Учет погрешностей при моделировании компоновки объектов с нелинейной границей в задачах синтеза технических систем / Т.Е. Романова, И.В. Гребенник, Л.Г. Евсеева // Проблемы машиностроения. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 65-70.
202. Романова Т.Е. Ф-функции для неориентированных круговых сегментов и базовых 2D объектов / Т.Е. Романова, Е.А. Ступак // Бионика интеллекта. – 2007. – № 2 (67). – С. 170-175.
203. Stoyan Yu. Translational polygonal containment in packing and covering / Yu. Stoyan, T. Romanova, G. Scheithauer, A. Krivulya // Journal of mechanical engineering. – 2007. – Vol. 10, № 3. – P. 67-75.
204. Grebennik I. Modeling of Interaction of the n-D Spheres within Interval Spaces / I. Grebennik, L. Evseyeva, T. Romanova // Telecommunications and Radio Engineering. – 2007. – Vol. 66, № 3. – P. 273-281.
205. Кривонос Ю.В. Локалізація і врахування особливостей обличчя людини для задачі розпізнавання за портретною фотографією / Ю.В. Кривонос, Ю.В. Крак, А.С. Тернов // Штучний інтелект. – 2007. – № 3. – С. 229-236.
206. Крак Ю.В. Застосування нерівномірних раціональних базисних сплайнів в задачах синтезу та аналізу / Ю.В. Крак, О.В. Бармак // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2007. – № 94. – С. 12-22.
207. Бідюк П.І. Моделювання та синтез алгоритмів керування просторовою орієнтацією корпуса космічного апарата / П.І. Бідюк, О.М. Клименко, А.В. Федоров // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2007. – № 2. – С. 22-29.

208. Бидюк П.И. Метод формирования вероятностного вывода в байесовских сетях по обучающим данным / П.И. Бидюк, А.Н. Терентьев // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 3. – С. 93-99.
209. Bidyuk P.I. Bayesian network as an instrument of intelligent data analysis / P.I. Bidyuk, O.M. Terentyev, L.O. Korshevnyuk // Journal of Automation and Information Sciences. – 2007. – № 8. – P. 28-38.
210. Стецюк П.И. Об одной верхней оценке для взвешенного числа устойчивости графа / П.И. Стецюк, С.И. Бутенко, О.А. Березовский // Теория оптимальных решений. – К., 2007. – № 6. – С. 80-89.
211. Шевченко А.И. Приближенный анализ одной пространственной, конвективной задачи теплопроводности / А.И. Шевченко, А.С. Миненко // Доповіді НАН України. – 2007. – № 7. – С. 22-27.
212. Шевченко А.И. Исследование конвективного теплопереноса в одной пространственной задаче теплопроводности / А.И. Шевченко, А.С. Миненко // Доповіді НАН України. – 2007. – № 9. – С. 25-29.
213. Шевченко А.И. Об одной проблеме минимума со свободной границей / А.И. Шевченко, А.С. Миненко // Доповіді НАН України. – 2007. – № 11. – С. 29-33.
214. Киселева Е.М. Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого функционала / Е.М. Киселева, М.С. Дунайчук // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 134-152.
215. Злотник М.В. Оптимизация упаковки неориентированных составных объектов с учетом зон запрета / М.В. Злотник, Т.Е. Романова, Е.А. Ступак // Проблемы машиностроения. – 2008. – № 4(11). – С. 69-78.
216. Крак Ю.В. Інформаційна технологія розпізнавання емоційної міміки на обличчі людини / Ю.В. Крак, О.В. Бармак, Г.М. Єфімов // Штучний інтелект. – 2008. – № 1. – С. 102-109.
217. Zgurovskiy M.Z. Methods of constructing Bayesian networks based on scoring functions / M.Z. Zgurovskiy, P.I. Bidyuk, A.N. Terentyev // Cybernetics and System Analysis. – 2008. – Vol. 44, № 2. – P. 219-224.
218. Bidyuk P.I. A Comparative analysis of some forecasting methods on nonstationary processes / P.I. Bidyuk, A.V. Fedorov // Journal of Automation and Information Sciences. – 2008. – Vol. 40, № 3. – P. 59-69.
