

ПОИСК ДЕФЕКТОВ В РЕГУЛЯРНЫХ 3D-СТРУКТУРАХ

Стецюк П.И., Савицкий В.В.
stetsyuk@gmail.com, viktor.savitsky@gmail.com

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев
Институт электросварки имени Е.О. Патона, Киев

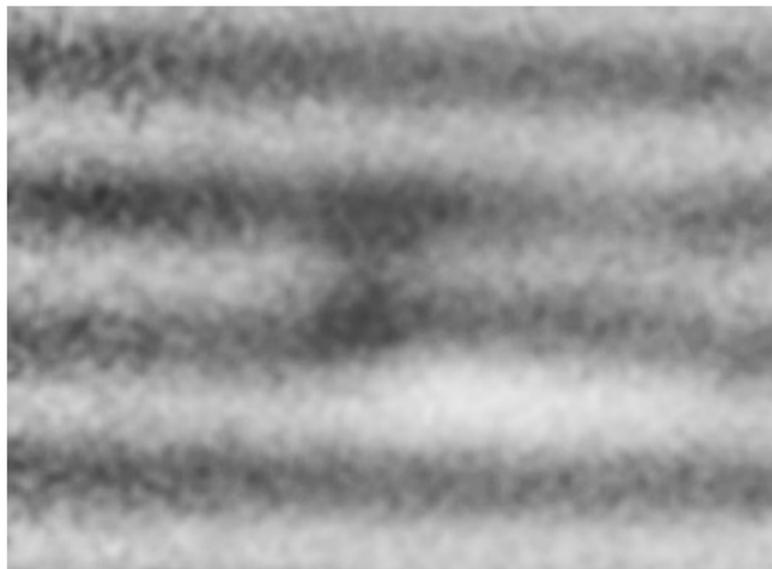
Семинар "ОБРАЗНЫЙ КОМПЬЮТЕР"
16 января 2018 года, г. Киев

- 0 Откуда появилась задача?
- 1 Наилучшая L_p -норма и негладкая оптимизация
- 2 Ошибочные измерения и МНМ
- 3 3D-структуры (регулярная и с дефектами)
- 4 Робастность МНМ для нахождения дефектов
- 0 Что далее?

Содержание

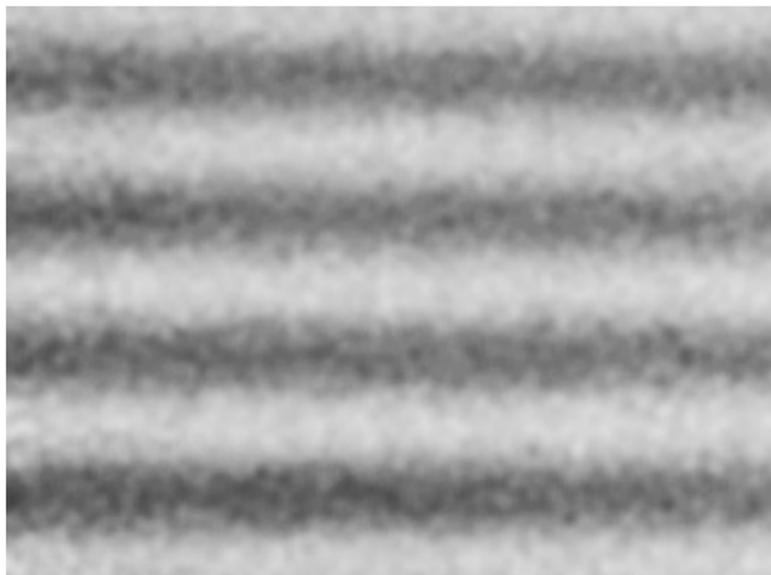
- 0 Откуда появилась задача?
- 1 Наилучшая L_p -норма и негладкая оптимизация
- 2 Ошибочные измерения и МНМ
- 3 3D-структуры (регулярная и с дефектами)
- 4 Робастность МНМ для нахождения дефектов
- 0 Что далее?

Имеется регулярное изображение с „дефектом“



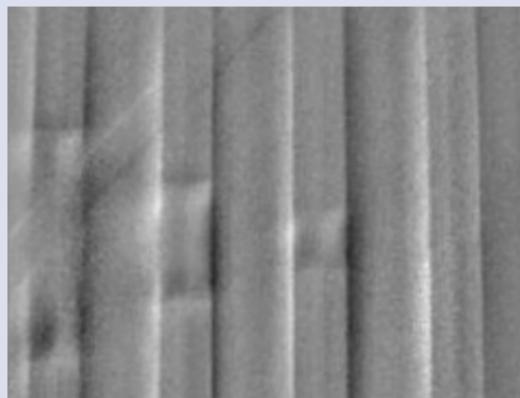
Требуется: Найти местоположение области „дефекта“

