Використання $r(\alpha)$-алгоритму для розв'язання квадратичної ELD-задачі

Стецюк П.І., Фесюк О.В.
sasha.fesyuk@gmail.com

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ

Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLIV), присвячена 60-річчю
від дня заснування Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
Кам'янець-Подільський, 26–29.09.2017

План доповіді

1. $r(\alpha)$-Алгоритми
2. r(α)-Алгоритм з адаптивним кроком
3. ELD-задачі
4. Тестові розрахунки

План доповіді

Задача безумовної мінімізації

Опукла функція:

$$f(x),\ x \in E^n$$

Мінімальне значення функції:

$$f^* = f(x^*),\ x^* \in X^*$$

Вважаємо:

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$$

Коефіцієнт розтягу:

$$\alpha,\ \alpha > 1$$

$r(\alpha)$-Алгоритм

Ітеративна процедура для визначення послідовностей n-вимірних векторів $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $n \times n$-матриць $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi, \;\; B_{k+1} = B_k R_\beta(\eta_k), \;\; k = 0, 1, 2, ..., \quad (1)$$

де

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{||B_k^T g_f(x_k)||}, \;\; h_k \geq h_k^* = arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h_k B_k \xi_k), \quad (2)$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{||B_k^T r_k||}, \;\; r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k). \quad (3)$$

Субградієнтний спуск

Формула (1) еквівалентна

$$y_{k+1} = A_k x_{k+1} = A_k x_k - h_k \xi_k =$$

$$= y_k - h_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{||B_k^T g_f(x_k)||} = y_k - h_k \frac{g_\varphi(y_k)}{||g_\varphi(y_k)||}. \qquad (4)$$

Де, опукла функція $\varphi(y) = f(B_k y)$ визначена в перетвореному просторі змінних $y = A_k x$, де $A_k = B_k^{-1}$

Складність $r(\alpha)$-алгоритму

На ітерації потрібно $5n^2$ множень:

- $3n^2$ множень $B_k\xi_k$, $B_k^T g_f(x_k)$, і $B_k^T r_k$,
- $2n^2$ множень $B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k)$.

Сімейство $r(\alpha)$-алгоритмів

Визначається коефіцієнтом розтягу простору $\alpha > 1$ і послідовністю величин кроків $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Їх вибір в поєднанні з критеріями зупинки визначають той чи інший варіант $r(\alpha)$-алгоритмів.

План доповіді

r(α)-Алгоритм з адаптивним кроком

Величина кроку h_k налаштовується в процесі виконання одновимірного спуску в напрямку нормованого антисубградієнта в перетвореному просторі змінних за допомогою параметрів:

- h_0, $h_0 \in \mathbb{R}$ – величина початкового кроку,
- q_1, $n_h \in \mathbb{R}$, $(q_1 \leq 1)$ – коефіцієнт зменшення кроку,
- q_2, $n_h \in \mathbb{R}$, $(q_2 \geq 1)$ – коефіцієнт збільшення кроку,
- n_h, $n_h \in \mathbb{N}$, $(n_h > 1)$ – задає кількість зроблених кроків одновимірного спуску, після якої величина кроку збільшується в q_2 раз.

Умова завершення спуску $(x_{k+1} - x_k)^T g_f(x_{k+1}) \geq 0$.

Можна виконати, оскільки $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$.

Критерії зупинки

ε_x, ε_g, $maxitn$

- $||x_{k+1} - x_k|| \leq \varepsilon_x$ – за аргументом,
- $||g_f(x_{k+1})|| \leq \varepsilon_g$ – за нормою субградієнта,
- перевищено максимальну кількість ітерацій,

Передбачена аварійна зупинка, якщо:

