КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО СИНГУЛЯРНОГО ЧИСЛА

Стецюк П.И.
stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев

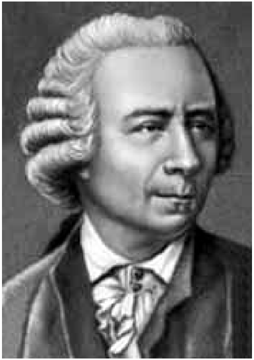
МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ
(ПОО-XL)
присвячена 90-річчю від дня народження академіка В.М. Глушкова
30 вересня – 04 жовтня 2013, смт. Кацивелі, Крим, Україна

“Оптимальные Решения“ Глушкова

„Одним из важнейших применений машинной (безбумажной) информатики является машинное управление и проектирование. Применение ЭВМ в этих областях позволяет перейти от выработки более или менее хороших решений к выработке наилучших или, как обычно принято говорить, **оптимальных решений**" [1, стр. 223].

1. **Глушков В.М.** Основы безбумажной информатики. – М.: Наука, 1982. – 552 с.

“Максимумы и Минимумы“ Эйлера



„Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь **максимума или минимума** ...“

Л.Эйлер „Об упругих кривых“.

План доклада

1. Число и векторы Фробениуса
2. Квадратичная экстремальная задача и σ_A.
   - Сингулярное число σ_A и квадратичная задача
   - Неотрицательность и неразложимость матриц
3. Экономическая интрепретация
   - Экономическая интрепретация
   - Продуктивная модель Леонтьева
   - Украина (15-отраслей)

О числе и векторах Фробениуса

Устойчивость системы, как правило, характеризуется величиной максимального (минимального) собственного числа некоторой матрицы, а компоненты собственных векторов, отвечающих этому числу, связаны со значениями параметров системы в состоянии равновесия.

Для экономических систем эту роль выполняют число и векторы Фробениуса, которые связаны с квадратными матрицами с неотрицательными коэффициентами [2].

2. **Ашманов С.А.** Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.

Что такое число и векторы Фробениуса?

Число Фробениуса λ_A равно

максимальному собственному числу $n \times n$-матрицы A с неотрицательными коэффициентами.

Правый вектор Фробениуса равен вектору x_A, такому что

$$Ax_A = \lambda_A x_A \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (x_A)_i = 1. \tag{f1}$$

Левый вектор Фробениуса равен вектору p_A, такому что

$$A^T p_A = \lambda_A p_A \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (p_A)_i = 1. \tag{f2}$$

Сингулярное число σ_A и квадратичная задача

Лемма 1.

Пусть A – вещественная $n \times m$-матрица. Ее максимальное сингулярное число σ_A равно оптимальному значению целевой функции в квадратичной экстремальной задаче

$$\sigma_A = (u^*)^T A x^* = \max_{x \in R^n, u \in R^m} u^T A x \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^2 = 1. \qquad (2)$$

Примечание. Если кратность σ_A равна единице, то задача (1)–(2) имеет единственное оптимальное решение (x^*, u^*).

Неотрицательность (x^*, u^*)

Лемма 2.

Если матрица A такая, что матрицы AA^T и A^TA – неотрицательны, то задача (1)–(2) имеет решение (x^*, u^*), все компоненты которого неотрицательны. При этом вектор u^* равен нормированному правому вектору Фробениуса матрицы AA^T, а вектор x^* равен нормированному правому вектору Фробениуса матрицы A^TA.

Положительность единственного (x^*, u^*)

Лемма 3.

Если матрица A такая, что матрицы AA^T и A^TA – неотрицательны и неразложимы, то задача (1)–(2) имеет единственное решение (x^*, u^*), все компоненты которого положительны.

Примечание.

Матрицу $\mathcal{A}$ называют неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\ 0 & \mathcal{A}_3 \end{array} \right\},$$

где $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ – квадратные подматрицы размеров $k \times k$ и $(n-k)\times(n-k)$, соответственно.