т.е. „восстановить“ регулярное изображение

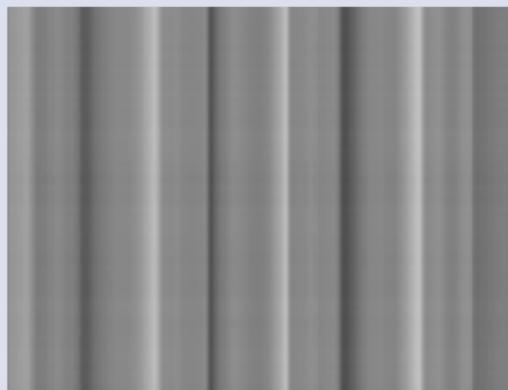


по имеющемуся регулярному изображению с „дефектом“

Регулярные изображения (примеры)



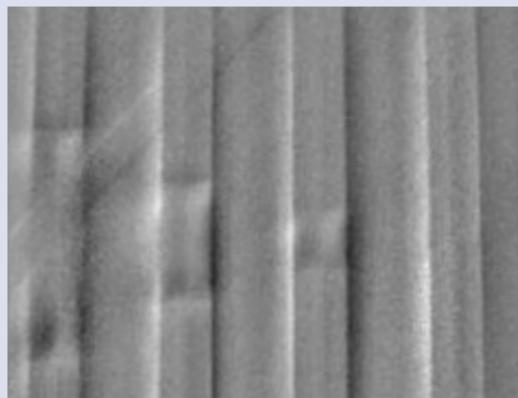
Регулярное, с дефектами



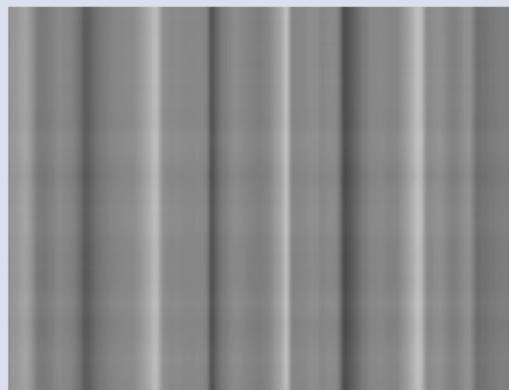
Регулярное, без дефектов

Изображение (справа) получено с помощью МНМ

Регулярные изображения (тот же пример)



Регулярное, с дефектами



Регулярное, без дефектов

Изображение (справа) получено с помощью МНК

Содержание

- 0 Откуда появилась задача?
- 1 Наилучшая L_p -норма и негладкая оптимизация**
- 2 Ошибочные измерения и МНМ
- 3 3D-структуры (регулярная и с дефектами)
- 4 Робастность МНМ для нахождения дефектов
- 0 Что далее?

В чем состоит задача об L_p -норме?

Имеется система линейных уравнений:

$$Ax \approx b, \quad (1.1)$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \approx b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.2)$$

Здесь $A \in R^{m \times n}$ – $m \times n$ -матрица; $b \in R^m$ – m -мерный вектор; $x \in R^n$ – n -мерный вектор неизвестных.

Требуется найти вектор $x_p^* \in R^n$, который минимизирует L_p -норму вектора $y = Ax - b = (y_1, \dots, y_m)^T \in R^m$, т.е. вектора невязок для системы (1.1) или системы (1.2).

"Наилучшая" L_p -норма для системы (1.1)

соответствует задаче минимизации выпуклой функции:

найти

$$x_p^* = \arg \min_{x \in R^n} \left\{ f_p(x) = \|Ax - b\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p \right)^{1/p} \right\}, \quad (1.3)$$

где $p \in R$ – скалярный параметр, такой что $p \geq 1$.

Здесь:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

 $p \geq 1$ гарантирует выпуклость негладкой функции $f_p(x)$.

О методах решения задачи (1.3)

Для решения задачи (1.3) можно использовать методы минимизации негладких выпуклых функций. На основе модификации r -алгоритма построена программа **linrp** [1]. На основе метода эллипсоидов разработаны алгоритмы с учетом двусторонних ограничений на переменные [2].

1. Стецюк П.И., Колесник Ю.С. К вопросу выбора метода аппроксимации результатов измерения // Интеллектуальные информационно-аналитические системы и комплексы. 2000.
2. Стецюк П.И., Стовба В.А., Мартынюк С.И. Алгоритм метода эллипсоидов для нахождения L_p -решения системы линейных уравнений // Теорія оптимальних рішень. 2017.

Методы – МНМ, МНК и МММ

Для частных случаев L_p -нормы:

$$p = 1 - \text{"манхеттеновская"} \text{ норма } \|y\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i|;$$

$$p = 2 - \text{евклидова норма } \|y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i)^2};$$

$$p = \infty - \text{чебышевская норма } \|y\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} |y_i|;$$

из задачи (1.3) следуют известные методы:

МНМ – Метод Наименьших Модулей ($p = 1$);

МНК – Метод Наименьших Квадратов ($p = 2$);

МММ – МиниМаксный (чебышевский) Метод ($p = \infty$).

