ВНЕШНЯЯ И ИДЕЙНАЯ СХОЖЕСТЬ ШОРА И ЭЙНШТЕЙНА

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

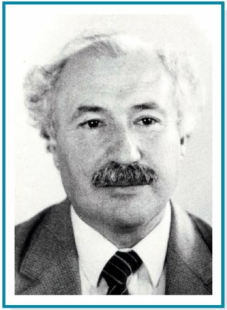
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев

XII ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ФЕСТИВАЛЬ НАУКИ,
присвячений 100-річчю НАН України
17 травня 2018 року, м.Київ

Content

Content

Шор Наум Зуселевич (1937 – 2006)



Основоположник научной школы методов негладкой оптимизации Института кибернетики НАНУ.

В 1962 году разработал первый субградиентный метод.

В 1969 году предложил использовать линейные неортогональные преобразования пространства для улучшения обусловленности овражных функций.

Юбилейная статья (январь, 2012)

75-летию со дня рождения Н.З. Шора посвящена статья

Сергиенко И.В., Стецюк П.И.

О трех научных идеях Н.З. Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2012, № 1. – С. 4–22.

В статье описаны три центральные идеи Н.З. Шора:

обобщенный градиентный спуск (1962),
использование линейных преобразований пространства для улучшения обусловленности овражных функций (1969),
двойственный подход к получению и уточнению оценок целевой функции в невыпуклых квадратичных моделях (1985).
Приведены методы и алгоритмы, разработанные на их основе в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

Content

Статья в газете „Сегодня“, 28 декабря 2002 года

ПОЕХАЛ В ГРЕЦИЮ, а чемодан остался в Венгрии...

Академик НАН Украины профессор Наум Шор, родившийся 1 января 1937 года, имеет железную логику и ясный ум. Он 44 года без перерыва работает в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова. Сегодня занимает там должность заведующего отделом методов решения сложных задач оптимизации.

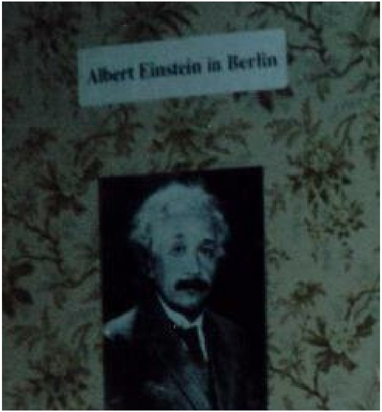
Коллеги из Швейцарии пригласили ученого в музей Эйнштейна в Берне, чтобы сделать это фото и подчеркнуть их сходство

– Что обо мне писать? — засмущался Наум Зуселевич. — Я живу: с работы домой и обратно. Все мои 66 лет забрала математика. Мне повезло, дипломной работой по диффе-

комился 40 лет назад, 1 января 1963 года. Звезды расположились так, что и она Козерог, родилась 9 января. А вот дети — сын и дочь — оба Раки. Гороскоп кошки Алисы не проверяли, достаточно того, что

Фотография (Ж.Ф. Эмменеггер, Берн, 1997)

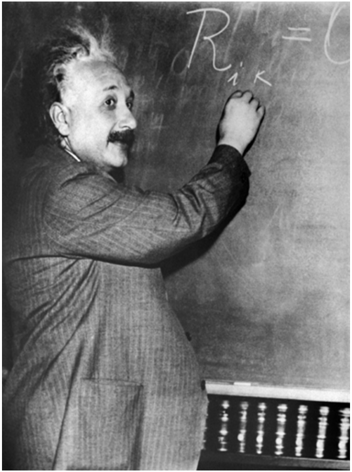
И еще о внешней схожести, но уже помоложе ...

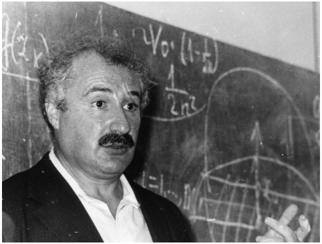


Альберт Ейнштейн в Берлине.

Наум Шор в Киеве.

Эйнштейн пишет послание Шору ...





„… чтобы символом $R_\alpha(\xi)$ он обозначил свой оператор растяжения пространства"

Content

О сходстве идей ... или что общего?

между

оператором Шора для растяжения пространства

$$R_\alpha(\xi) = I + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \qquad \text{где} \qquad \alpha > 1, \qquad (1)$$

(I – единичная $n\times n$-матрица, вектор $\xi \in E^n$ такой, что $\|\xi\|=1$)

и

формулой Ейнштейна для энергии в релятивистской динамике

$$E = mc^2, \qquad \text{где} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (2)$$

Шар S_n и эллипсоид $\mathcal{E}_n$ в пространстве E^n

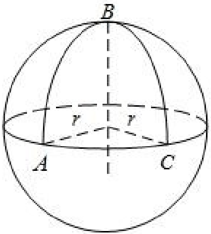
В преобразованном (т.е. в растянутом в направлении ξ с коэффициентом $\alpha = 1/\beta > 1$) пространстве $y = R_\alpha(\xi)x$ образом шара $S_n = \{x \in E^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ с радиусом r является эллипсоид $\mathcal{E}_n = \{y \in E^n : \|R_\beta(\xi)(y - y_0)\| \leq r\}$.

