ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА ЭЛЛИПСОИДОВ

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев

VI ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ
"ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ"
19-21 березня 2015 року, м. Полтава

Содержание

Содержание

Метод эллипсоидов предложили

1976 **Юдин Д.Б. и Немировский А.С.** как метод последовательных отсечений [1].

1977 **Шор Н.З.** как вариант метода с растяжением пространства в направлении субградиента [2].

1. Юдин Д.Б., Немировский А.С. *Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач* // Экономика и математические методы. – 1976. – Вып. 2. – С. 357–369.

2. Шор Н.З. *Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования* // Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.

На основе метода эллипсоидов

1979 **Хачиян Л.** построил первый полиномиальный алгоритм решения задачи ЛП с рациональными коэффициентами

1981 **Grötchel M., Lóvasz L., Schrijver A.** разработали полиномиальные алгоритмы для ряда задач дискретной оптимизации

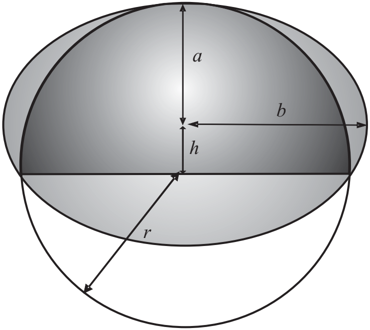
XI симпозиум по мат. программированию

Метод эллипсоидов и полученные на его основе результаты о сложности задач математического программирования были центральными на XI международном симпозиуме по математическому программированию (Бонн, ФРГ, август 1982).

3. Канторович Л.В., Михалевич В.С., Рубинштейн Г.Ш., Третьяков Н.В., Шор Н.З., Якимец В.Н. *XI Международный симпозиум по математическому программированию* // Техническая кибернетика. – М.: Изв. АН СССР. – 1983. – № 1. – С. 197–201.

Содержание

1-d эллипсоид и его свойства



Эллипсоид $\mathcal{E}_n$, содержащий полушар в E^n, имеет параметры

$$b = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{r}{2}, \quad h = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r}{2},$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$ и r – радиус шара S_n.

Если пространство „растянуть“ с коэффициентом α в направлении полуоси a, то $\mathcal{E}_n$ станет шаром в преобразованном пространстве.

Отношение объема эллипсоида $\mathcal{E}_n$ к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Оператор растяжения пространства

Введен Н.З. Шором (1969) и имеет следующий вид

$$R_\alpha(\xi) = I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \quad \text{где} \quad \alpha > 1.$$

Здесь: α – коэффициент растяжения пространства в нормированном направлении $\xi \in E^n$, $\|\xi\| = 1$, I_n – единичная матрица размером $n \times n$.

В методах используется обратный к нему оператор

$$R_\beta(\xi) = I_n + (\beta - 1)\xi\xi^T, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1,$$

который означает "сжатие"пространства субградиентов.

Почему метод эллипсоидов сходится?

Отношение объема эллипсоида $\mathcal{E}_n$ к объему шара S_n равно

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Если коэффициент α такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$, то отношение $q(n) < 1$ и объем эллипсоида, в котором локализуется искомая точка x^*, убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q(n)$.

Содержание

Метод эллипсоидов предназначен

для решения такой задачи:

На E^n $(n \geq 1)$ определено векторное поле $g(x)$, $g(x) \in E^n$.

Требуется найти точку x^*, такую, что $(g(x), x - x^*) \geq 0$ для всех $x \in E^n$.

Предполагается, что x^* существует и $g(x) \neq 0$ для $x \neq x^*$.

К ней сводятся задачи математического программирования:

- задача безусловной минимизации выпуклой функции,
- общая задача выпуклого программирования,
- задача о седловой точке выпукло-вогнутых функций.

Стартовые условия для МЭ

Задан:

коэффициент α такой, что $\alpha + 1/\alpha < 2\sqrt[n]{\alpha}$.

Инициализация:

Выберем стартовую точку $x_0 \in E^n$ и радиус r_0 такими, чтобы $\|B_0^{-1}(x_0 - x^*)\| \leq r_0$, где B_0 – $(n \times n)$-матрица.

Перейдем к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0.