219. Герасин С.Н. Покрытие множеств и отношение толерантности / С.Н. Герасин, В.В. Шляхов, С.В. Яковлев // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 29-38.
220. Грицик В.В. Метод захисту та відтворення інформації засобами Ateb-функцій / В.В. Грицик, І.М. Дронюк, М.А. Назаркевич // Доповіді НАН України. – 2008. – № 5. – С. 48-52.

221. Грицик В.В. Оцінка якості передавання і комп'ютерна обробка даних образів / В.В. Грицик // Доповіді НАН України. – 2008. – № 9. – С. 44-48.
222. Кривонос Ю.Г. Проблеми аналізу і синтезу систем кластеризації, класифікації та прогнозу / Ю.Г. Кривонос, М.Ф. Кириченко, Ю.В. Крак // Міжнародна конференція «50 років ІК НАНУ». Праці конференції. – К., 2008. – С. 114-121.
223. Компьютерная система виртуального общения людей с проблемами слуха / Ю. Крак, О. Бармак, А. Ганджа [и др.] // Advanced Studies in Software and Knowledge Engineering. – International Book. – № 4. Supplement to the International Journal «Information technologies & Knowledge». – 2008. – Vol. 2. – P. 161-165. – (Series «Information science & Computing»).
224. Кривонос Ю.Г. Розподілене комп'ютерне документування голосових мовних фонограм / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, О.В. Бармак, О.С. Загваздін // Проблеми програмування. – 2008. – № 2-3. – С. 650-656.
225. Крак Ю.В. Використання контурних моделей на базі NURBS-кривих для аналізу мімічних виразів емоцій / Ю.В. Крак, О.В. Бармак, Г.М. Єфімов // Вісник Київського університету. Кібернетика. – 2008. – № 8. – С. 37-41.
226. Романова Т.Е. Средства математического моделирования задач покрытия / Т.Е. Романова, А.В. Кривуля // Доклады НАН Украины. – 2008. – № 9. – С. 48-52.
227. Злотник М.В. Трансляционное прямоугольное покрытие / М.В. Злотник, Т.Е. Романова, А.В. Кривуля // Доклады НАН Украины. – 2008. – № 7. – С. 48-53.
228. Packing of circles, rotating circular segments and polygons / Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, М.В. Злотник [и др.] // Проблемы машиностроения. – 2008. – Т. 11, № 1. – С. 56-62.
229. Гребенник И.В. Принятие решений в информационных системах решения задач геометрического проектирования / И.В. Гребенник, Т.Е. Романова, С.Б. Шеховцов // Бионика интеллекта. – 2008. – Вып. 1 (68). – С. 79-83.
230. Романова Т.Е. Покрытие компактной многоугольной области конечным семейством прямоугольников / Т.Е. Романова, А.В. Кривуля // Журнал вычислительной и прикладной математики. – 2007. – № 2 (95). – С. 110-119.
231. Злотник М.В. Математическая модель и метод решения задачи покрытия многоугольной области прямоугольными объектами / М.В. Злотник, Т.Е. Романова, А.В. Кривуля // Проблемы машиностроения. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 58-68.

232. Кривонос Ю.Г. Информационная система распределенного компьютерного документирования речевых фонограмм заседаний / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, А.В. Бармак, А.С. Загваздин // Управляющие системы и машины. – 2008. – № 3. – С. 46-52.
233. Кривонос Ю.Г. Інформаційна технологія невербального спілкування людей з вадами слуху / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, О.В. Бармак, А.С. Тернов // Штучний інтелект. – 2008. – № 3. – С. 325-331.
234. Киселева Е.М. Необходимые условия оптимальности для непрерывных задач разбиения множества в терминах теории функций множеств / Е.М Киселева, А.А. Жильцова // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 55-66.
235. Моделювання та аналіз мімічних проявів емоцій / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, А.В. Бармак [та ін.] // Доповіді НАН України. – 2008. – № 12. – С. 51-55.
236. Scheithauer G. Integer Linear Programming Models for the Problem of Covering a Polygonal Region by Rectangles / G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova // Radioelectronics and Informatics. – 2009. – V. 2.– P.4-13.
