

МАКСИМАЛЬНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ЧИСЛО В СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев

Всеукраїнська науково-практична конференція
«В.М.Глушков — піонер кібернетики», яка присвячена 50-річчю проекту
ОГАС (Загальнодержавної автоматизованої системи управління економікою)
11 грудня 2014 року, м. Київ, Україна



„Автоматизация управления ставит в свою очередь новые задачи перед организацией и развитием экономических механизмов управления. Так что создание действительно эффективной системы управления экономикой возможно лишь на основе правильного сочетания всех трех компонент – организации, экономических механизмов, и автоматизации обработки информации.“ [1, стр. 4].

1. Глушков В.М. Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС. – М.: Статистика, 1975. - 160 с.

О чем будет наш доклад?

В этой цитате В.М. Глушков подчеркивает важную роль новых математических методов при создании инструментария для управления экономической системой.

Наша цель показать, что максимальное сингулярное число матрицы позволяет дополнить новыми возможностями традиционный инструментарий для анализа балансовых моделей и продуктивных матриц [2], который связан с числом Фробениуса.

2. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М.
Сучасний економічний аналіз. Ч. 2. Макроекономіка. – Київ:
Вища школа, 2004. – 208 с.

План доклада

- 1 Число Фробениуса λ_A и статическая модель Леонтьева
- 2 Сингулярное число σ_B и экстремальная задача
- 3 Экономическая интерпретация числа σ_B
- 4 Сравнение чисел λ_B и σ_B (Украина, 15 отраслей)

План доклада

- 1 Число Фробениуса λ_A и статическая модель Леонтьева
- 2 Сингулярное число σ_B и экстремальная задача
- 3 Экономическая интерпретация числа σ_B
- 4 Сравнение чисел λ_B и σ_B (Украина, 15 отраслей)

Что такое число Фробениуса?

Число Фробениуса λ_A равно максимальному собственному числу $n \times n$ -матрицы A с неотрицательными элементами.

В статической модели затраты-выпуск (модель Леонтьева) с его помощью формулируется критерий продуктивности матрицы прямых затрат A (ему соответствует $\lambda_A < 1$).

Понятия продуктивности и ее запаса позволяют оценивать границы производственных возможностей сложившихся и планируемых технологий.

Что такое нормированные векторы Фробениуса?

Правый вектор Фробениуса равен вектору $x_A \geq 0$, такому что

$$Ax_A = \lambda_A x_A \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n (x_A)_i^2 = 1, \quad (\text{f1})$$

а левый вектор Фробениуса равен вектору $p_A \geq 0$, такому что

$$A^T p_A = \lambda_A p_A \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n (p_A)_i^2 = 1. \quad (\text{f2})$$

Примечание. Здесь λ_A – число Фробениуса неотрицательной матрицы A . Если матрица A – симметричная, то $x_A = p_A$.

Статическая модель Леонтьева

Продуктивная модель Леонтьева имеет вид

$$y = (I - A)x \quad \text{или} \quad x = By$$

и позволяет рассчитывать объемы конечного продукта y по объемам валового продукта x и наоборот.

Здесь

A – матрица коэффициентов прямых затрат – такая, что $\lambda_A < 1$,
 I – единичная матрица, $B = (I - A)^{-1}$ – матрица полных затрат.

Примечание. Подобные рассуждения справедливы и для двойственной (ценовой) модели Леонтьева $w = (I - A^T)p$, где p – вектор цен, w – вектор норм добавленной стоимости.

План доклада

- 1 Число Фробениуса λ_A и статическая модель Леонтьева
- 2 Сингулярное число σ_B и экстремальная задача**
- 3 Экономическая интерпретация числа σ_B
- 4 Сравнение чисел λ_B и σ_B (Украина, 15 отраслей)

Экстремальная задача для числа σ_B

Пусть σ_B – максимальное сингулярное число матрицы полных затрат $B=(I-A)^{-1}$. Ему соответствует экстремальная задача [3]:

найти

$$\sigma_B = (w^*)^T B y^* = \max_{w \geq 0, y \geq 0} w^T B y \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1. \quad (2)$$

3. Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Оптимальная нормированная структура спроса и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 5. – С. 51-59.