Собственно сам алгоритм

Пусть на k-й итерации найдены $x_k \in E^n$, r_k и B_k.

Шаг 1. Вычислим $g(x_k)$. Если $g(x_k) = 0$, то ОСТАНОВ($x^* = x_k$). Иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычислим очередную точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k, \text{ где } h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right), \ \xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}.$$

Шаг 3. Пересчитаем матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}

$$B_{k+1} := B_k + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(B_k \xi_k)\xi_k^T, \quad r_{k+1} := \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) r_k.$$

Шаг 4. Переходим к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, r_{k+1} и B_{k+1}.

О сходимости метода эллипсоидов

Теорема (локализация x^* в эллипсоиде меньшего объема)

Генерируемая методом эллипсоидов последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \le r_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

а объем эллипсоида $\mathcal{E}_k = \{x : \|B_k^{-1}(x_k - x)\| \le r_k\}$, содержащего точку x^*, уменьшается на постоянную величину, равную

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_{k+1})}{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

О двух вариантах метода эллипсоидов

В методе эллипсоидов Юдина-Немировского-Шора

$$q(n) = 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{и реализуется при} \quad \alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

В приближенном методе эллипсоидов [4]

$$q(n) \approx 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{и реализуется при} \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}.$$

Если $n = 1$, то $q(1) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$.

4. Стецюк П.И. *Приближенный метод эллипсоидов* // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 141–146.

Содержание

octave-функция emshor (ellipsoid method shor)

```
# octave-code for emshor (version 1.0, 13.09.2013)      #row00
# находит точку минимума выпуклой функции f(x)          #row00a
% Входные параметры:                                    #row00b
% calcfg - имя функции calcfg(x): вычисляет f и g(1:n) #row00c
% x  - начальная точка x0(1:n) (на выходе портится)     #row00d
% rad - радиус шара с центром в точке x0                #row00e
% epsf - точность останова по значению функции          #row00f
% maxitn - максимальное количество итераций             #row00g
% Выходные параметры:                                   #row00h
% xr -- точка минимума (рекордная)                      #row00i
% fr -- значение функции в точке xr                     #row00j
% ist -- код останова (1 = epsf, 4 = maxitn)            #row00k
function [xr,fr,ist]=emshor(calcfg,x,rad,epsf,maxitn); #row01
dn=float(length(x)); beta=sqrt((dn-1.d0)/(dn+1.d0));   #row02
radn=rad; B=eye(length(x)); fr=inf; ist=4;             #row03
for (itn = 0:maxitn)                                   #row04
   [f, g1] = calcfg(x); g=B'*g1; dg=norm(g);           #row05
   if (f < fr)  fr = f; xr = x; itr=itn; endif         #row06
   if(radn*dg < epsf) ist = 1;  return; endif          #row07
   xi=(1.d0/dg)*g; dx = B * xi; hs=radn/(dn+1.d0);     #row08
   x -= hs * dx;  B += (beta - 1) * B * xi * xi';      #row09
   radn=radn/sqrt(1.d0-1.d0/dn)/sqrt(1.d0+1.d0/dn);    #row10
   printf("itn %4d itr %4d f %16.8e fr %16.8e\n",      #row11
          itn,itr,f,fr);
endfor                                                 #row12
endfunction                                            #row13
```

Что находит программа emshor?

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, x^* – точка минимума,
$f^* = f(x^*)$, x_0 – начальное приближение.

Теорема (о программе emshor)

Если x_0 такое, что $\|x_0 - x^*\| \leq rad$, то программа **emshor** заканчивает работу выполнением одного из условий:

1. найдена точка x_r – такая, что $f(x_r) - f^* \leq \varepsilon_f$ (ist=1),
2. **maxitn** итераций оказалось недостаточно (ist=4).

