КРАТЧАЙШИЙ k-ВЕРШИННЫЙ ПУТЬ В ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

Стецюк П.И.[1], Долинский Э.С.[2]
stetsyukp@gmail.com

[1]Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев
[2]Ужгородский национальный университет, Ужгород

VII ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ
"ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ"
10-12 березня 2016 року, м. Полтава

Содержание

1. Откуда появилась задача?
2. k-Вершинный путь: переменные
3. k-Вершинный путь: ограничения
4. MBLP-задача и ее сложность

Содержание

1. Откуда появилась задача?
2. k-Вершинный путь: переменные
3. k-Вершинный путь: ограничения
4. MBLP-задача и ее сложность

Задача о „винном“ маршруте Львов–Вроцлав

Как по кратчайшему пути доехать из Львова до Вроцлава, если требуется посетить ровно 5 пунктов из 20 пунктов виноделия Малопольской винной дороги?

Задача о кратчайшем k-вершинном пути

Как найти кратчайший путь, который проходит через k вершин n-вершинного орграфа $D_{n,n}$, где $2 \leq k \leq n$?

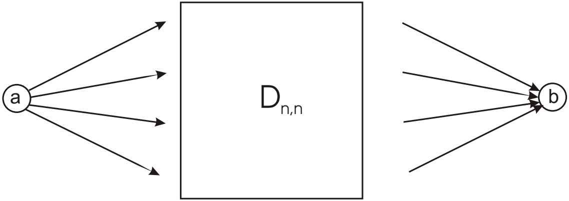
Кратчайший k-вершинный путь [1]

Если известны начальная и конечная вершины,

то кратчайший k-вершинный путь можно найти путем решения MBLP-задачи (задачи смешанного булева линейного программирования) из [1].

1. *Стецюк П.И.* Формулировки задач для кратчайшего k-вершинного пути и кратчайшего k-вершинного цикла в полном графе // Кибернетика и системный анализ, 2016, №1.

Кратчайший k-вершинный путь [2]

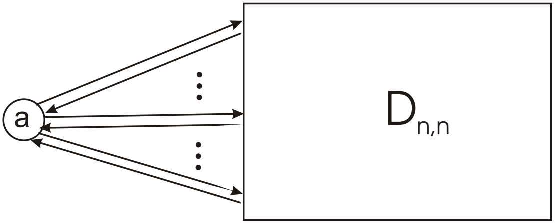


Если начальная и конечная вершины неизвестны,

то кратчайшему k-вершинному пути соответствует MBLP-задача из [2], где расстояния от вершин a и b к вершинам орграфа $D_{n,n}$ равны нулю.

2. *Стецюк П.И., Лефтеров А.В., Федосеев А.И.* Кратчайший k-вершинный путь // Компьютерная математика, 2015, №2.

Наша цель



упростить MBLP-задачу из [2]

для нахождения кратчайшего k-вершинного пути, если начальная и конечная вершины являются неизвестными (см. рисунок).

Содержание

1. Откуда появилась задача?
2. k-Вершинный путь: переменные
3. k-Вершинный путь: ограничения
4. MBLP-задача и ее сложность

Что такое k-вершинный путь?

Заданы:

$D_{n,n}$ – полный граф, где n – количество вершин
$d_{ij} > 0$ – расстояние между вершинами i та j, $i \neq j$

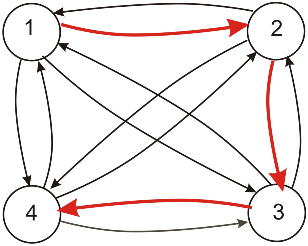
k-вершинный путь $(2 \leq k \leq n)$

это путь, который проходит через k вершин графа $D_{n,n}$ (включает начальную и конечную вершины)

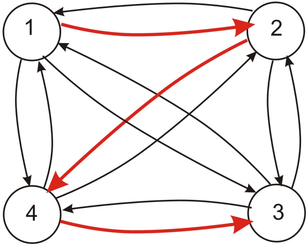
n-вершинный путь является гамильтоновым путем