237. Шевченко А.И. Об одной проблеме Стефана / А.И. Шевченко, А.С. Миненко // Доповіді НАН України. – 2008. – № 1. – С. 26-30.
238. Шевченко А.І. Сучасні наукові дослідження і розробки в галузі штучного інтелекту / А.І. Шевченко // Праці міжнародної конференції : «50 років Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України». – К., 2008. – С. 100-106.
239. Стецюк П.И. О новых свойствах оценок Шора для взвешенного числа устойчивости графа / П.И. Стецюк // Праці міжнародної конференції : «50 років Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України». – К., 2008. – С. 164-173.
240. Березовский О.А. Об одном способе нахождения двойственных оценок Шора / О.А. Березовский, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 89-99.
241. Стецюк П.И. Об ЛП-ориентированных верхних оценках для взвешенного числа устойчивости графа / П.И. Стецюк, А.П. Лиховид // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1. – С. 157-170.
242. Крак Ю.В. Информационная технология для автоматического чтения по губам украинской речи / Ю.В. Крак, А.В. Бармак, А.С. Тернов // Компьютерная математика. – 2009. – № 1. – С. 86-95.
243. Kryvonos Yu. Informational technology for communication with deaf and blind people / Yu. Kryvonos, Yu. Krak // Pomiary Automatyka Komputery w gospodarce I ochronie srodowiska. – 2009. – № 1. – P. 15-17.

244. Гиль Н.И. Об одном подходе к построению выпуклой оболочки конечного множества точек в R^n / Н.И. Гиль, М.С. Софронова // Искусственный интеллект. – 2009. – № 1. – С. 30-36.
245. Киселева Е.М. Классификация нечетких задач оптимального разбиения множеств и некоторые подходы к их решению / Е.М. Киселева, О.Ю. Лебедь // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 1. – С. 40-51.
246. Романова Т.Е. Математическая модель и метод решения задачи оптимизации упаковки произвольных двумерных объектов в прямоугольных областях / Т.Е. Романова, Е.А. Ступак, М.В. Злотник // Доклады НАН Украины. – 2009. – № 1. – С.48-53.
247. Гребенник И.В. Интервальное оценивание альтернатив в задачах принятия решений / И.В. Гребенник, Т.Е. Романова, С.Б. Шеховцов // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 106-115.
248. Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований / И.В. Сергиенко, М.В. Михалевич, П.И. Стецюк [и др.] // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 26-49.
249. Грицик В.В. Опис алгоритмів паралельно-рекурсивної обробки даних в системах реального часу / В.В. Грицик // Доповіді НАН України. – 2009. – № 3. – С. 49-54.
250. Киселева Е.М. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Л.И. Лозовская, Е.В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 98-117.
251. Романова Т.Е. Покрытие компактной многоугольной области конечным семейством прямоугольников / Т.Е. Романова, А.В. Кривуля // Журнал вычислительной и прикладной математики.– 2007. – № 2 (95). – С. 110-119.
252. Математическое моделирование раскроя материалов при производстве полиграфической продукции / И.В. Гребенник, Д.В. Грицай, Т.Е. Романова [и др.] // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – 2009. – № 3 (99). – С. 38-47.
253. Романова Т.Е. Математическая модель и метод решения задачи трансляционного многоугольного включения / Т.Е. Романова, С.Б. Шеховцов, А.В. Камак // Системы обработки информации. – 2010. – Вып. 1 (82). – С. 178-182.
254. Covering a polygonal region by rectangles/ G. Scheithauer, Y.G. Stoyan, T. Romanova [et al.] // Comput. Optimiz. Appl., Springer, Netherlands, DOI 10.1007/s10589-009-9258-1

255. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems / J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan [et al.] // J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands. – 2010. – Vol. 179, № 1. – P. 343-368.
256. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – Vol. 43:5. – P. 535-553.
257. Киселева Е.М. О новых направлениях развития теории оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева // Modelare matematica optimizare si tehnologii informationale : materialele conferintei internationale, Chisinau. – 24 – 26 martie, 2010. – С. 148-152.