octave-функция emshor (комментарии)

```
# octave-code for emshor (version 1.0, 13.09.2013)      #row00
# находит точку минимума выпуклой функции f(x)          #row00a
% Входные параметры:                                    #row00b
% calcfg - имя функции calcfg(x): вычисляет f и g(1:n) #row00c
% x   - начальная точка x0(1:n) (на выходе портится)    #row00d
% rad - радиус шара с центром в точке x0                #row00e
% epsf - точность останова по значению функции          #row00f
% maxitn - максимальное количество итераций             #row00g
% Выходные параметры:                                   #row00h
% xr -- точка минимума (рекордная)                      #row00i
% fr -- значение функции в точке xr                     #row00j
% ist -- код останова (1 = epsf, 4 = maxitn)            #row00k
```

octave-функция emshor (код программы)

```
function [xr,fr,ist]=emshor(calcfg,x,rad,epsf,maxitn); #row01
dn=float(length(x)); beta=sqrt((dn-1.d0)/(dn+1.d0));   #row02
radn=rad; B=eye(length(x)); fr=inf; ist=4;             #row03
for (itn = 0:maxitn)                                   #row04
   [f, g1] = calcfg(x); g=B'*g1; dg=norm(g);           #row05
   if (f < fr)  fr = f; xr = x; itr=itn; endif         #row06
   if(radn*dg < epsf) ist = 1;  return; endif          #row07
   xi=(1.d0/dg)*g; dx = B * xi; hs=radn/(dn+1.d0);     #row08
   x -= hs * dx;  B += (beta - 1) * B * xi * xi';      #row09
   radn=radn/sqrt(1.d0-1.d0/dn)/sqrt(1.d0+1.d0/dn);    #row10
   printf("itn %4d itr %4d f %16.8e fr %16.8e\n",      #row11
          itn,itr,f,fr);
endfor                                                 #row12
endfunction                                            #row13
```

Выводы:

Настоящее:

На основе метода эллипсоидов можно построить „короткие“ алгоритмы и гарантировать их сходимость со скоростью геометрической прогрессии.
Однако скорость сходимости будет уменьшаться с ростом количества переменных.

Будущее:

Обеспечить эффективность методов эллипсоидов для задач больших размеров можно за счет „ускоренных“ вариантов методов эллипсоидов, которые используют не одно, а нескольких отсечений.

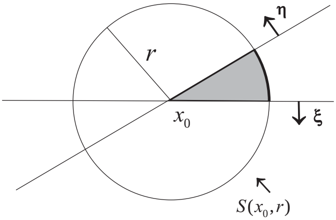
Благодарности

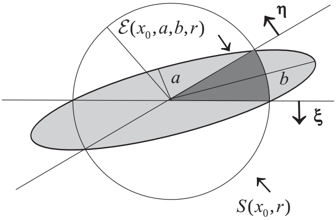
Работа выполнена при поддержке НАН Украины, проект №0114U001055

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

BACK UP SLIDES: Тело W и 2d-эллипсоид





Тело W получено как пересечение шара и двух полупространств.

2d-эллипсоид содержит W и имеет минимальный объем.

Стецюк П.И. r-алгоритмы и эллипсоиды // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 113–134.

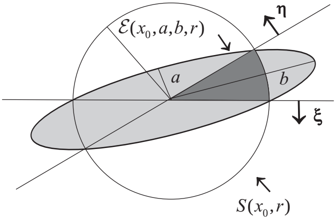
BACK UP SLIDES: Свойства 2d-эллипсоида

1. Если угол φ между векторами ξ и η тупой, то 2d-эллипсоид содержит тело W.

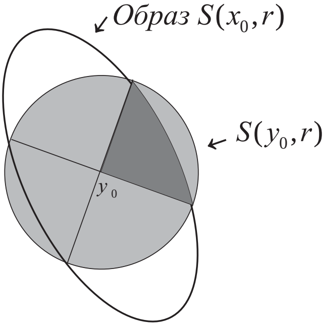
2. Объем 2d-эллипсоида меньше, чем объем шара, и это уменьшение равно $\sqrt{1-(\xi,\eta)^2} = \sqrt{1-(\cos\varphi)^2}$.

3. Преобразовать 2d-эллипсоид в шар можно растяжением пространства в направлении $\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}$ с коэффициентом $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}}$ и сжатием пространства в ортогональном направлении $\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}$ с коэффициентом $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}}$.

BACK UP SLIDES: 2d-эллипсоид до и после ...



2d-эллипсоид



в преобразованном пространстве становится шаром