(проходит через все вершины графа $D_{n,n}$)

Примеры 4-вершинных путей в графе $D_{4,4}$

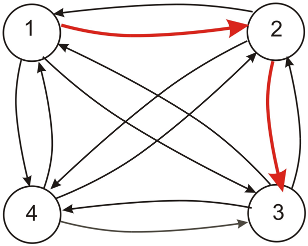


Путь (1,2,3,4)

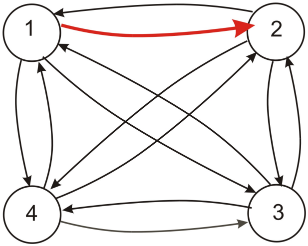


Путь (1,2,4,3)

3-вершинный и 2-вершинный пути в графе $D_{4,4}$



Путь (1,2,3)



Путь (1,2)

Булевы переменные

Переменные для графа $D_{n,n}$: $n(n-1) \quad + \quad n$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (i,j) \text{ включается в путь,} \\ 0, & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если путь проходит через вершину } i, \\ 0, & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

Дополнительные переменные: $n \quad + \quad n$

$$x_{ai}, x_{ia} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (a,i) \ ((i,a)) \text{ включается в цикл,} \\ 0, & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

Непрерывные переменные

Переменные для графа $D_{n,n}$: $n(n-1)$

$z_{ij} \geq 0$ – задают величину потока некоторого продукта от вершини i к вершине j

Дополнительные переменные: n

$z_{ai} \geq 0$ – задают величину потока этого же продукта от вершини a к вершине i

Содержание

1. Откуда появилась задача?
2. k-Вершинный путь: переменные
3. k-Вершинный путь: ограничения
4. MBLP-задача и ее сложность

Булевы ограничения для k-вершинного пути

Ограничения (2)–(4): $2 \quad + \quad 2n + \quad 1$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ai} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ia} = 1, \tag{2}$$

$$x_{ai} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = y_i, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} + x_{ia} = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = k, \tag{4}$$

(2) описывают однократный вход (выход) для вершины a;
(4) задает ровно k вершин, через которые проходит путь;
(3) описывают однократный вход (выход) для вершин $y_i = 1$.

Булевы ограничения для гамильтонового пути

Ограничения (13),(14): $2 \quad + \quad 2n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ai} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ia} = 1, \tag{13}$$

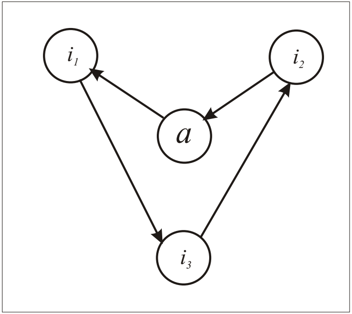
$$x_{ai} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} + x_{ia} = 1, \; i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

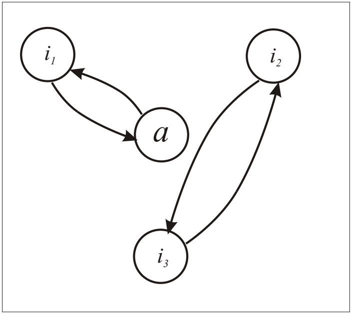
Они есть ограничениями задачи о назначениях.

Проблема ограничений (2)–(4) и (13)–(14):

допустимые решения для них могут содержать подциклы.

Два допустимых решения для графа $D_{3,3}$





Связный цикл (слева), несвязные подциклы (справа)

Связность k-вершинного пути обеспечивают

ограничения (5)–(8): $n \quad + \quad 1 \quad + \quad n(n-1) \quad + \quad n$

$$z_{ai} - kx_{ai} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ai} = k, \tag{6}$$

$$z_{ij} - (k-1)x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j, \tag{7}$$

$$z_{ai} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

Ограничения (5)–(8) означают, что из вершины a необходимо вывезти k единиц продукта, оставляя в каждой из посещаемых вершин одну единицу продукта.