258. Киселева Е.М. О многопродуктовой нелинейной задаче оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, В.А. Строева // Modelare matematica optimizare si tehnologii informationale : materialele conferintei internationale, Chisinau. – 24 – 26 martie, 2010. – С. 158-161.
259. Киселева Е.М. О решении «location-allocation problem» методами оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Я.Е. Кадочникова // Modelare matematica optimizare si tehnologii informationale : materialele conferintei internationale, Chisinau. – 24 – 26 martie, 2010. – С. 153-157.
260. Стецюк П.И. Негладкий штраф и субградиентные алгоритмы для решения задачи проекции на политоп / П.И. Стецюк, Е.А. Нурминский // Кібернетика та системний аналіз. – 2010. – № 1. – С. 59-63
261. Стецюк П.И. Точная ЛП-оценка для взвешенного числа устойчивости t-совершенного графа / П.И. Стецюк, В.И. Ляшко, Е.А. Нурминский // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2009. – № 3 (99). – С. 106-115.
262. Крак Ю.В. Технологія оптимізованої передачі жестової мови в мережі Інтернет / Ю.В. Крак, А.В. Бармак, Б.А. Троценко // Проблеми програмування. – 2009. – № 3. – С 73-79.
263. Computer technology for sign language modelling / Yu. Kryvonos, Yu. Krak, O. Barmak [et al.] // Information technologies & knowledge. Institute of information Theories and Applications FOI ITHEA, Sofia, Bulgaria. – 2009. – Vol. 3. – P. 40-48.
264. Інформаційна технологія для моделювання української мови жестів / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, А.В. Бармак [та ін.] // Штучний інтелект. – 2009. – № 3. – С. 186-197.
265. Автоматизированная система стенографирования / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, А.В. Бармак [та ін.] // Штучний інтелект. – 2009. – № 3. – С. 228-233.

266. Крак Ю.В. Технологія розпізнавання елементів дактильно-жестової мови / Ю.В. Крак, Д.В. Шкільнюк // Штучний інтелект. – 2009. – № 3. – С. 564-572.
267. Крак Ю.В. Попередня вейвлет-обробка і використання методу головних компонент для вирішення задачі ідентифікації особи за фотографічним зображенням / Ю.В. Крак, К.С. Кручинін // Штучний інтелект. – 2010. – № 1. – С. 32-41.
268. Krak Iu.V. Automated system for event and meeting transcription / Iu.V. Krak, O.S. Zagvazdin // Pomiary Automatyka Komputery w gospodarce I ochronie srodowiska. – 2010. – № 3. – P. 16-19.
269. Krak Iu. The uncomputing approach to the robot-manipulator movements planning in environment with obstacles / Iu. Krak, O. Barmak // Pomiary Automatyka Komputery w gospodarce I ochronie srodowiska. – 2010. – № 3. – P. 20-24.
270. Використання багатоядерних процесорів для просторової анімації жестової мови / Ю.Г. Кривонос, Ю.В. Крак, А.В. Бармак [та ін.] // Проблеми програмування. – 2010. – № 2 – 3. – С. 561-566.
271. Моделирование реалистических движений и мимики для задач визуализации жестовой информации / Ю. Кривонос, Ю. Крак, О. Бармак [и др.] // In book : Natural and Artificial Intelligence / Ed. by K. Markov, V. Velychko, O. Voloshin. – C/o Iusautor, Sofia. – 2010. – P. 137-143.
272. Крак Ю. Исследование информационных процессов для эффективного воспроизведения дактильного жестового языка / Ю. Крак, Ю. Кривонос, Б. Троценко // In book : Information Models of Knowledge / Ed. by K. Markov, V. Velychko, O. Voloshin. – C/o Iusautor, Sofia. – 2010. – P. 262-271.
273. Бидюк П.И. Оценивание регрессионных моделей с помощью метода Монте-Карло для Марковских цепей / П.И. Бидюк, В.В. Павлов, А.С. Борисевич // Кибернетика и вычислительная техника. – 2009. – Вып. 156. – С. 40-57.
274. Бідюк П.І. Побудова системи адаптивного прогнозування фінансово-економічних процесів та її застосування : зб. наукових праць Миколаївського державного морського університету / П.І. Бідюк, А.В. Федоров. – 2009. – Вип. 104, Т. 117. – С. 119-129.