Сингулярные числа и сингулярные векторы

Задача (1)–(2) следует из определения сингулярных чисел.

Определение (Википедия).

Неотрицательное вещественное число σ называется сингулярным числом вещественной $m \times n$ -матрицы M , если существуют два вектора единичной длины $u \in R^m$ и $v \in R^n$ такие, что:

$$Mv = \sigma u \quad \text{и} \quad M^T u = \sigma v.$$

Такие векторы u и v называются, соответственно, левым сингулярным вектором и правым сингулярным вектором, соответствующим сингулярному числу σ .

Об оптимальном решении задачи (1)-(2)

Лемма 1.

Если кратность σ_B равна единице, то задача (1)-(2) имеет единственное оптимальное решение (w^*, y^*) , где w^* и y^* – левый и правый сингулярные векторы матрицы B , соответствующие максимальному сингулярному числу σ_B .

Примечание. Вектор w^* равен нормированному вектору Фробениуса матрицы BB^T , а вектор y^* – нормированному вектору Фробениуса матрицы $B^T B$.

Положительность единственного (w^*, y^*)

Лемма 2 [3].

Если матрица B – неотрицательна и неразложима, то задача (1)–(2) имеет единственное решение (w^*, y^*) , все компоненты которого положительны.

Примечание.

Матрицу B называют неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$B = \begin{Bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{Bmatrix},$$

где B_1 и B_3 – квадратные подматрицы.

Неразложимость матрицы B означает, что каждая отрасль использует (хотя бы косвенно) продукты всех других отраслей.

План доклада

- 1 Число Фробениуса λ_A и статическая модель Леонтьева
- 2 Сингулярное число σ_B и экстремальная задача
- 3 Экономическая интерпретация числа σ_B**
- 4 Сравнение чисел λ_B и σ_B (Украина, 15 отраслей)

Интерпретация решения задачи (1)–(2)

Пара векторов (w^*, y^*) определяет такие нормированные векторы конечного продукта y и добавленной стоимости w , при которых реализуется максимальное сингулярное число σ_B – величина, пропорциональная либо национальному доходу $w^T x$, либо национальному продукту $p^T y$ [3,4].

3. СТЕЦЮК П.И., КОШЛАЙ Л.Б. *Оптимальная нормированная структура спроса и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева* // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 5. – С. 51-59.

4. СТЕЦЮК П.И., ЭММЕНЕГГЕР Ж.-Ф. *Максимальное сингулярное число матрицы и его экономическая интерпретация* // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 51-57.

Число σ_B пропорционально национ. доходу

Для национального дохода имеем $w^T x = k \cdot \sigma_B$,

что легко увидеть, если задачу (1)–(2) записать в виде:

найти

$$\sigma_B = (w^*)^T x^* = \max_{w, y, x \geq 0} w^T x \quad (3)$$

при ограничениях

$$x = By, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1. \quad (5)$$

Число σ_B пропорционально национ. продукту

Для национального продукта имеем $p^T y = k \cdot \sigma_B$,

что легко увидеть, если задачу (1)–(2) записать в виде:

найти

$$\sigma_B = (p^*)^T y^* = \max_{w, y, p \geq 0} p^T y \quad (6)$$

при ограничениях

$$p = B^T w, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1. \quad (8)$$

План доклада

- 1 Число Фробениуса λ_A и статическая модель Леонтьева
- 2 Сингулярное число σ_B и экстремальная задача
- 3 Экономическая интерпретация числа σ_B
- 4 Сравнение чисел λ_B и σ_B (Украина, 15 отраслей)

О сравнении чисел σ_B и λ_B

$\sigma_B \geq \lambda_B$, т.е. максимальное сингулярное число σ_B всегда не меньше, чем число Фробениуса λ_B .

А насколько σ_B может быть больше, чем λ_B ?