Упрощенная задача (1.3) для $1 \leq p \leq 2$

соответствует задаче минимизации выпуклой функции:

найти

$$x_p^* = \arg \min_{x \in R^n} \left\{ F_p(x) = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right|^p \right\}, \quad (1.4)$$

где $p \in R$ – скалярный параметр, такой что $1 \leq p \leq 2$.

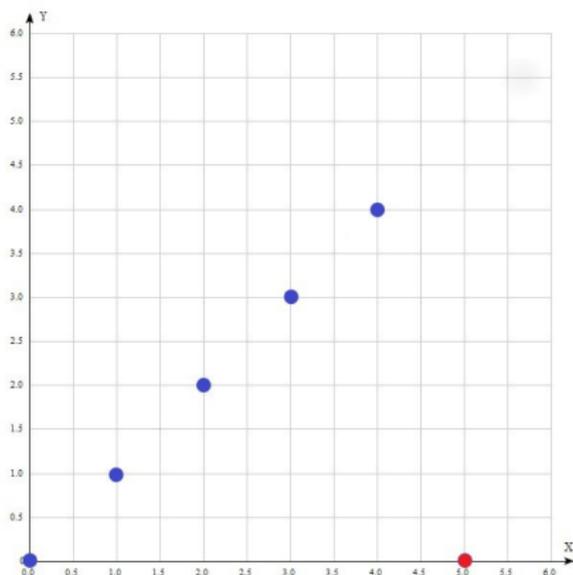
Здесь:

$F_p(x)$ – выпуклая функция (негладкая, если $p = 1$),
 при $p = 1$ имеем МНМ (сводится к решению ЛП-задачи),
 при $p = 2$ – МНК (минимизация квадратичной функции).

Содержание

- 0 Откуда появилась задача?
- 1 Наилучшая L_p -норма и негладкая оптимизация
- 2 Ошибочные измерения и МНМ**
- 3 3D-структуры (регулярная и с дефектами)
- 4 Робастность МНМ для нахождения дефектов
- 0 Что далее?

Ошибочное измерение (пример из [3], стр. 10)



Результаты измерений ([3], стр. 10), среди которых есть одно **ошибочное**, требуется аппроксимировать линейной функцией

$$y = cx + d,$$

где c и d – неизвестные.

3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.

МНМ+МНК для примера из [3], стр. 10

Метод Наименьших Модулей:

$$(c_1^*, d_1^*) = \arg \min_{c,d} \left\{ \sum_{i=1}^6 |y_i - cx_i - d| \right\} \quad (2.1)$$

i	y_i	x_i
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	4
6	0	5

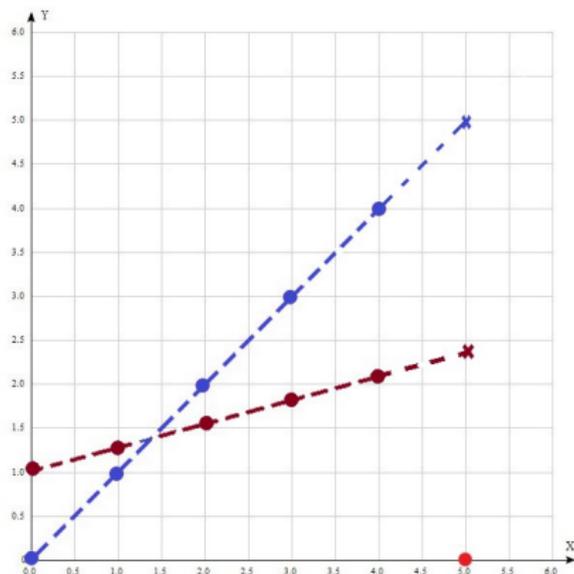
Решение: $c_1^* = 1, d_1^* = 0$.

Метод Наименьших Квадратов:

$$(c_2^*, d_2^*) = \arg \min_{c,d} \left\{ \sum_{i=1}^6 (y_i - cx_i - d)^2 \right\} \quad (2.2)$$

Решение: $c_2^* = 2/7, d_2^* = 20/21$.

Точность МНМ и МНК для примера из [3]



Результаты измерений
МНМ аппроксимирует
линейной функцией

$$y = x,$$

а МНК аппроксимирует
линейной функцией

$$y = \frac{2}{7}x + \frac{20}{21}.$$

Результаты измерений, среди которых имеется одно **ошибочное**, МНМ аппроксимирует точнее, чем МНК.

Полезные ссылки на МНМ

4. Мудров В.И., Кушко В.Л. Метод наименьших модулей. – М.: Знание, 1971. – 64 с.

