ДВЕ ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕМ k-ВЕРШИННОМ ЦИКЛЕ

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев

XIII Міжнародна науково-практична конференція
"Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем"
18-20 листопада 2015 року, м. Дніпропетровськ

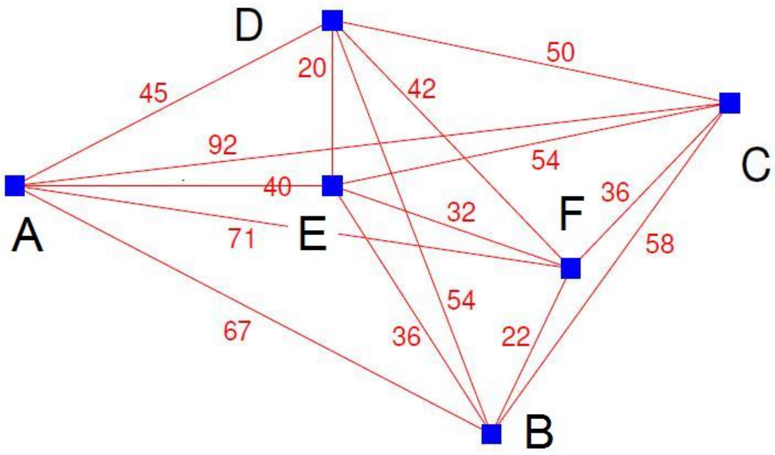
Содержание

Содержание

Задача: винный маршрут Львов–Вроцлав

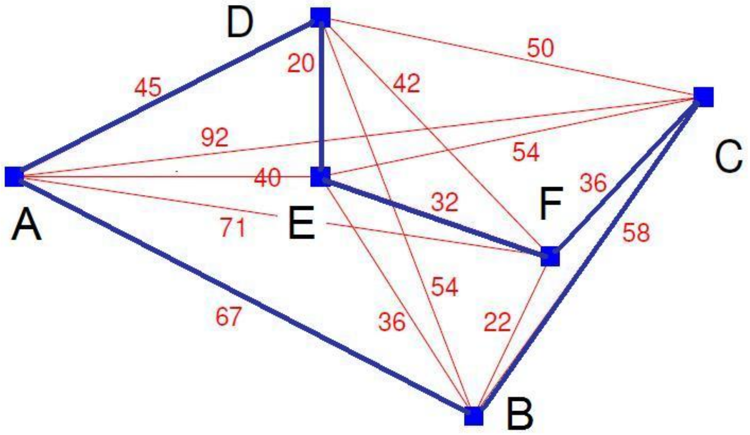
Как доехать из Львова до Вроцлава по кратчайшему пути, посетив 5 пунктов из 20 пунктов виноделия Малопольской винной дороги?

Пример: Полный граф $D_{6,6}$ (6 вершин)



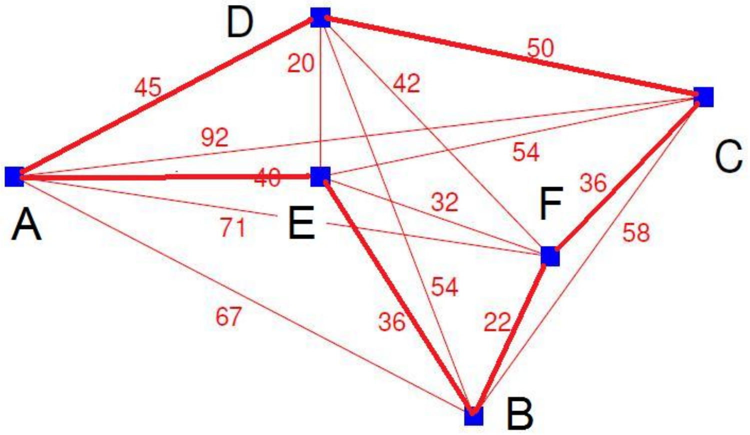
Обозначения: d_{ij} – длина дуги от вершины i к вершине j

Гамильтонов цикл в графе $D_{6,6}$ (длина 258)