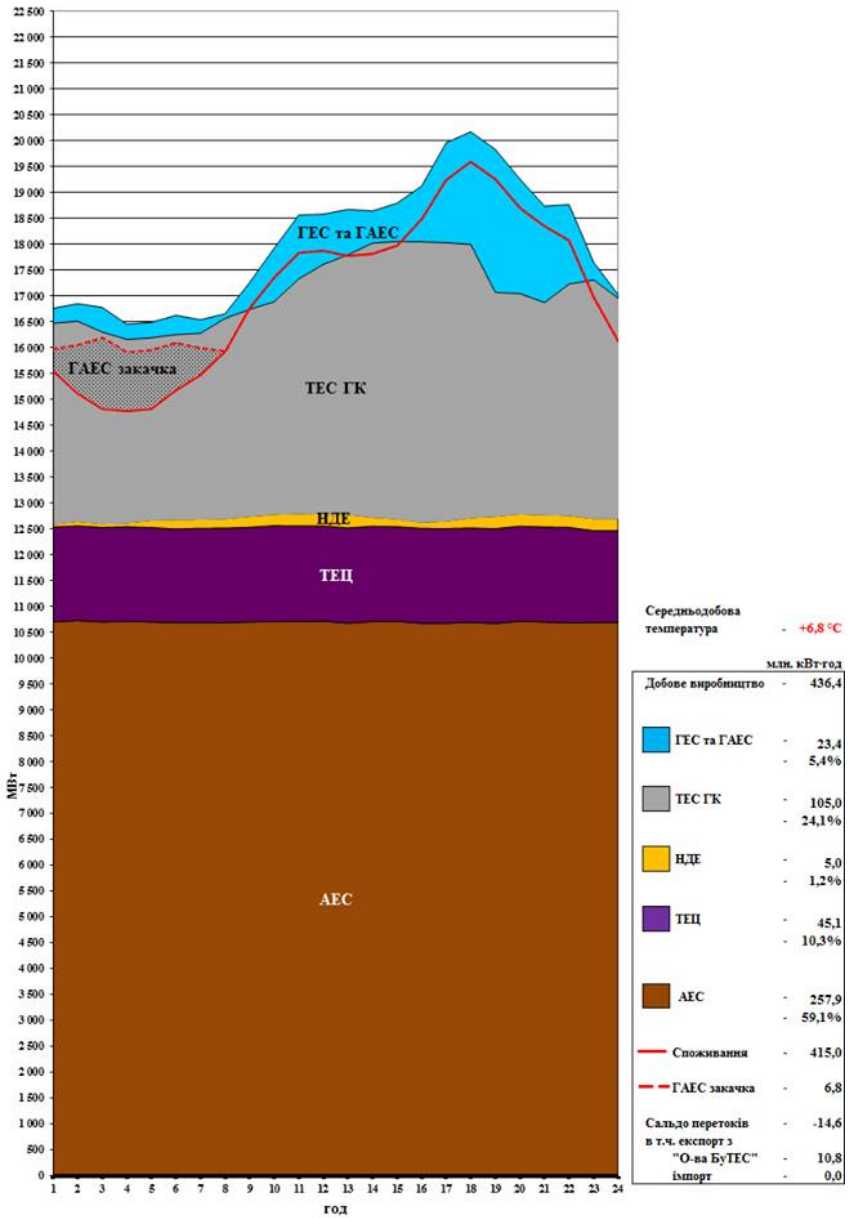
- $f(x)$ – необмежена знизу,
- h_0 – занадто малий.

Рекомендовані параметри:

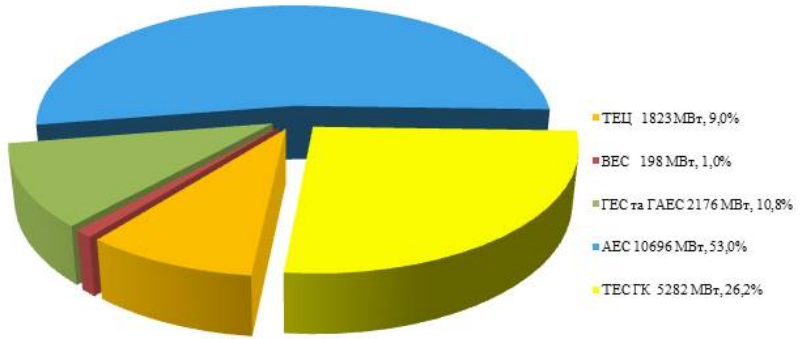
- $\alpha = 2 \div 4$,
- $h_0 = 10$, (рівний $||x_0 - x^*||$),
- $q_1 = 0.8 \div 0.95$,
- $q_2 = 1.1 \div 1.2$,
- $n_h = 2 \div 3$.