... Брошюра посвящена описанию одного из методов обработки экспериментальных данных – метода наименьших модулей, использование которого полезно в тех случаях, когда распределение ошибок измерений подчинено закону Лапласа.

!метод вариационно-взвешенных квадратических приближений!

5. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. – Новосибирск: Наука, 1995. – 220 с.

6. Стецюк П.И., Колесник Ю.С., Лейбович М.М. К робастности метода наименьших модулей // Компьютерная математика. – 2002. Выпуск 2. – С. 114–151.

Содержание

- 0 Откуда появилась задача?
- 1 Наилучшая L_p -норма и негладкая оптимизация
- 2 Ошибочные измерения и МНМ
- 3 3D-структуры (регулярная и с дефектами)**
- 4 Робастность МНМ для нахождения дефектов
- 0 Что далее?

Регулярная 3D-структура и ее параметры

3D-структурой будем называть тройку $\{A, u, v\}$, где

$A \in R^{m \times n}$ – $m \times n$ -матрица, такая что $A = \{a_{ij}\}_{j=1,n}^{i=1,m}$,
 $u \in R^m$ – m -мерный вектор, $v \in R^n$ – n -мерный вектор.

Определение 1. 3D-структура $\{A, u, v\}$ называется

регулярной, если матрица $A \in R^{m \times n}$ и векторы $u \in R^m$ и $v \in R^n$ такие, что $a_{ij} = u_i + v_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Свойства регулярной 3D-структуры

Лемма 1. Если $\{A, u, v\}$ – регулярная 3D-структура, то регулярной будет и 3D-структура $\{A, \tilde{u}, \tilde{v}\}$, где

$$\tilde{u}_i = u_i + t, \quad i = 1, \dots, m, \quad \tilde{v}_j = v_j - t, \quad j = 1, \dots, n,$$

$\forall t \in R, t \neq 0$.

Определение 2. Регулярную 3D-структуру $\{A, u^*, v^*\}$

будем называть базисной, если векторы $u^* \in R^m$ и $v^* \in R^n$ – такие, что $\sum_{i=1}^m u_i^* = \sum_{j=1}^n v_j^*$.

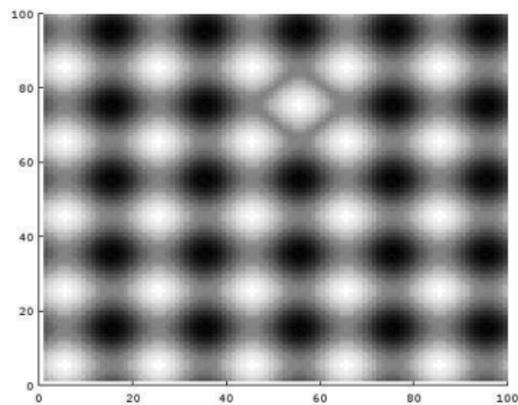
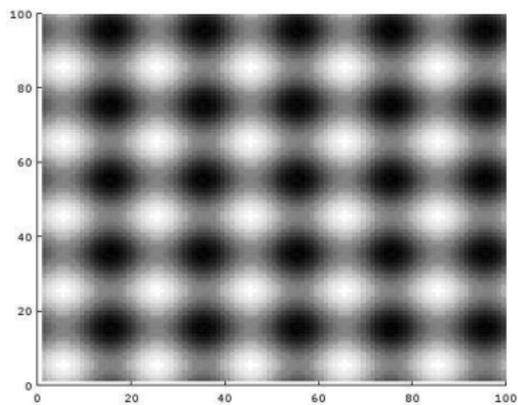
Регулярная структура с дефектами

Определение 3. Элементарным дефектом в регулярной 3D-структуре $\{A, \underline{u}, \underline{v}\}$ будем называть такую пару индексов ij , $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$, для которых $a_{ij} \neq u_i + v_j$.

Если количество элементарных дефектов равно 1, то 3D-структура – регулярная, с одним дефектом;

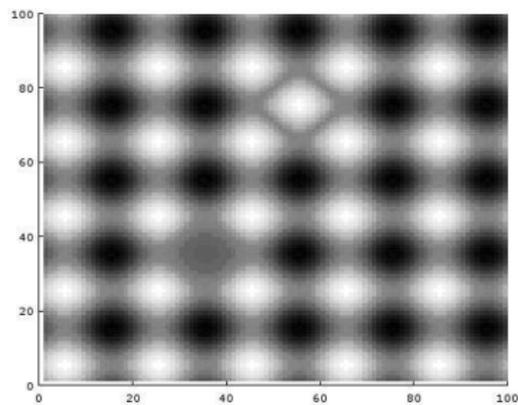
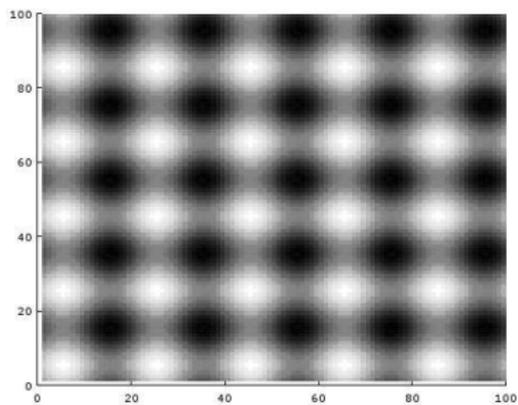
Если количество элементарных дефектов равно $k > 1$, то 3D-структура – регулярная, с k дефектами;