275. Бідюк П.І. Апроксимація нелінійних процесів лінійними та нелінійними моделями / П.І. Бідюк, Є.О. Демківський // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2009. – № 1 (34). – С. 25-34.
276. Бидюк П.И. Алгоритм вероятностного вывода в байесовских сетях / П.И. Бидюк, А.Н. Терентьев, Л.А. Коршевнюк // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 2. – С. 107-111.

277. Бідюк П.І. Метод адаптування імовірнісної байєсівської мережі до статистичних даних : зб. наукових праць Миколаївського державного морського університету / П.І. Бідюк, І.В. Афанасьєва, А.В. Кроптя. – 2009. – Вип. 93, Т. 106. – С. 6-16.
278. Lytvynenko V.I. Convergence analysis of immune algorithms / V.I. Lytvynenko, P.I. Bidyuk, A.A. Fefelov // International Workshop on Inductive Modeling (IWIM-2009). – 2009. – Poland, Krynica. – P. 117-129.
279. Бідюк П.І. Методи лінійного програмування у задачах формування портфеля фінансових інструментів : наукові праці Миколаївського державного морського університету / П.І. Бідюк, А.Ю. Литинська. – 2009. – Т. 117, Вип. 104. – С. 59-67.
280. Бідюк П.І. Адаптивне прогнозування процесів у системах довільної природи / П.І. Бідюк // Науковий вісник Херсонського державного морського інституту. – 2009. – № 1. – С. 209-219.
281. Бідюк П.І. Адаптивне прогнозування ФЕП на основі принципів системного аналізу / П.І. Бідюк // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2009. – № 5. – С. 54-61.
282. Бідюк П.І. Порівняльний аналіз характеристик моделей оцінювання ризиків / П.І. Бідюк, Н.В. Кузнєцова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010. – № 1. – С. 42-49.
283. Шевченко А.И. Экспериментальные исследования творческих возможностей студентов при эскизном конструировании интеллектуально-механических роботов с различным функциональным предназначением и формами исполнения / А.И. Шевченко, И.С. Сальников, А.В. Дьяченко // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 317-327.
284. Шевченко А.И. От искусственного интеллекта к искусственной личности / А.И. Шевченко, В.А. Ященко // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 492-505.
285. Шевченко А.И. Разработка интеллектуальной системы поддержки принятия управленческих решений на уровне деканата / А.И. Шевченко, А.И. Ольшевский // Искусственный интеллект. – 2009. – № 2. – С. 4-13.
286. Шевченко А.И. Проектирование системы мониторинга учебного процесса дистанционного образования на базе технологий искусственного интеллекта / А.И. Шевченко, О.А. Гудаев, С.П. Некрашевич // Искусственный интеллект. – 2010. – № 1. – С. 11-20.
287. Шевченко А.И. Многоуровневая система построения маршрута в сети дистанционного обучения / А.И. Шевченко, А.И. Ольшевский // Математические машины и системы. – Киев. – 2010. – № 1. – С. 60-67.

ПАТЕНТИ ТА АВТОРСЬКІ СВІДОЦТВА

1. Шевченко А.І., Полівцев С.О. Крокуючий рушій малогабаритного робота / Патент на винахід, № 75991.
2. Шевченко А.І., Шелєпов В.Ю., Старушко Д.Г. Спосіб розпізнавання мовленнєвих одиниць / Деклараційний патент на винахід, № 61248 А.
3. Полівцев С.О., Шевченко А.І. Синфазна система шумозаглушення / Патент на винахід, № 87510.
4. Шевченко А.І., Полівцев С.О. Система контролю і керування рухомими та стаціонарними об'єктами / Патент на винахід, № 77063.
5. Терентьєв О.М., Бідюк П.І., Коршевнюк Л.О. Пристрій для обробки слабоструктурованих даних на основі мережі Байєса / Патент України на корисну модель № 28751.
6. Рифа В.М., Долгов Д.С., Бідюк П.І. Спосіб комп'ютерної ідентифікації суб'єкта / Патент на корисну модель, № 42496.