проиллюстрируем на примере агрегированного 15-ти отраслевого баланса Украины за 2003–2009 годы.

15 секторов в матрице Леонтьева (Украина)

матрица Леонтьева

№	Название отрасли	№ отрасли	1	2	3	4	5
1	Сельское хозяйство, охотничье и лесное хозяйство		0,25644	0,07763	0,00214	0,03313	0,00017
2	Рыбное хозяйство		0,00017	0,07457	0,00001	0,00049	0,00001
3	Добывающая промышленность		0,01008	0,00367	0,06446	0,11893	0,33387
4	Перерабатывающая промышленность		0,18065	0,18032	0,15941	0,29734	0,11449
5	Производство и распределение электроэнергии, газа и воды		0,01163	0,02934	0,08042	0,02750	0,07150
6	Строительство		0,00019	0,00000	0,00107	0,00025	0,00176
7	Торговля, ремонт автомобилей, бытовых изделий и предметов личного пользования		0,12371	0,21394	0,06930	0,20672	0,00137
8	Деятельность гостиниц и ресторанов		0,00025	0,00122	0,00194	0,00116	0,00254
9	Деятельность транспорта и связи		0,04232	0,08924	0,12953	0,04982	0,01114
10	Финансовая деятельность		0,00225	0,00428	0,00749	0,00809	0,01582
11	Операции с недвижимым имуществом, аренда, инжиниринг и предоставление услуг		0,00860	0,01284	0,01234	0,01477	0,01549
12	Государственное управление		0,00032	0,00122	0,00207	0,00242	0,00726
13	Образование		0,00006	0,00000	0,00042	0,00011	0,00052
14	Здравоохранение и предоставление соц. помощи		0,00032	0,00244	0,00134	0,00045	0,00093
15	Предоставление коммунальных и индивидуальных услуг, деятельность в сфере культуры и спорта		0,00018	0,00061	0,00151	0,00083	0,00222

Фрагмент матрицы за 2009 год (<http://www.ukrstat.gov.ua>).

Числа Фробениуса и σ_B (Украина, 15 секторов)

Год	λ_A	λ_B	σ_B
2003	0.58641	2.41787	2.914
2004	0.58476	2.40825	2.937
2005	0.59611	2.47591	3.107
2006	0.58495	2.40936	2.980
2007	0.57231	2.33812	2.865
2008	0.56623	2.30535	2.884
2009	0.56958	2.32332	2.866

Здесь λ_A – число Фробениуса технологической матрицы A ,
 λ_B – число Фробениуса матрицы полных затрат $B=(I-A)^{-1}$.

$$\lambda_B = \frac{1}{1 - \lambda_A}$$

Сравнение λ_B и σ_B (Украина, 15 секторов)

Из последнего столбца видим, что число σ_B превышает число Фробениуса λ_B не меньше, чем на 20%.

Год	λ_B	σ_B	$\frac{(\sigma_B - \lambda_B)}{\lambda_B}$
2003	2.41787	2.914	0.205
2004	2.40825	2.937	0.220
2005	2.47591	3.107	0.255
2006	2.40936	2.980	0.237
2007	2.33812	2.865	0.225
2008	2.30535	2.884	0.251
2009	2.32332	2.866	0.234

Учитывая, что **все реальные макроэкономические системы обладают вполне продуктивными матрицами затрат [1, стр. 53]**, подобная картина будет и для других матриц полных затрат.

Список литературы

1. Глушков В.М. *Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС.* – М.: Статистика, 1975. – 160 с.
2. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. *Сучасний економічний аналіз. Ч. 2. Макроекономіка.* – Київ: Вища школа, 2004. – 208 с.
3. Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. *Оптимальная нормированная структура спроса и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева* // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 5. – С. 51-59.
4. Стецюк П.И., Эмменеггер Ж.-Ф. *Максимальное сингулярное число матрицы и его экономическая интерпретация* // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 51-57.

Thanks

Supported by SNSF-SCOPES
Project Nr. 127962, Valorisation Grant.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!