3D-структуры (регулярная, с одним дефектом)



Регулярная (слева), Регулярная с одним дефектом (справа)

3D-структуры (регулярная, с двумя дефектами)



Регулярная (слева), Регулярная с двумя дефектами (справа)

Задача 1 и ее формулировка

Задача 1. Имеется $m \times n$ -матрица A . Для регулярной 3D-структуры $\{A^*, x^*, y^*\}$ требуется найти такие векторы $x^* \in R^m$ и $y^* \in R^n$, чтобы коэффициенты матрицы A^* минимально отклонялись от коэффициентов матрицы A .

Оптимизационная задача ($p \geq 1$): найти

$$(x^*, y^*) = \arg \min_{x, y} \left\{ \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_i + y_j - a_{ij}|^p \right)^{1/p} \right\}. \quad (3.1)$$

Задача 2 и ее формулировка

Задача 2. Имеется $m \times n$ -матрица A . Для базисной регулярной 3D-структуры $\{A^{**}, x^{**}, y^{**}\}$ требуется найти векторы $x^{**} \in R^m$ и $y^{**} \in R^n$, чтобы коэфф. матрицы A^{**} минимально отклонялись от коэффициентов матрицы A .

Оптимизационная задача ($p \geq 1$): найти

$$(x^{**}, y^{**}) = \arg \min_{x, y} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_i + y_j - a_{ij}|^p \right)^{1/p} \quad (3.2)$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j. \quad (3.3)$$

Содержание

- 0 Откуда появилась задача?
- 1 Наилучшая L_p -норма и негладкая оптимизация
- 2 Ошибочные измерения и МНМ
- 3 3D-структуры (регулярная и с дефектами)
- 4 Робастность МНМ для нахождения дефектов**
- 0 Что далее?

МНМ и МНК (для задачи 1)

МНМ соответствует задаче минимизации

негладкой выпуклой функции: найти

$$(x^*, y^*) = \arg \min_{x, y} \left\{ F_1(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} - x_i - y_j| \right\}. \quad (4.1)$$

МНК соответствует задаче минимизации

квадратичной выпуклой функции: найти

$$(x^{**}, y^{**}) = \arg \min_{x, y} \left\{ F_2(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - x_i - y_j)^2 \right\}. \quad (4.2)$$

Программы для МНМ и МНК

реализованы на языке Octave

с помощью r -алгоритма Шора [7] и используют Octave-функцию `ralgb5` [8, стр. 384–385].

7. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979.

8. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r -алгоритмы. – Кишинэу: Эврика, 2014. [▶ Stetsyuk2014](#)

Затраты программ для нахождения

параметров регулярной 3D-структуры ($n = 600, m = 400$).

№	МНК			МНМ		
	itn	nfg	time	itn	nfg	time
1	457	700	10.58	411	502	11.76
2	494	785	11.59	413	505	11.79
3	426	647	9.77	412	503	11.77
4	453	702	10.50	412	502	11.77
5	488	764	11.34	410	499	11.69

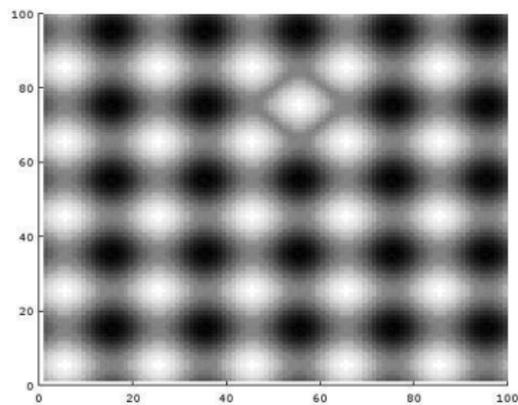
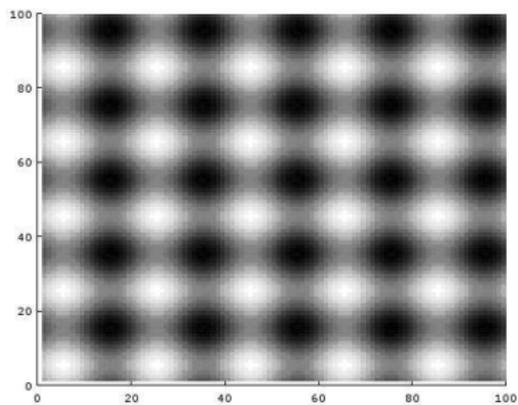
Здесь:

itn – количество итераций,

nfg – количество вычислений функции и ее субградиента,

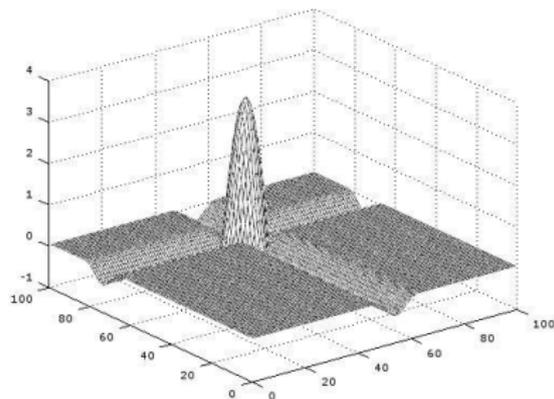
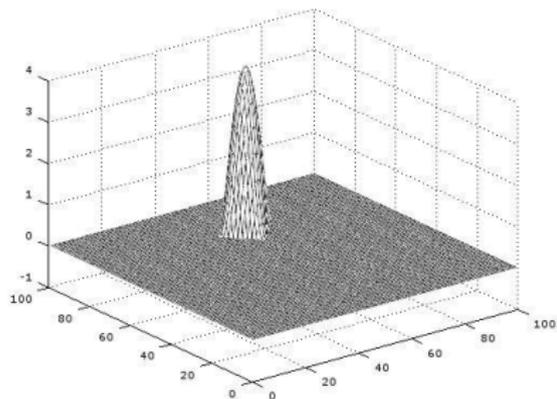
time – время выполнения программы в секундах.

3D-структура (регулярная, с одним дефектом)



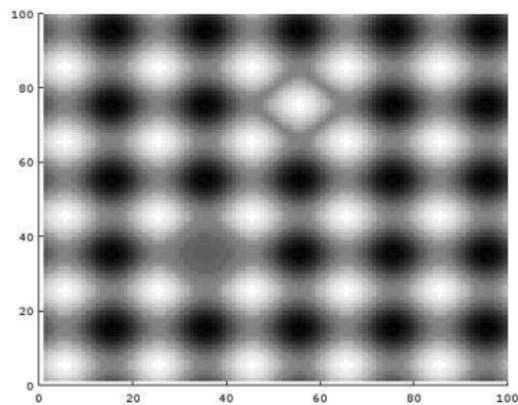
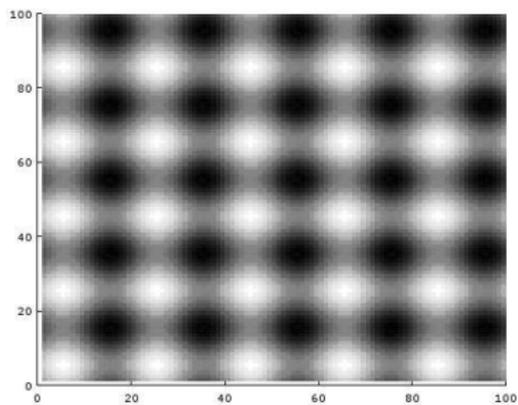
Регулярная (слева), Регулярная с одним дефектом (справа)

МНМ и МНК для одного дефекта



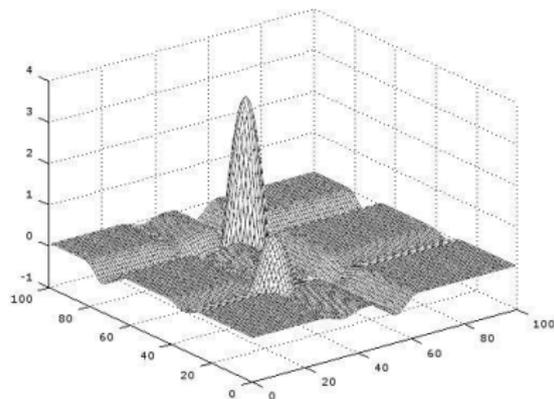
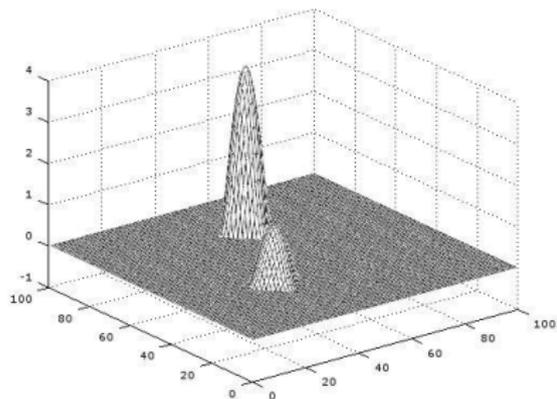
МНМ (слева), МНК(справа)

3D-структура (регулярная, с двумя дефектами)



Регулярная (слева), Регулярная с двумя дефектами (справа)

МНМ и МНК для двух дефектов



МНМ (слева), МНК(справа)

Содержание

- 0 Откуда появилась задача?
- 1 Наилучшая L_p -норма и негладкая оптимизация
- 2 Ошибочные измерения и МНМ
- 3 3D-структуры (регулярная и с дефектами)
- 4 Робастность МНМ для нахождения дефектов
- 0** Что далее?