Связность гамильтонового пути обеспечивают

ограничения (15)–(18): $n \quad + \quad 1 \quad + \quad n(n-1) \quad + \quad n$

$$z_{ai} - nx_{ai} \leq 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ai} = n, \tag{16}$$

$$z_{ij} - (n-1)x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \ i \neq j, \tag{17}$$

$$z_{ai} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} z_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} z_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., n, \tag{18}$$

Ограничения (15)–(18) означают, что из вершины a необходимо вывезти n единиц продукта, оставляя в каждой из посещаемых вершин одну единицу продукта.

Содержание

1. Откуда появилась задача?
2. k-Вершинный путь: переменные
3. k-Вершинный путь: ограничения
4. MBLP-задача и ее сложность

Кратчайший k-вершинный путь. MBLP-задача

найти

$$d_k^* = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

при ограничениях (2)–(4), (5)–(8) и ограничениях

$$y_i = 0 \vee 1, \quad i = 1, ..., n, \qquad (9)$$

$$x_{ai} = 0 \vee 1, \; x_{ia} = 0 \vee 1, \; x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1, ..., n, \; i \neq j, \qquad (10)$$

$$z_{ai} \geq 0, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \; i \neq j. \qquad (11)$$

Задача (1)–(11) является задачей

смешанного булевого линейного программирования.

Характеристика задачи (1)–(11)

Минимизация целевой линейной функции в (1) отвечает

нахождению k-вершинного пути минимальной длины d_k^*

Ограничения (2)–(11)

описывают все возможные k-вершинные пути в графе $D_{n,n}$

Если $k = n$,

то получаем задачу для кратчайшего гамильтонового пути.

Кратчайший гамильтонов путь. MBLP-задача

найти

$$d_k^* = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \qquad (12)$$

при ограничениях (13)–(14), (15)–(18) и ограничениях

$$x_{ai} = 0 \vee 1, \; x_{ia} = 0 \vee 1, \; x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j{=}1, ..., n, \; i{\neq}j, \qquad (19)$$

$$z_{ai} \geq 0, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, ..., n, \; i \neq j. \qquad (20)$$

Задача (12)–(20) является задачей

смешанного булевого линейного программирования.

О сложности MBLP-задачи

Если k большое, то

задача поиска кратчайшего k-вершинного пути сложнее, чем задача поиска кратчайшего гамильтонового пути.

Это обусловлено тем, что нужно определить подмножество вершин, для которой буде найден гамильтонов путь.

Это подтверждает вычислительный эксперимент для 20 пунктов виноделия Малопольской винной дороги [2]. Проводился на **NEOS**-сервере.

Задача (1)–(11), граф $D_{20,20}$, NEOS-сервер.

k	d_k^*	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
4	16.05	0.09	0.15	0.07	0.63	1.58
8	92.95	2.04	1.51	0.80	6.06	55.55
12	162.25	0.70	0.75	1.29	3.41	23.33
16	263.55	1.03	0.78	0.43	2.30	18.77
20	447.85	0.30	0.29	0.10	1.03	2.80

Времена решения (в секундах)

Gurobi 6.5.0 – t_1; CPLEX 12.6.2.0 – t_2;
XPRESS-MP 26.01 – t_3; CBC 2.9.4 – t_4;
MOSEK – t_5.

Выводы:

1. Предложена MBLP-задача для нахождения кратчайшего пути, который проходит через заданное количество вершин полного орграфа.
2. Если путь проходит через все вершины орграфа, то решение MBLP-задачи определяет кратчайший гамильтонов путь в ориентированном графе.
3. Для небольших орграфов MBLP-задачу можно использовать при выборе оптимальных маршрутов в режиме реального времени.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке проектов НАН Украины (№ 0114U001055) и МОН Украины (№ 0115U001906).

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!