Содержательная интерпретация

Пусть $y = Ax$ – линейная система со входом $x \in R^n$ и выходом $y \in R^m$ и выполнены условия леммы 3.

Если вход интерпретировать как вектор ресурсов, выход как вектор изделий, которые получены согласно технологической матрицы A, то интерпретируя веса $u \in R^m$ как цены на производимые изделия, получаем оптимальное соотношение между нормированным вектором ресурсов и нормированным вектором цен. Оно реализует максимум взвешенной цены на производимые изделия и этот максимум равен сингулярному числу матрицы A.

Какая модель ей соответствует?

найти

$$\sigma_A = (u^*)y^* = \max_{y \in R^m, u \in R^m} u^T y \qquad (1')$$

при ограничениях

$$y = Ax, \quad x \in R^n, \qquad (2')$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^2 = 1. \qquad (2')$$

Продуктивная модель Леонтьева $(n = m)$

Если матрица A равна матрице полных затрат B, то получим нормированные векторы конечного продукта и добавленной стоимости, которые отвечают максимизации национального дохода [3]. При этом национальный доход будет лучше, чем для нормированных векторов Фробениуса матриц B и B^T. А на сколько? увидим ниже.

3. Стецюк П.И. *Оптимальные нормированные векторы конечного продукта и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева* // Стохастическое программирование и его приложения – Иркутск: Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2012. – С. 483-492.

15 секторов в матрице Леонтьева (Украина)

матрица Леонтьева

№	Название отрасли / № отрасли	1	2	3	4	5
1	Сельское хозяйство, охотничье и лесное хозяйство	0,25644	0,07763	0,00214	0,03313	0,00017
2	Рыбное хозяйство	0,00017	0,07457	0,00001	0,00049	0,00001
3	Добывающая промышленность	0,01008	0,00367	0,06446	0,11893	0,33387
4	Перерабатывающая промышленность	0,18065	0,18032	0,15941	0,29734	0,11449
5	Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0,01163	0,02934	0,08042	0,02750	0,07150
6	Строительство	0,00019	0,00000	0,00107	0,00025	0,00176
7	Торговля, ремонт автомобилей, бытовых изделий и предметов личного пользования	0,12371	0,21394	0,06930	0,20672	0,00137
8	Деятельность гостиниц и ресторанов	0,00025	0,00122	0,00194	0,00116	0,00254
9	Деятельность транспорта и связи	0,04232	0,08924	0,12953	0,04982	0,01114
10	Финансовая деятельность	0,00225	0,00428	0,00749	0,00809	0,01582
11	Операции с недвижимым имуществом, аренда, инжиниринг и предоставление услуг	0,00860	0,01284	0,01234	0,01477	0,01549
12	Государственное управление	0,00032	0,00122	0,00207	0,00242	0,00726
13	Образование	0,00006	0,00000	0,00042	0,00011	0,00052
14	Здравоохранение и предоставление соц. помощи	0,00032	0,00244	0,00134	0,00045	0,00093
15	Предоставление коммунальных и индивидуальных услуг, деятельность в сфере культуры и спорта	0,00018	0,00061	0,00151	0,00083	0,00222

Фрагмент матрицы за 2009 год (http://www.ukrstat.gov.ua).

Числа Фробениуса и σ_B (Украина, 15 секторов)

Год	λ_A	λ_B	σ_B	$\frac{(\sigma_B - \lambda_B)}{\lambda_B}$
2003	0.58641	2.41787	2.914	0.205
2004	0.58476	2.40825	2.937	0.220
2005	0.59611	2.47591	3.107	0.255
2006	0.58495	2.40936	2.980	0.237
2007	0.57231	2.33812	2.865	0.225
2008	0.56623	2.30535	2.884	0.251
2009	0.56958	2.32332	2.866	0.234

Здесь λ_A – число Фробениуса технологической матрицы A, λ_B – число Фробениуса матрицы полных затрат $B=(I-A)^{-1}$.

$$\lambda_B = \frac{1}{1-\lambda_A}$$

Thanks

Supported by SNSF-SCOPES
Project Nr. 127962, Valorisation Grant.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!