План доповіді

ОЕС України



Завантаження ОЕС України станом на 06.11.2016 р.



1. ДП НЕК «Укренерго»: Диспетчерське управління

Квадратична задача

Знайти

$$f^* = f(x^*) = \min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} (a_i x_{i,t}^2 + b_i x_{i,t} + c_i), \qquad (5)$$

при лінійних обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,t} = E_t, \ t = 1, ..., T, \qquad (6)$$

$$x_{i,t} - x_{i,t-1} \leq UR_i, \ t = 2, ..., T, \ i = 1, ..., N, \qquad (7)$$

$$x_{i,t-1} - x_{i,t} \leq DR_i, \ t = 2, ..., T, \ i = 1, ..., N, \qquad (8)$$

$$P_i^{low} \leq x_{i,t} \leq P_i^{up}, \ i = 1, ..., N, \ t = 1, ..., T, \qquad (9)$$

Задача безумовної мінімізації

Негладка опукла функція

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(a_i x_{i,t}^2 + b_i x_{i,t} + c_i) + Q_1 \sum_{t=1}^{T}|\sum_{i=1}^{N} x_{i,t} - E_t|+,$$

$$+Q_2 \sum_{t=2}^{T}\sum_{i=1}^{N} \max\{0, x_{i,t} - x_{i,t-1} - UR_i, x_{i,t-1} - x_{i,t} - DR_i\}+,$$

$$+ Q_3 \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} \max\{0, x_{i,t} - P_i^{up}, P_i^{low} - x_{i,t}\}. \qquad (10)$$

Програмна реалізація:

- Середовище реалізації – **GNU Octave** [2],
- Для мінімізації функції (10) використовується програма **ralgb5**,
- **calcfg(x)** обчислює значення негладкої функції (10) та її градієнт для **ralgb5**.

2. GNU Octave – Scientific Programming Language

План доповіді

Параметри

Машина t_1:

AMD FX-8350 Eight-Core Processor|4 ГГц, Ubuntu 16.04, Octave 4.0.3.

Машина t_2:

AMD Athlon X2 Dual-Core QL-64x2|2.1 ГГц, Ubuntu 14.04, Octave 4.0.3.

$r(\alpha)$-Алгоритм:

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1000,$
$\alpha = 4,$
$h_0 = 500,$
$q_1 = 0.95,\ q_2 = 1.1,$
$\varepsilon_g = 10^{-6},\ \varepsilon_x \in \{10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}\}.$

Результати розрахунків для (10)

$n = N \times T$	$f(x_k^*)$	ε_x	k^*	$calls$	t_1	t_2
$240 = 10 \times 24$	420540	$1.e-6$	4427	9198	6.73	17.1
		$1.e-5$	3879	8063	5.87	14.9
		$1.e-4$	3248	6719	4.96	12.6
$288 = 12 \times 24$	463391	$1.e-6$	5150	10475	10	25.4
		$1.e-5$	3944	8155	7.56	19.2
		$1.e-4$	3420	7062	6.54	16.6
$960 = 40 \times 24$	3021209	$1.e-6$	13437	26272	180	456.8
		$1.e-5$	13313	26038	178.7	445
		$1.e-4$	12446	24380	164.5	417.9

Висновок

- $r(\alpha)$-алгоритм для ELD-задач:
  - прийнятний час пошуку розв'язку,
  - досягається необхідна точність,
  - знаходиться оптимальний план завантаження енергоблоків.
- програма **ralgb5** є ефективною для задач:
  - 24 періоди,
  - 10-12 енергоблоків – 10, 25 секунд (машини t_1 та t_2), 40 – до трьох хвилин (t_1),
  - пришвидшується:
    - на 30-50% – вибір параметрів,
    - в 10-12 разів – реалізація з допомогою CUDA.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!