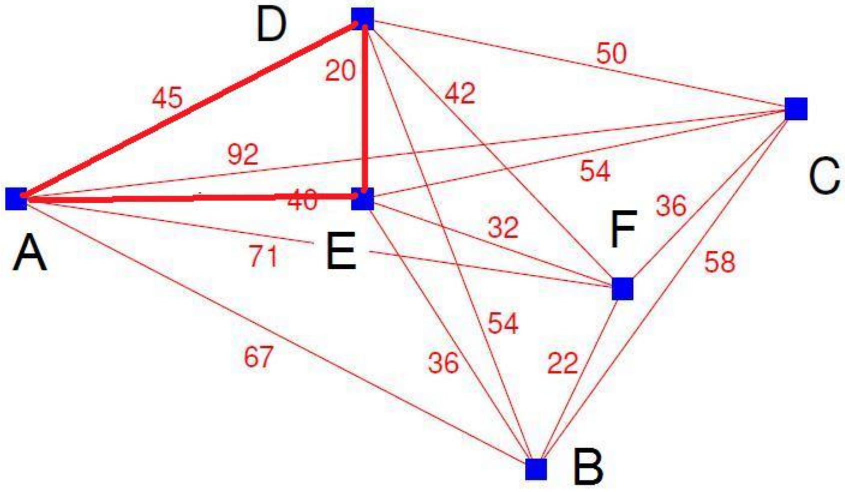
Гамильтонов цикл – замкнутый путь, который проходит через все вершины графа.

Кратчайший гамильтонов цикл (длина 229)

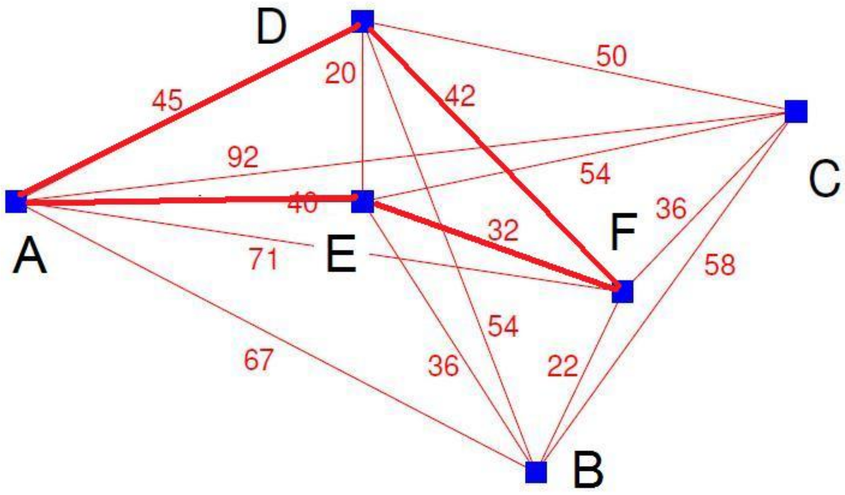


Гамильтонов цикл минимальной длины совпадает с решением задачи коммивояжера

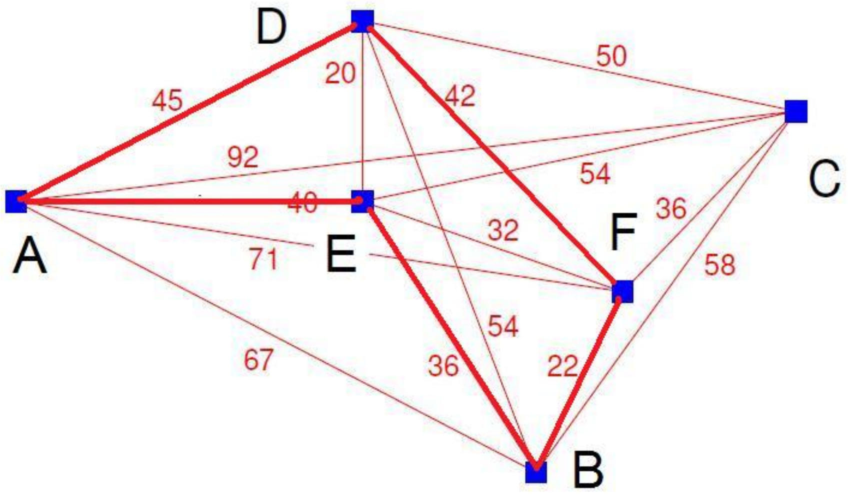
Пример: подцикл ADEA в $D_{6,6}$



Пример: подцикл ADFEA в $D_{6,6}$



Пример: подцикл ADFBEA в $D_{6,6}$



Содержание

Что такое k-вершинный цикл?

Заданы:

$D_{n,n}$ – полный граф, где n – количество вершин
$d_{ij} > 0$ – расстояние между вершинами i та j, $i \neq j$
s – вершина, в которой начинается и завершается цикл

k-вершинный цикл $(1 \leq k \leq n-1)$

это цикл, который проходит через k вершин графа $D_{n,n}$ (вершина s не считается)

$(n-1)$-вершинный цикл есть гамильтоновым циклом

(проходит через все вершины графа $D_{n,n}$)

Булевы переменные

Переменные: $n(n-1) \quad + \quad (n-1)$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (i,j) \text{ включается в цикл,} \\ 0, & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если цикл проходит через вершину } i, \\ 0, & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

Общие ограничения для k-вершинного цикла

Общие ограничения: $2 \quad + \quad 2(n-1) + \quad 1$

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} x_{sj} = 1, \qquad \sum_{j=1, j\neq s}^{n} x_{js} = 1, \tag{A1}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = y_i, \qquad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n, i \neq s, \tag{A2}$$

$$\sum_{i=1, i\neq s}^{n} y_i = k, \tag{A3}$$

(A1) описывают однократный вход (выход) для вершины s;
(A3) задает ровно k вершин, через которые проходит цикл;
(A2) описывают однократный вход (выход) для вершин $y_i = 1$.