Изображения с дефектами

характерны при неразрушающем контроле качества тонкостенных многослойных композиционных материалов с помощью методов лазерной интерферометрии, таких как метод голографической интерферометрии, метод спекл-интерферометрии и метод ширографии [9].

9. Lobanov L.M., Pivtorak V.A., Kyjanets I.V., Savitsky V.V., Tkachuk G.I. Express control of quality and stressed state of welded structures using method of electron shearography and speckle-interferometry. – The Paton Welding Journal, August, 2005, pp.35–40.

Методы и программы планируется

использовать для поиска дефектных участков, чтобы автоматизировать процесс определения местоположения дефектов в ответственных элементах конструкций и снизить влияние человеческого фактора при неразрушающем контроле качества.

Литература (по теме доклада)

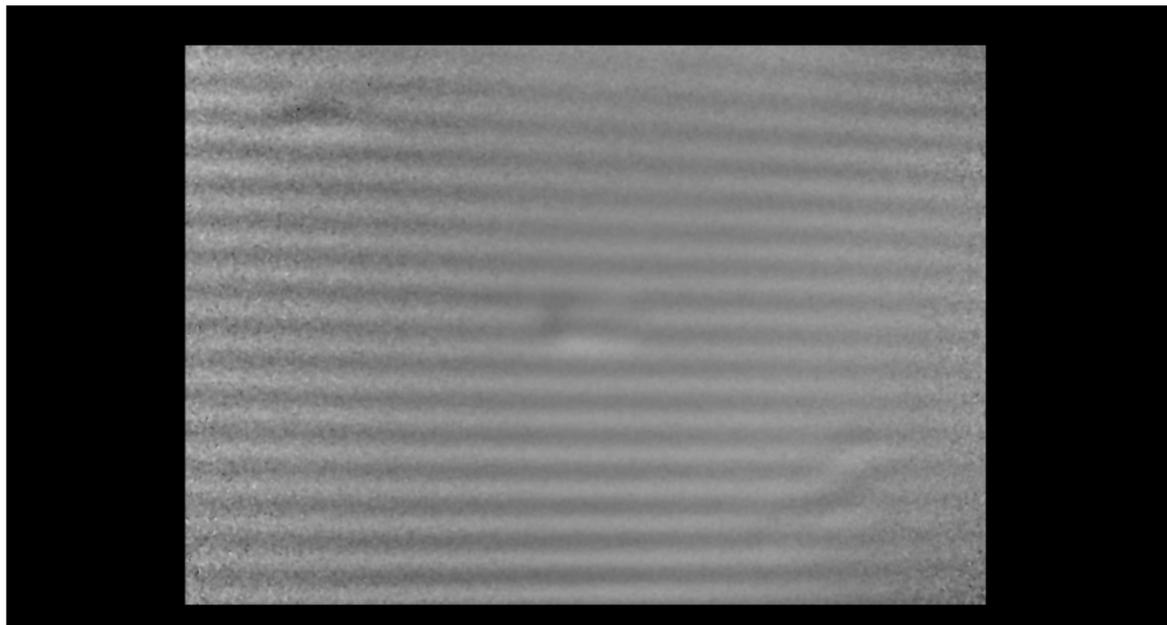
10. Стецюк П.И., Савицкий В.В. О робастности метода наименьших модулей для поиска дефектов в регулярных 3D-структурах // Матеріали Дев'ятнадцятого Міжнародного науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування", присвяченого пам'яті д.ф.-м.н., професора Петренюка Анатолія Яковича (Кропивницький, 7-8 квітня 2017 року) / За ред. Г.П. Донця. – Кропивницький, 2017. – С. 127–132.

11. Стецюк П.И., Савицкий В.В. О поиске дефектов в регулярных 3D-структурах // Проблемы управления и информатики. – 2018. – № 1. (в печати).

Работа выполнена при поддержке
НАН Украины, проект № 0116U004558,
и Volkswagen Foundation, грант No 90 306.