7. Гордиенко В.И., Грицык В.В., Русын Б.П. Устройство для обработки сейсмической информации / А.С. СССР № 1005572.
8. Балицкий С.В., Гнатив Я.Н., Грицык В.В., Луцык А.Ю., Рашкевич Ю.М. Устройство для изменения темпа речевой информации / А.С. СССР № 1173438.
9. Грицык В.В., Паленичка Р.В., Пахолюк Т.П. Устройство для адаптивного сжатия информации/ А.С. СССР № 1179413.
10. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Устройство для выделения контуров изображения объектов / А.С. СССР № 1182551.
11. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Устройство для обработки изображений объектов / А.С. СССР № 1226500.
12. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Цифровой фильтр / А.С. СССР № 1244786.
13. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Устройство для адаптивного скользящего усреднения / А.С. СССР № 1283793.
14. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Устройство для вычисления порядковых статистик последовательности двоичных чисел / А.С. СССР № 1290295.
15. Батюк А.Е., Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Устройство для обработки изображения объектов / А.С. СССР № 1295427.
16. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Цифровой фильтр / А.С. СССР № 1297213.

17. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Устройство для коррекции телевизионных изображений / А.С. СССР № 1305735.
18. Грицык В.В., Паленичка Р.М., Пахолюк Т.П. Устройство для адаптивного сжатия информации / А.С. СССР № 1320827.
19. Батюк А.Е., Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Двумерный цифровой фильтр/ А.С. СССР № 1320876.
20. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.М. Цифровой фильтр / А.С. СССР № 1327281.
21. Батюк А.Е., Грицык В.В., Луцык А.Ю., Михальчишин В.Я., Паленичка Р.М. Устройство для фильтрации телевизионного сигнала / А.С. СССР № 1363534.
22. Грицык В.В., Мыхальчишин В.Я., Паленичка Р.М. Цифровой фильтр / А.С. СССР № 1385263.
23. Грицык В.В., Паленичка М.А., Паленичка Р.М. Устройство для вычисления порядковых статистик / А.С. СССР № 1444822.
24. Ахмадиев И.Ф., Батюк А.Е., Брыкин С.Г., Грицык В.В., Карпенко Н.Ю., Левицкая В.В., Луцык А.Ю., Любецкая И.Г., Паленичка Р.М., Черчык Г.Т. Устройство для передачи и приема телеметрической информации / А.С. СССР № 1481828.
25. Грицык В.В., Кисиль Б.В., Стрямец С.П., Паленичка Р.М. Матричное вычислительное устройство / А.С. СССР № 1509920.
26. Батюк А.Е., Грицык В.В., Мыхальчишин В.Я., Мыхальчишин И.В. Устройство для решения систем линейных алгебраических уравнений / А.С. СССР № 1566366.
27. Грицык В.В., Луцык А.Ю., Паленичка Р.В., Семашко А.Н. Конвейерное вычислительное устройство / А.С. СССР № 1571613.
28. Грицык В.В. и др. Устройство для распознавания образов / А.С. СССР № 650087.
29. Грицык В.В., Черчык Г.Т., Михайловский В.Н. Способ распознавания изображений / А.С. СССР № 746610.
30. Грицык В.В., Киселев В.М., Черчык Г.Т., Михайловский В.Н. Устройство для распознавания изображений / А.С. СССР № 805365.
31. Грицык В.В., Черчык Г.Т., Луцык А.Ю. Способ распознавания изображений / А.С. СССР № 935985.
32. Ажогин В.В., Романенко В.Д., Згуровский М.З., Бидюк П.И., Руденко С.С., Ренгач А.П., Шапиро И.Я., Лукьянова Г.Ю. Система автоматического управления процессом промывки барабанного вакуумного фильтра / А.С. СССР № 1107887.
33. Ажогин В.В., Демченко А.М., Бидюк П.И., Згуровский М.З., Романенко В.Д., Ренгач А.П., Шапиро И.Я., Никифорова Е.Н. Система автоматического управления тепловым режимом блока регенера-

тивных кристаллизаторов производства парафинов / А.С. СССР № 1181675.