Ограничения (A1)-(A3)

для гамильтонового цикла переходят в $2n$ ограничений

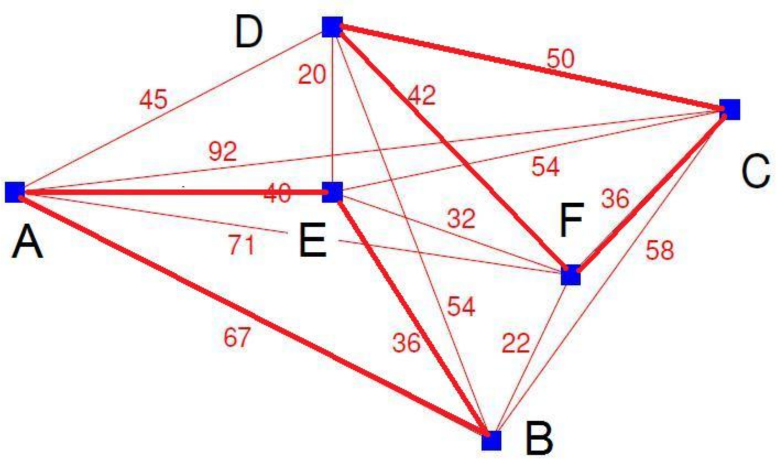
$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (A4)$$

Они есть ограничениями задачи о назначениях.

Проблема для ограничений (A1)-(A3) и (A4):

допустимые решения для них могут содержать подциклы.

Пример: два подцикла в графе $D_{6,6}$



AEBA – первый подцикл, DCFD – второй подцикл.

Чтобы обеспечить связность k-вершинного

цикла, т.е. избежать подциклов в графе $D_{n,n}$,

в первой формулировке задачи будем

использовать идею моделирования задачи о потоке,

а во

второй формулировке задачи будем

использовать ограничения, аналогичные тем, которые построены Таккером для задачи коммивояжера.

Содержание

Формулировка задачи

найти

$$d_k^* = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях (A1)–(A3) и ограничениях

$$z_{ij} - k x_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \tag{$B1$}$$

$$\sum_{j=1, j \neq s}^{n} z_{sj} = k, \tag{$B2$}$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} z_{ji} = -y_i, \quad i \neq s, \tag{$B3$}$$

$$y_i = 0 \vee 1, x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \geq 0. \tag{$1a$}$$

Характеристика задачи (1)–(1a)

Задача (1)–(1a)

является задачей смешанного булевого линейного программирования.

Минимизация целевой линейной функции в (1) отвечает

нахождению k-вершинного цикла минимальной длины d_k^*

Ограничения (A1)–(A3) и (B1)–(B3)

описывают все возможные k-вершинные циклы в графе $D_{n,n}$ (вершина s не учитывается)

Почему нет подциклов в графе $D_{n,n}$?

Здесь

переменная $z_{ij} \geq 0$ задает величину потока некоторого продукта от вершины i к вершине j

а задача о потоке моделируется так:

Ограничения (B1) обеспечивают перевозку продукта между вершинами i и j только тогда, если $x_{ij} = 1$.

Ограничения (B2) и (B3) означают, что из вершины s необходимо вывезти k единиц продукта, оставляя в каждой из вершин цикла лишь одну единицу продукта.

Частный случай задачи (1)–(1a)

Если $k = n - 1$,

то получаем задачу для кратчайшего гамильтонового цикла, которая совпадает с формулировкой задачи коммивояжера в [1], стр. 46.

1. *Алексеева Е.В.* Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Е.В. Алексеева. – Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 131 с.

Содержание

Формулировка задачи

найти

$$d_k^* = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{2}$$

при ограничениях (A1)–(A3) и ограничениях

$$u_i - u_j + k x_{ij} \leq k - 1, \quad i \neq s, j \neq s, i \neq j, \tag{C1}$$

$$y_i = 0 \vee 1,\ x_{ij} = 0 \vee 1,\ 0 \leq u_i \leq k - \text{целые.} \tag{2a}$$

Здесь

связность k-вершинного цикла обеспечивают целочисленные переменные u_i, значения которых соответствуют номеру шага, на котором посещается вершина i.