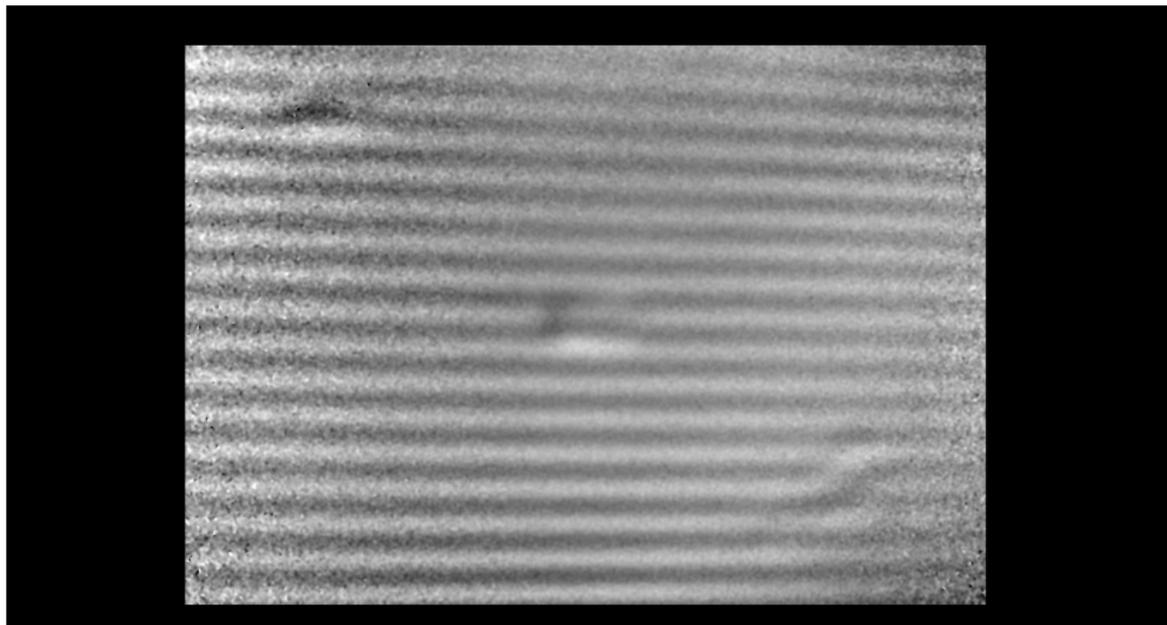
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

BACK UP SLIDES: Регулярное изображение



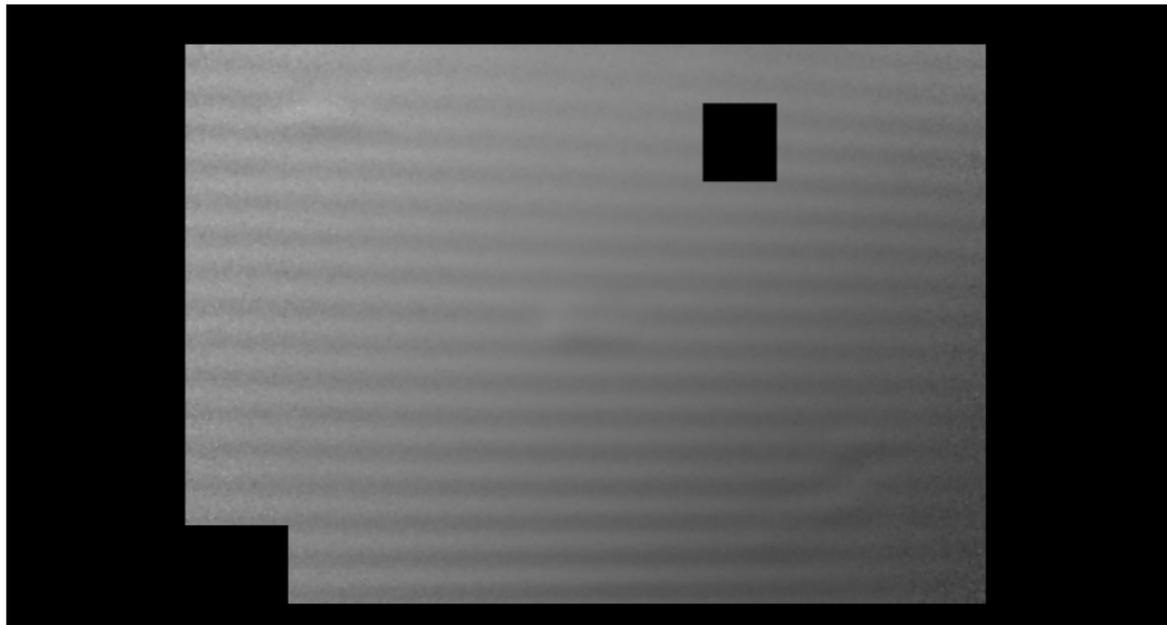
с тремя „дефектными“ областями

BACK UP SLIDES: Регулярное изображение



с тремя „дефектными“ областями

BACK UP SLIDES: Регулярное изображение



для области произвольной формы