34. Ажогин В.В., Згуровский М.З., Бидюк П.И., Демченко А.М., Романенко В.Д., Власенко Ю.Н., Шапиро И.Я., Никифорова Е.Н. Система автоматического управления блоком регенеративных кристаллизаторов в производстве парафинов / А.С. СССР № 1189474.
35. Ажогин В.В., Згуровский М.З., Бидюк П.И., Демченко А.М., Романенко В.Д., Корбич Ю.С. Якимчук Н.К., Катюшин А.И. Адаптивная система управления объектами с запаздыванием / А.С. СССР № 1297009.
36. Бидюк П.И., Никифорова Е.Н., Демченко А.М., Юркова Т.О., Евтюхова О.А., Дудина В.К. Система автоматического управления блоком кристаллизаторов в производстве парафинов / А.С. СССР № 1346179.
37. Романенко В.Д., Згуровский М.З., Бидюк П.И. Самонастраивающаяся система автоматического цифрового управления ректификационной колонной / А.С. СССР № 1316689.
38. Ажогин В.В., Демченко А.М., Бидюк П.И., Руденко С.С., Фурсова Н.К., Швачко Г.Г., Тифенбах Р.А. Устройство для автоматического управления процессом жидкостной экстракции в аппарате с перемешиванием / А.С. СССР № 1338871.
39. Руденко С.С., Згуровский М.З., Романенко В.Д., Бидюк П.И. Устройство для автоматического управления тепловым режимом установки каталитического риформинга бензинов / А.С. СССР № 1357423.
40. Руденко С.С., Бидюк П.И., Романенко В.Д. Устройство для автоматического управления тепловым режимом установки каталитического риформинга / А.С. СССР № 1447839.
41. Згуровский М.З., Бидюк П.И., Якимчук Н.К., Лещенко Е.И., Корбич Ю.С. Устройство для автоматического управления процессом обессоливания нефти / А.С. СССР № 1473795.
42. Никифорова Е.Н., Бидюк П.И., Гусакова Л.В., Дудина В.К., Демченко А.М., Ренгач А.П., Трифонов Г.М. Устройство для автоматического управления технологическими процессами нефтепереработки / А.С. СССР № 1392544.
43. Бидюк П.И., Жолнарский А.А., Згуровская Л.П. Система автоматического управления процессом окисления кремния / А.С. СССР № 1602859.
44. Стоян Ю.Г., Деревцов В.К., Мазур В.В., Гиль Н.И. Устройство для определения опорной функции двумерной геометрической фигуры / А.С. СССР № 561187.

45. Стоян Ю.Г., Попов В.Л., Мазур В.В., Гиль Н.И. Устройство для построения годографа функции плотного размещения двумерных геометрических фигур / А.С. СССР № 613642.
46. Гіль М. І., Софронова М.С. Комп'ютерна програма «Packing of n-parallelepipeds» / Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 14099. Державний департамент інтелектуальної власності МОН України.
47. Гіль М.І., Панкратов О.В., Софронова М.С. Комп'ютерна програма «Packing of n-polytopes» / Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 18166. Державний департамент інтелектуальної власності МОН України.
48. Стоян Ю.Г., Гіль М.І., Романова Т.Є., Придатко Д.І. Комп'ютерна програма «Дослідницька система SC Ф-function 2D» / Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 7450. Державний департамент інтелектуальної власності МОН України.
49. Стоян Ю.Г., Гіль М.І., Романова Т.Є., Придатко Д.І. Комп'ютерна програма «Дослідницька система SC Ф-function 3D» / Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 7451. Державний департамент інтелектуальної власності МОН України.
50. Романова Т.Є., Ступак К.А., Злотник М.В. Комп'ютерна програма «Packing of circles, rotating circular segments and polygons» / Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 24575. Державний департамент інтелектуальної власності МОН України.
51. Стоян Ю.Г., Романова Т.Є., Кривуля Г.В., Злотник М.В. Комп'ютерна програма «Translational polygonal containment» / Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 24580. Державний департамент інтелектуальної власності МОН України.
52. Стоян Ю.Г., Романова Т.Є., Кривуля Г.В., Злотник М.В. Комп'ютерна програма «Translational polygonal covering» / Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 24581. Державний департамент інтелектуальної власності МОН України.