Характеристика задачи (2)–(2a)

Задача (2)–(2a)

есть задачей целочисленного линейного програмирования.

Минимизация целевой линейной функции в (1) отвечает

нахождению k-вершинного цикла минимальной длины d_k^*

Ограничения (A1)–(A3) и (C1)

описывают все возможные k-вершинные циклы в графе $D_{n,n}$ (вершина s не учитывается)

Почему нет подциклов в графе $D_{n,n}$?

Допустим, что имеется два цикла. Один из них не проходит через вершину s. Обозначим его $(i_1, \ldots, i_p, i_1)$. Из ограничений (C1) следует, что для каждой пары вершин, идущих по порядку в этом цикле, справедливы следующие неравенства:

$$u_{i_1} - u_{i_2} + k \leq k - 1,$$

$$u_{i_2} - u_{i_3} + k \leq k - 1,$$

$$\ldots$$

$$u_{i_p} - u_{i_1} + k \leq k - 1.$$

Сложив эти неравенства, получим $pk \leq p(k-1)$, что невозможно при $p \neq 0$. Следовательно, для любого подцикла, не проходящего через вершину s, ограничения (C1) не выполняются.

Частный случай задачи (2)–(2a)

Если $k = n - 1$, то получаем задачу коммивояжера,

отличную от приведенных в [1, стр. 45] и [2, стр. 65], где связность маршрута, проходящего через городов (вершин), обеспечивается на основе условий Таккера:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \quad i \neq s, j \neq s, i \neq j,$$

Они используют на одну вершину больше, чем требуется для цикла, который не проходит через вершину s.

2. *Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И.* Исследование операций. Том II. – Кишинэу, Эврика, 2008. – 592 с.

Содержание

О сложности задач (1)–(1a) и (2)–(2a)

Если k большое, то

задача поиска кратчайшего k-вершинного цикла сложнее, чем задача поиска кратчайшего гамильтонового цикла.

Это обусловлено тем, что нужно определить подмножество вершин, для которой буде найден гамильтонов подцикл.

Это подтверждают расчеты для семи задач коммивояжера с библиотеки **TSPLIB**. Проводились на **NEOS**-сервере с помощью программы **gurobi 5.5.0**.

gurobi 5.5.0 для задач с библиотеки TSPLIB

Задача	n	d^*	$t(sec)$		k	d_k^*	$t(sec)$
st70.tsp	70	675	14.33	+	35	268	23.58
eil76.tsp	76	538	11.29	–	38	219	11.55
kroA100.tsp	100	21282	105.80	–	50	9427	1194.46
kroB100.tsp	100	22141	75.27		50	9307	752.97
kroD100.tsp	100	21294	221.15	+	50	8929	1268.61
kroE100.tsp	100	22068	118.21		50	9312	644.35
eil101.tsp	101	629	29.57	–	50	232	133.16

Результаты решения задачи (1)–(1a)

при $k=n-1$ (задача коммивояжера) – в колонках 3, 4 та 5,
при $k = n/2$ та $s = 1$ – в колонках 6, 7, 8.

Что видим из таблицы?

Задача	n	d^*	$t(sec)$		k	d^*_k	$t(sec)$
st70.tsp	70	675	14.33	+	35	268	23.58
eil76.tsp	76	538	11.29	–	38	219	11.55
kroA100.tsp	100	21282	105.80	–	50	9427	1194.46
kroB100.tsp	100	22141	75.27		50	9307	752.97
kroD100.tsp	100	21294	221.15	+	50	8929	1268.61
kroE100.tsp	100	22068	118.21		50	9312	644.35
eil101.tsp	101	629	29.57	–	50	232	133.16

Поиск k-вершинного цикла требует больше затрат по времени, чем задача коммивояжера. Так, например, для графа **kroA100.tsp** они больше в десять раз.

Выводы:

1. Сформулированы две задачи для нахождения кратчайшего цикла, проходящего через заданное количество вершин графа.
2. Их частные случаи дают известные формулировки задач коммивояжера.
3. Задачи могут быть адаптированы для определения оптимальных маршрутов при планировании пассажирских и грузовых автомобильных перевозок.

Литература:

1. *Алексеева Е.В.* Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие / Е.В. Алексеева. – Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. – 131 с.

2. *Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И.* Исследование операций. Том II. – Кишинэу, Эврика, 2008. – 592 с.

3. *Стецюк П.И.* Формулировки задач для кратчайшего k-вершинного пути и кратчайшего k-вершинного цикла в полном графе // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 1. (в печати).

Подяки

Робота виконана при фінансовій підтримці НАН України (проект № 0113U003146).

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!