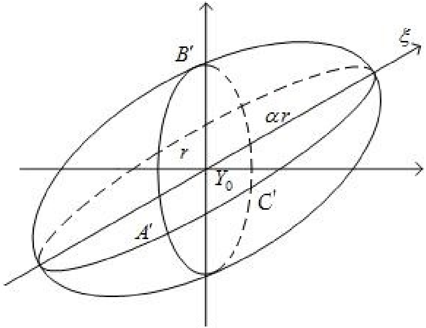
Объемы шара S_n и эллипсоида $\mathcal{E}_n$ равны

$$\mathrm{vol}(S_n) = v_0 r^n \qquad \text{и} \qquad \mathrm{vol}(\mathcal{E}_n) = \frac{v_0 r^n}{\det R_\beta(\xi)},$$

где v_0 – объем единичного n-мерного шара.

Пример: шар S_3 и эллипсоид $\mathcal{E}_3$





После растяжения пространства в направлении $\xi \in E^3$ шар (слева) является эллипсоидом (справа)

Соотношение объемов шара S_n и эллипсоида $\mathcal{E}_n$

Отношение объемов $\mathcal{E}_n$ и S_n вычисляется по формуле

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{\frac{v_0 r^n}{\det R_\beta(\xi)}}{v_0 r^n} = \frac{1}{\det R_\beta(\xi)} = \frac{1}{\beta} = \alpha > 1,$$

где v_0 – объем единичного n-мерного шара.

Его можно переписать так

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n) = \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\beta} = \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\sqrt{1-(1-\beta^2)}} \tag{3}$$

Связь обьемов с формулой Эйнштейна

Из (3) следует

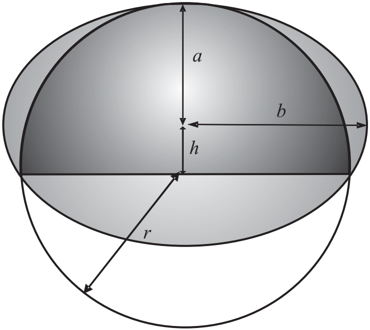
$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n) = \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\sqrt{1-(1-\beta^2)}} \quad .=. \quad \frac{\mathrm{vol}(S_n)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad \text{(Shor)}$$

Чем не m? в формуле Эйнштейна (2) ...

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \text{(Einstein)}$$

Content

Оптимальный 1d-эллипсоид (Шор, 1977)



Эллипсоид $\mathcal{E}_n$, содержащий полушар в E^n, имеет минимальный обьем, если

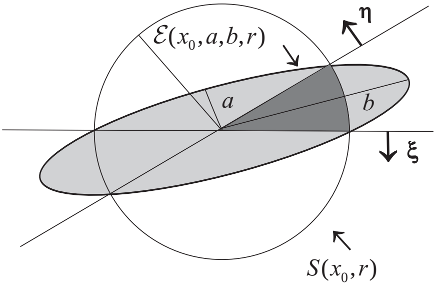
$$a = \frac{n}{n+1} r,\ \ b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} r,\ \ h = \frac{1}{n+1} r.$$

Чтобы преобразовать $\mathcal{E}_n$ в шар нужно растянуть пространство с коэффициентом $\alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$.

На каждой итерации МЭ объем эллипсоида уменьшается в

$$q(n) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}_n)}{\mathrm{vol}(S_n)} = \frac{a}{r}\left(\frac{b}{r}\right)^{n-1} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n \leq 1 - \frac{1}{2n},$$

Оптимальный 2d-эллипсоид (Стецюк, 1996)



Преобразование в шар требует растяжения

в направлении $\frac{\xi-\eta}{\|\xi-\eta\|}$

с коэф. $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\xi,\eta)}} > 1$

и последующего сжатия

в направлении $\frac{\xi+\eta}{\|\xi+\eta\|}$

с коэф. $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\xi,\eta)}} < 1.$

$$q = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{E}(x_0,a,b,r))}{\mathrm{vol}(S(x_0,r))} = \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right) = \sqrt{1-(\xi,\eta)^2}.$$

Content

С Новым годом (к r-алгоритмам Шора)

Замечательное свойство r-алгоритма заключается в том, что его конкретные реализации показывают очень хорошие результаты при минимизации овражных и существенно овражных выпуклых функций (гладких и негладких).


Добрых перемен и интересных начинаний в 2012 году,
а значимые даты пусть вдохновят на новые идеи
в оптимизации
НДО
75 лет
Н.З.Шор
(01.01.1937)
Б.Н.Пшеничный
(24.04.1937)
Теорема 1. Пусть $x_ш=x_п=75$ и $x_к=x_ч=100$.
Тогда следующая формула
$\frac{1}{2}\max\left\{\frac{X_к}{X_к-X_ш},\frac{X_ч}{X_ч-X_п}\right\}\le\alpha\le\frac{1}{2}\min\left\{\frac{X_к+X_ч}{X_к-X_ш},\frac{X_к+X_ч}{X_ч-X_п}\right\}$
позволяет выбирать в r-алгоритмах
коэффициент растяжения пространства
из условия: $\alpha\in[2,4]$.
ЛП
100 лет
Л.В.Канторович
(19.01.1912)
С.Н.Черников
(11.05.1912)
С Новым Годом !

Со Старым Новым годом (к методам ОГСРП)

Первые эксперименты показали, что, выбирая $\alpha_k = 2$ и $h_k = \text{const}$, для многих примеров выпуклых овражных функций можно получить хорошие результаты (Шор и Билецкий,1969).

С Первым мая (к теореме Пшеничного)

Теорема 2.14 (Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации, 1983) позволяет при конечных значениях штрафных параметров получать задачу безусловной минимизации, полностью эквивалентную задаче выпуклого программирования

С праздником Победы (9 мая)

Методы НДО являются перспективной вычислительной альтернативой принципу граничных решений Черникова для совместной конечной системы линейных неравенств

Заключение

Вполне может оказаться, что растяжение пространства (масштабирование) по Шору поможет „снять“ или „прояснить“ некоторые вопросы из теории относительности Эйнштейна.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!